Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Одномерный двухкомпонентный бозе-газ
и алгебраический анзац Бете, *ТМФ*, 2015, том 183, но-
мер 3, 409–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8874>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:40:25

© 2015 г.

Н. А. Славнов*

ОДНОМЕРНЫЙ ДВУХКОМПОНЕНТНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАЦ БЕТЕ

Алгебраический анзац Бете применяется к модели одномерного двухкомпонентного бозе-газа с дельтаобразным отталкиванием. С помощью решеточной аппроксимации L -оператора найдены векторы Бете данной модели в непрерывном пределе. Также получено представление для матрицы монодромии в виде ряда, зависящего от бозонных полей. С помощью этого представления исследовано асимптотическое разложение матрицы монодромии по спектральному параметру.

Ключевые слова: анзац Бете, матрица монодромии, вектор Бете.

DOI: 10.4213/tmf8874

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье мы рассматриваем модель одномерного двухкомпонентного бозе-газа с дельтаобразным отталкиванием (модель ДКБГ). Данная модель является обобщением модели Либа–Линигера [1], [2] (квантовое нелинейное уравнение Шредингера), в которой бозонные поля имеют две внутренние степени свободы (цвет). Эта модель была решена Янгом в работе [3], где были найдены собственные векторы и спектр гамильтониана. Общий подход к решению модели с n внутренними степенями свободы (многокомпонентный бозе-газ) был дан в работе [4] (см. также работы [5], [6]). Метод вложенного алгебраического анзаца Бете был применен к данной модели в работах [7], [8]. Основная цель настоящей статьи – создать основу для вычисления формфакторов локальных операторов в этой модели в рамках вложенного алгебраического анзаца Бете.

Алгебраический анзац Бете является эффективным методом нахождения спектров квантовых гамильтонианов. Однако с точки зрения вычисления формфакторов локальных операторов применение этого метода связано с некоторыми трудностями. Основной проблемой является включение локальных операторов рассматриваемой модели в алгебру матричных элементов матрицы монодромии. В некоторых случаях эту проблему можно решить [9], [10], но, для того чтобы построить такое решение,

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

нужно, чтобы матрица монодромии $T(u)$ выражалась через R -матрицу. Для модели ДКБГ это не так. С другой стороны, в рамках традиционного подхода легко получить представления для формфакторов локальных операторов в виде кратных интегралов от произведения волновых функций. Однако вычисление этих кратных интегралов связано с серьезными техническими трудностями, и до настоящего времени они были вычислены лишь в некоторых относительно простых случаях [11].

Недавно в работе [12] был развит метод вычисления формфакторов локальных операторов в моделях, обладающих $GL(3)$ -симметрией. Данный метод основан на вложенном алгебраическом анзаце Бете и использует парциальные нулевые моды матрицы монодромии $T_{ij}(u)$ [13] в композитной модели [14]. Большинство приемов, использующихся в этом подходе, можно непосредственно применять в модели ДКБГ, однако некоторые из них нуждаются в небольшой модификации. В частности, необходимо скорректировать определение нулевых мод. Данная задача решается в настоящей статье.

Мы рассматриваем решеточное приближение модели ДКБГ. С помощью L -оператора, полученного в работах [7], [8], мы построим матрицу монодромии и векторы Бете. Мы покажем, что эти векторы имеют правильный непрерывный предел. Мы также получим явное представление для матрицы монодромии в виде ряда, зависящего от локальных бозонных полей. Используя это представление, мы сможем вывести асимптотическое разложение матрицы монодромии по спектральному параметру и тем самым найдем нулевые моды.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы описываем общую схему алгебраического анзаца Бете, даем определение векторов Бете в $GL(3)$ -инвариантных моделях и приводим их представление в мультикомпозиционной модели. Раздел 3 посвящен краткому описанию модели ДКБГ. В разделе 4 дается решеточная аппроксимация модели ДКБГ в рамках вложенного алгебраического анзаца Бете. В разделе 5 рассматривается непрерывный предел векторов Бете решеточной модели. В разделе 6 мы выводим представление в виде ряда для матрицы монодромии модели ДКБГ. С помощью этого представления мы находим антиморфизм между бозонными полями в разделе 7, а также нулевые моды матрицы монодромии в разделе 8. В заключении обсуждается дальнейшее применение полученных результатов.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАЦ БЕТЕ

В этом разделе мы описываем абстрактную схему алгебраического анзаца Бете, которая справедлива для широкого класса квантовых интегрируемых моделей [15]–[17]. Основными объектами алгебраического анзаца Бете являются матрица монодромии и R -матрица. Модели, которые рассматриваются ниже, описываются $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей [18], [19], действующей в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$ двух вспомогательных пространств $V_k \sim \mathbb{C}^3$, $k = 1, 2$:

$$R(x, y) = \mathbf{I} + g(x, y)\mathbf{P}, \quad g(x, y) = \frac{c}{x - y}. \quad (2.1)$$

В этом определении $\mathbf{I}$ – единичная матрица в пространстве $V_1 \otimes V_2$, $\mathbf{P}$ – матрица перестановки, которая переставляет V_1 и V_2 , а c – некоторая константа.

Матрица монодромии $T(w)$ удовлетворяет алгебре

$$R_{12}(w_1, w_2)T_1(w_1)T_2(w_2) = T_2(w_2)T_1(w_1)R_{12}(w_1, w_2). \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) имеет место в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ является гильбертовым пространством гамильтониана рассматриваемой модели. Матрицы $T_k(w)$ нетривиально действуют в пространствах $V_k \otimes \mathcal{H}$. Будем предполагать, что пространство $\mathcal{H}$ содержит псевдовакуумный вектор $|0\rangle$. Аналогично, пусть дуальное пространство $\mathcal{H}^*$ содержит дуальный псевдовакуумный вектор $\langle 0|$. Эти векторы уничтожаются операторами $T_{ij}(w)$, где $i > j$ для $|0\rangle$ и $i < j$ для $\langle 0|$. В то же время оба вектора являются собственными для диагональных матричных элементов матрицы монодромии:

$$T_{ii}(w)|0\rangle = \lambda_i(w)|0\rangle, \quad \langle 0|T_{ii}(w) = \lambda_i(w)\langle 0|, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

где $\lambda_i(w)$ суть некоторые скалярные функции. В рамках общей схемы алгебраического анзаца Бете функции $\lambda_i(w)$ остаются свободными функциональными параметрами. На самом деле матрицу монодромии всегда можно нормировать условием $T(w) \rightarrow \lambda_2^{-1}(w)T(w)$, чтобы иметь дело только с отношениями

$$r_1(w) = \frac{\lambda_1(w)}{\lambda_2(w)}, \quad r_3(w) = \frac{\lambda_3(w)}{\lambda_2(w)}. \quad (2.4)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\lambda_2(w) = 1$.

След матрицы монодромии $\text{tr} T(w)$ во вспомогательном пространстве $V \sim \mathbb{C}^3$ называется трансфер-матрицей. Она является производящим функционалом для гамильтониана и всех интегралов движения данной модели.

2.1. Обозначения. Мы используем те же обозначения и соглашения, что и в работах [20], [21]. Помимо функции $g(x, y)$, мы также введем функцию $f(x, y)$:

$$f(x, y) = 1 + g(x, y) = \frac{x - y + c}{x - y}. \quad (2.5)$$

Множества переменных обозначаются чертой: $\bar{w}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ и т. п. Отдельные элементы множеств обозначаются нижними индексами w_j , u_k и т. п. Запись $\bar{u}_i$, означает $\bar{u} \setminus u_i$ и т. п. Мы также будем рассматривать разбиения множеств на непересекающиеся подмножества, при этом будем обозначать операцию разбиения символом $\Rightarrow$. Подмножества обозначаются верхними индексами в круглых скобках: $\bar{u}^{(j)}$. Например, запись $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}\}$ означает, что множество $\bar{u}$ разделено на два непересекающихся подмножества $\bar{u}^{(1)}$ и $\bar{u}^{(2)}$, так что $\bar{u}^{(1)} \cap \bar{u}^{(2)} = \emptyset$ и $\{\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}\} = \bar{u}$.

Дабы избежать слишком громоздких формул, мы используем сокращенную запись для произведений операторов или функций, зависящих от одной или двух переменных. А именно, если операторы T_{ij} или функции r_k (2.4) зависят от набора переменных, то это означает, что следует взять произведение по соответствующему набору. Например,

$$T_{ij}(\bar{u}) = \prod_{u_k \in \bar{u}} T_{ij}(u_k), \quad r_3(\bar{u}^{(1)}) = \prod_{u_j \in \bar{u}^{(1)}} r_3(u_j). \quad (2.6)$$

Аналогичное соглашение будет применяться к произведениям функций $f(x, y)$:

$$f(z, \bar{w}_i) = \prod_{\substack{w_j \in \bar{w}, \\ w_j \neq w_i}} f(z, w_j), \quad f(\bar{u}, \bar{v}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} \prod_{v_k \in \bar{v}} f(u_j, v_k). \quad (2.7)$$

2.2. Векторы Бете. Собственные векторы трансфер-матрицы принято называть *on-shell* векторами Бете (или просто *on-shell* векторами). Чтобы их найти, нужно сначала построить векторы Бете общего вида. В рамках алгебраического анзаца Бете векторы Бете общего вида являются полиномами от операторов T_{ij} при $i < j$, которые действуют на псевдовакуумный вектор. Мы будем обозначать их как $\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$, подчеркивая тем самым, что они параметризуются двумя наборами комплексных параметров $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_a\}$ и $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_b\}$, где $a, b = 0, 1, \dots$. В работах [22]–[25] были найдены различные представления для векторов Бете. Приведем здесь одно из них, полученное в работе [25]:

$$\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \frac{K_n(\bar{v}^{(1)} | \bar{u}^{(1)})}{f(\bar{v}, \bar{u})} f(\bar{v}^{(2)}, \bar{v}^{(1)}) f(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}) T_{13}(\bar{v}^{(1)}) T_{23}(\bar{v}^{(2)}) T_{12}(\bar{u}^{(2)}) | 0 \rangle. \quad (2.8)$$

Здесь суммы берутся по разбиениям множеств $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}\}$ и $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}^{(1)}, \bar{v}^{(2)}\}$, причем $0 \leq \# \bar{u}^{(1)} = \# \bar{v}^{(1)} = n \leq \min(a, b)$. Напомним, что запись $T_{13}(\bar{u}^{(1)})$ (и аналогичные) означает произведение операторов $T_{13}(u)$ по подмножеству $\bar{u}^{(1)}$. И, наконец, $K_n(\bar{v}^{(1)} | \bar{u}^{(1)})$ есть статистическая сумма шестивершинной модели с граничным условием типа доменной стенки [26]. Явное представление для нее было найдено в работе [27]:

$$K_n(\bar{x} | \bar{y}) = \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n} g(x_j, x_k) g(y_k, y_j) \right) \frac{f(\bar{x}, \bar{y})}{g(\bar{x}, \bar{y})} \det_n \left(\frac{g^2(x_j, y_k)}{f(x_j, y_k)} \right). \quad (2.9)$$

В частном случае $K_1(x | y) = g(x, y)$.

Вектор Бете общего вида становится *on-shell* вектором, если параметры $\bar{u}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений Бете

$$\begin{aligned} r_1(u_i) &= \frac{f(u_i, \bar{u}_i)}{f(\bar{u}_i, u_i)} f(\bar{v}, u_i), & i &= 1, \dots, a, \\ r_3(v_j) &= \frac{f(\bar{v}_j, v_j)}{f(v_j, \bar{v}_j)} f(v_j, \bar{u}), & j &= 1, \dots, b. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Напомним, что $\bar{u}_i = \bar{u} \setminus u_i$ и $\bar{v}_j = \bar{v} \setminus v_j$.

2.3. Мультикомпозиционная модель. Исследование свойств локальных операторов в рамках алгебраического анзаца Бете осуществляется с помощью композитной модели [14]. Допустим, что мы имеем решеточную модель, состоящую из N узлов. Тогда матрица монодромии $T(u)$ является произведением локальных L -операторов:

$$T(u) = L_N(u) \dots L_1(u). \quad (2.11)$$

Зафиксируем некоторый произвольный узел с номером m , $1 \leq m \leq N$. Тогда равенство (2.11) можно записать как

$$T(u) = T^{(2)}(u) T^{(1)}(u), \quad (2.12)$$

где

$$T^{(1)}(u) = L_m(u) \dots L_1(u), \quad T^{(2)}(u) = L_N(u) \dots L_{m+1}(u). \quad (2.13)$$

Представление (2.12) определяет композитную модель. В рамках композитной модели исходная матрица монодромии $T(u)$ называется полной матрицей монодромии, а матрицы $T^{(2)}(u)$ и $T^{(1)}(u)$ называются парциальными матрицами монодромии. Матричные элементы парциальных матриц монодромии $T^{(1)}(u)$ и $T^{(2)}(u)$ действуют в пространствах $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$, которые связаны соответственно с решеточными интервалами $[1, m]$ и $[m+1, N]$. Матричные элементы полной матрицы монодромии действуют в пространстве состояний $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$.

В методе алгебраического анзаца Бете предполагается, что в пространствах $\mathcal{H}^{(1)}$ и $\mathcal{H}^{(2)}$ существуют псевдовакуумные векторы $|0\rangle^{(k)}$, $k = 1, 2$, такие что $|0\rangle = |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(2)}$. Свойства этих векторов аналогичны свойствам (2.3):

$$T_{ij}^{(k)}(u)|0\rangle^{(k)} = 0, \quad i > j, \quad T_{ii}^{(k)}(u)|0\rangle^{(k)} = \lambda_i^{(k)}(u)|0\rangle^{(k)}, \quad k = 1, 2. \quad (2.14)$$

Как и в равенствах (2.4), введем отношения

$$r_1^{(k)}(w) = \frac{\lambda_1^{(k)}(w)}{\lambda_2^{(k)}(w)}, \quad r_3^{(k)}(w) = \frac{\lambda_3^{(k)}(w)}{\lambda_2^{(k)}(w)}, \quad k = 1, 2. \quad (2.15)$$

В силу нормировки $\lambda_2(u) = 1$ мы всегда можем положить $\lambda_2^{(k)}(u) = 1$. В дальнейшем мы также распространим соглашение (2.6) на произведения функций (2.15).

Для каждой парциальной матрицы монодромии $T^{(k)}(u)$ можно построить соответствующие парциальные векторы Бете $\mathbb{B}_{a,b}^{(k)}(\bar{u}; \bar{v})$. Они задаются равенством (2.8), в котором следует заменить все $T_{ij}(u)$ на $T_{ij}^{(k)}(u)$ и $|0\rangle$ на $|0\rangle^{(k)}$. Основная проблема, которая рассматривается в рамках композитной модели, состоит в том, чтобы выразить полные векторы Бете $\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$ через парциальные $\mathbb{B}_{a,b}^{(k)}(\bar{u}; \bar{v})$. Эта задача была решена в работе [14] для моделей, основанных на группе $GL(2)$. Более общий случай $GL(N)$ -инвариантных моделей рассматривался в работах [22], [28]. Частный случай $GL(3)$ -инвариантных моделей изучался в работе [29], где было найдено следующее представление:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) &= \sum r_1^{(2)}(\bar{u}^{(1)}) r_3^{(1)}(\bar{v}^{(2)}) \times \\ &\times \frac{f(\bar{u}^{(2)}, \bar{u}^{(1)}) f(\bar{v}^{(2)}, \bar{v}^{(1)})}{f(\bar{v}^{(2)}, \bar{u}^{(1)})} \mathbb{B}_{a_1, b_1}^{(1)}(\bar{u}^{(1)}; \bar{v}^{(1)}) \mathbb{B}_{a_2, b_2}^{(2)}(\bar{u}^{(2)}; \bar{v}^{(2)}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь сумма берется по всевозможным разбиениям $\bar{u} \Rightarrow \{\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}\}$ и $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}^{(1)}, \bar{v}^{(2)}\}$. Нижние индексы парциальных векторов Бете указывают на количества элементов в подмножествах.

Аналогично можно определить мультикомпозиционную модель, в которой исходный интервал разделен на $M > 2$ интервалов:

$$T(u) = T^{(M)}(u) \dots T^{(1)}(u). \quad (2.17)$$

Для каждого из этих интервалов мы можем определить парциальные векторы Бете $\mathbb{B}_{a_j, b_j}^{(j)}$. Тогда полный вектор Бете выражается через парциальные следующим

образом:

$$\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \left\{ \prod_{1 \leq k < j \leq M} \left[r_1^{(j)}(\bar{u}^{(k)}) r_3^{(k)}(\bar{v}^{(j)}) \frac{f(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(k)}) f(\bar{v}^{(j)}, \bar{v}^{(k)})}{f(\bar{v}^{(j)}, \bar{u}^{(k)})} \right] \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^M \mathbb{B}_{a_j, b_j}^{(j)}(\bar{u}^{(j)}; \bar{v}^{(j)}) \right\}. \quad (2.18)$$

Здесь функции $r_1^{(j)}(u)$ и $r_3^{(j)}(v)$ являются вакуумными собственными значениями соответственно операторов $T_{11}^{(j)}(u)$ и $T_{33}^{(j)}(v)$. Сумма в формуле (2.18) берется по всем возможным разбиениям

$$\begin{aligned} \bar{u} &\Rightarrow \{\bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{u}^{(M)}\}, & \# \bar{u}^{(j)} &= a_j, & a_1 + \dots + a_M &= a, \\ \bar{v} &\Rightarrow \{\bar{v}^{(1)}, \dots, \bar{v}^{(M)}\}, & \# \bar{v}^{(j)} &= b_j, & b_1 + \dots + b_M &= b. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Важно подчеркнуть, что количество парциальных матриц монодромии M никак не связано с количеством параметров Бете a и b . В частности, можно рассматривать случай $M > a$ и $M > b$. Тогда некоторые из чисел a_j и b_j равны нулю, т.е. соответствующие подмножества пусты.

Формулу (2.18) легко доказать индукцией по M . В самом деле, предполагая, что она верна для $M - 1$ парциальных матриц монодромии, мы применяем к парциальному вектору $\mathbb{B}_{a_{M-1}, b_{M-1}}^{(M-1)}(\bar{u}^{(M-1)}; \bar{v}^{(M-1)})$ равенство (2.16). Это немедленно дает нам формулу (2.18) для M парциальных матриц монодромии.

В частных случаях $a = 0$ или $b = 0$ мы воспроизводим известные формулы для векторов Бете в $GL(2)$ -инвариантной мультикомпозиционной модели [30], [31]. К примеру,

$$\mathbb{B}_{a,0}(\bar{u}, \emptyset) \equiv \mathbb{B}_a(\bar{u}) = \sum \prod_{1 \leq k < j \leq M} \{r_1^{(j)}(\bar{u}^{(k)}) f(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(k)})\} \prod_{j=1}^M \mathbb{B}_{a_j}^{(j)}(\bar{u}^{(j)}). \quad (2.20)$$

Введение мультикомпозиционной модели является удобным способом выразить векторы Бете через локальные операторы. В следующем пункте мы рассмотрим этот метод более подробно.

2.4. Векторы Бете в $SU(2)$ -инвариантной XXX-цепочке. В качестве первого применения мультикомпозиционной модели построим векторы Бете в неоднородной $SU(2)$ -инвариантной XXX-цепочке. В дальнейшем мы воспользуемся этим результатом в разделе 3 для описания векторов Бете модели ДКБГ.

Рассмотрим неоднородную XXX-цепочку, состоящую из M узлов. Матрица монодромии $T^{(xxx)}(u)$ этой модели имеет размер 2×2 , поэтому векторы Бете параметризуются только одним набором переменных, например $\bar{u}$. Соответственно, рассматривая мультикомпозиционную модель, следует пользоваться формулой (2.20).

Матрица монодромии определяется как произведение локальных L -операторов:

$$T^{(xxx)}(u) = L_M^{(xxx)}(u - \xi_M) \dots L_1^{(xxx)}(u - \xi_1), \quad (2.21)$$

где ξ_k суть неоднородности и

$$L_n^{(xxx)}(u) = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u + \frac{c}{2}(1 + \sigma_n^z) & c\sigma_n^- \\ c\sigma_n^+ & u + \frac{c}{2}(1 - \sigma_n^z) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Здесь σ_n^z и $\sigma_n^\pm$ – операторы спина $1/2$, действующие в n -м узле цепочки. Они задаются стандартными матрицами Паули, которые действуют в n -й копии тензорного произведения $(\mathbb{C}^2)^{\otimes M}$. Вектор псевдовакуума представляет собой состояние со всеми спинами вверх,

$$|\tilde{0}\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_M \otimes \cdots \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_1. \quad (2.23)$$

Векторы Бете, имеющие a спинов вниз и $M - a$ спинов вверх, записываются как

$$\mathbb{B}_a^{(xxx)}(\bar{u}) = \sum_{M \geq j_a > \cdots > j_1 \geq 1} \Omega_{j_1, \dots, j_a}^{(a, M)}(\bar{u}; \bar{\xi}) \prod_{m=1}^a \sigma_{j_m}^- |\tilde{0}\rangle. \quad (2.24)$$

где $\Omega_{j_1, \dots, j_a}^{(a, M)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ – некоторые коэффициенты, которые зависят от параметров Бете $\bar{u}$ и неоднородностей $\bar{\xi}$. Найдем явный вид этих коэффициентов.

Рассмотрим мультикомпозиционную модель, состоящую из M парциальных матриц монодромии $T^{(j)}$. Это означает, что каждая матрица $T^{(j)}$ совпадает с L -оператором $L_j(u - \xi_j)$. Тогда каждый парциальный вектор Бете $\mathbb{B}_{a_j}^{(j)}(\bar{u}^{(j)})$ в формуле (2.20) соответствует j -му узлу цепочки, поэтому в силу (2.22) мы получим

$$\mathbb{B}_{a_j}^{(j)}(\bar{u}^{(j)}) = g(\bar{u}^{(j)}, \xi_j)(\sigma_j^-)^{a_j} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j. \quad (2.25)$$

Очевидно, что $\mathbb{B}_{a_j}^{(j)}$ обращается в ноль при $a_j > 1$, поскольку $(\sigma_j^-)^2 = 0$. Таким образом, мы приходим к выводу, что $a_j \leq 1$, и подмножества $\bar{u}^{(j)}$ либо пусты, либо состоят из одного элемента. Пусть подмножества $\bar{u}^{(j_k)}$, $k = 1, \dots, a$, соответствующие узлам решетки с номерами $j_1, \dots, j_a$, содержат один элемент u_k , в то время как остальные подмножества пусты. Тогда сумма по разбиениям набора $\bar{u}$ превращается в сумму по перестановкам в наборе $\bar{u}$ и сумму по узлам решетки $j_1, \dots, j_a$ при условии $j_a > \cdots > j_1$.

Легко видеть, что

$$\frac{u - \xi_j + \frac{c}{2}(1 + \sigma_j^z)}{u - \xi_j} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j = f(u, \xi_j) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j, \quad \frac{u - \xi_j + \frac{c}{2}(1 - \sigma_j^z)}{u - \xi_j} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j \quad (2.26)$$

и, следовательно,

$$r_1^{(j)}(u) = f(u, \xi_j). \quad (2.27)$$

Тогда формула (2.20) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_a^{(xxx)}(\bar{u}) &= \text{Sym}_{\bar{u}} \prod_{1 \leq k < j \leq a} f(u_j, u_k) \times \\ &\times \sum_{M \geq j_a > \cdots > j_1 \geq 1} \prod_{k=1}^a \left[\left(\prod_{m=j_k+1}^M f(u_k, \xi_m) \right) g(u_k, \xi_{j_k}) \sigma_{j_k}^- \right] |\tilde{0}\rangle, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где символ Sym означает симметризацию (т. е. сумму по перестановкам) по набору, который указан в нижнем индексе. В формуле (2.28) симметризация действует на все выражение, зависящее от $\bar{u}$. Сравнивая представления (2.28) и (2.24), мы видим, что

$$\Omega_{j_1, \dots, j_a}^{(a, M)}(\bar{u}; \bar{\xi}) = \text{Sym}_{\bar{u}} \prod_{1 \leq k < j \leq a} f(u_j, u_k) \prod_{k=1}^a \left[\left(\prod_{m=j_k+1}^M f(u_k, \xi_m) \right) g(u_k, \xi_{j_k}) \right]. \quad (2.29)$$

В однородном пределе $\xi_k = c/2$ это выражение совпадает с амплитудой вектора Бете, которая возникает в представлении координатного анзаца Бете (см. монографию [6]).

3. ДВУХКОМПОНЕНТНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ

Мы рассматриваем модель ДКБГ на конечном интервале $[0, L]$ с периодическими граничными условиями. Вторично квантованный гамильтониан модели имеет вид

$$H = \int_0^L (\partial_x \Psi_\alpha^\dagger \partial_x \Psi_\alpha + \varkappa \Psi_\alpha^\dagger \Psi_\beta^\dagger \Psi_\beta \Psi_\alpha) dx, \quad (3.1)$$

где $\varkappa > 0$ – константа связи, $\alpha, \beta = 1, 2$ и по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование. Бозонные поля $\Psi_\alpha(x)$ и $\Psi_\alpha^\dagger(x)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(y)] = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - y). \quad (3.2)$$

Константа связи $\varkappa$ связана с константой c в формуле (2.1) соотношением $\varkappa = ic$.

Базис в пространстве Фока данной модели строится с помощью действия операторов $\Psi_\alpha^\dagger(x)$ на фоковский вакуум $|0\rangle$, который определяется условиями

$$\Psi_\alpha(x)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\Psi_\alpha^\dagger(x) = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (3.3)$$

Отметим, что в случае модели ДКБГ вектор псевдовакуума (2.3) совпадает с фоковским вакуумом $|0\rangle$, поэтому мы используем для них одно и то же обозначение.

Спектр модели ДКБГ был найден в работе [3] (см. также статьи [4], [6]). Собственные векторы гамильтониана можно найти в два этапа. Пользуясь терминологией алгебраического анзаца Бете, можно сказать, что на первом этапе надо построить вектор Бете общего вида $\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$. В модели ДКБГ векторы Бете существуют при условии $a \leq b$. Они имеют следующий вид¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = & \sum_{b \geq k_a > \dots > k_1 \geq 1} \int_{\mathcal{D}} dz_1 \dots dz_b \chi_{k_1, \dots, k_a}(z_1, \dots, z_b | \bar{u}, \bar{v}) \times \\ & \times \prod_{m=1}^a \Psi_1^\dagger(z_{k_m}) \prod_{\substack{\ell=1, \\ \ell \notin \{k_1, \dots, k_m\}}}^b \Psi_2^\dagger(z_\ell) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь область интегрирования имеет вид $\mathcal{D} = \{L > z_b > \dots > z_1 > 0\}$. Волновая функция $\chi_{k_1, \dots, k_a}(z_1, \dots, z_b | \bar{u}, \bar{v})$ в этой области равна

$$\begin{aligned} \chi_{k_1, \dots, k_a}(z_1, \dots, z_b | \bar{u}, \bar{v}) = \\ = \text{Sym}_{\bar{v}} \Omega_{k_1, \dots, k_a}^{(a,b)}(\bar{u}; \bar{v} + c) \prod_{b \geq j > k \geq 1} f(v_j, v_k) \prod_{k=1}^b e^{iz_k v_k} \Big|_{c=-i\varkappa}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где коэффициенты $\Omega_{k_1, \dots, k_a}^{(a,b)}(\bar{u}; \bar{v} + c)$ заданы равенством (2.29).

¹⁾Здесь и в дальнейшем во всех формулах для собственных векторов мы не заботимся об их нормировке.

Вектор Бете общего вида (3.4) становится собственным вектором гамильтониана (3.1), если параметры $\bar{u}$ и $\bar{v}$ удовлетворяют системе уравнений Бете (2.10). В модели ДКБГ она выглядит следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} e^{iLv_j} &= \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^b \frac{v_j - v_k + i\kappa}{v_j - v_k - i\kappa} \prod_{\ell=1}^a \frac{u_\ell - v_j + i\kappa}{u_\ell - v_j}, \quad j = 1, \dots, b, \\ 1 &= \prod_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq j}}^a \frac{u_i - u_\ell - i\kappa}{u_i - u_\ell + i\kappa} \prod_{k=1}^b \frac{v_k - u_i - i\kappa}{v_k - u_i}, \quad i = 1, \dots, a. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Сравнивая эту систему с системой (2.10), мы заключаем, что в случае модели ДКБГ $r_1(u) = 1$ и $r_3(u) = e^{iLu}$.

4. РЕШЕТОЧНЫЙ ДВУХКОМПОНЕНТНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ

Квантовые системы, описываемые $GL(3)$ -инвариантной R -матрицей (2.1), рассматривались в работе [8]. В этой работе был найден прототип решеточного L -оператора модели ДКБГ. Он имеет следующий вид:

$$L^{(a)}(u) = u\mathbf{1} + p, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица и

$$p = \begin{pmatrix} a_1^\dagger a_1 & a_1^\dagger a_2 & ia_1^\dagger \sqrt{m + \rho} \\ a_2^\dagger a_1 & a_2^\dagger a_2 & ia_2^\dagger \sqrt{m + \rho} \\ i\sqrt{m + \rho} a_1 & i\sqrt{m + \rho} a_2 & -m - \rho \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь m является произвольным комплексным числом и $\rho = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2$. Операторы a_k и $a_k^\dagger$, $k = 1, 2$, действуют в пространстве Фока с фоковским вакуумом $|0\rangle$: $a_k|0\rangle = 0$. Они удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям алгебры Гейзенберга $[a_i, a_k^\dagger] = \delta_{ik}$.

L -оператор (4.1) удовлетворяет алгебре (2.2) с R -матрицей (2.1) при $c = -1$. Исходя из L -оператора (4.1) можно построить квантовую систему дискретных бозонов. Чтобы получить непрерывную квантовую систему, следует сделать несколько преобразований формулы (4.1). Прежде всего мы введем операторы

$$\psi_k = \Delta^{-1/2} a_k, \quad \psi_k^\dagger = \Delta^{-1/2} a_k^\dagger, \quad k = 1, 2, \quad (4.3)$$

так что

$$[\psi_j, \psi_k^\dagger] = \frac{\delta_{jk}}{\Delta}. \quad (4.4)$$

В этих формулах Δ является шагом решетки. Полагая $m = 4/\kappa\Delta$, мы определяем новый L -оператор как

$$L(u) = \frac{\kappa\Delta}{2} L^{(a)}\left(\frac{u + 2i/\Delta}{i\kappa}\right) \cdot J, \quad (4.5)$$

где $J = \text{diag}(1, 1, -1)$. Очевидно, что $L(u)$ удовлетворяет RTT -соотношению (2.2) с R -матрицей (2.1) при $c = -i\kappa$.

Последнее преобразование состоит в том, чтобы создать N копий L_n , $n = 1, \dots, N$, L -оператора (4.5), сделав замены $\psi_k \rightarrow \psi_k(n)$ и $\psi_k^\dagger \rightarrow \psi_k^\dagger(n)$ с условиями

$$[\psi_j(n), \psi_k^\dagger(m)] = \frac{\delta_{jk}\delta_{nm}}{\Delta}. \quad (4.6)$$

Операторы $\psi_k(n)$ и $\psi_k^\dagger(n)$ являются решеточными приближениями бозонных полей $\Psi_k(x)$ и $\Psi_k^\dagger(x)$. Действительно, разделим интервал $[0, L]$ на N промежутков длины Δ . Полагая $x_n = n\Delta$ и

$$\psi_k(n) = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \Psi_k(x) dx, \quad \psi_k^\dagger(n) = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \Psi_k^\dagger(x) dx, \quad (4.7)$$

мы воспроизводим коммутационные соотношения (4.6). С другой стороны, очевидно, что в пределе $\Delta \rightarrow 0$ операторы (4.7) переходят в бозонные поля²⁾ $\Psi_k(x)$ и $\Psi_k^\dagger(x)$.

Теперь мы можем определить матрицу монодромии стандартным образом:

$$T(u) = L_N(u) \dots L_1(u), \quad (4.8)$$

где

$$L_n(u) = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{iu\Delta}{2} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi_1^\dagger(n)\psi_1(n) & \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi_1^\dagger(n)\psi_2(n) & -i\Delta\psi_1^\dagger(n)Q_n \\ \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi_2^\dagger(n)\psi_1(n) & 1 - \frac{iu\Delta}{2} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi_2^\dagger(n)\psi_2(n) & -i\Delta\psi_2^\dagger(n)Q_n \\ i\Delta Q_n\psi_1(n) & i\Delta Q_n\psi_2(n) & 1 + \frac{iu\Delta}{2} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\hat{\rho}_n \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

и

$$\mathcal{N} = 1 - \frac{iu\Delta}{2}, \quad Q_n = \left(\varkappa + \frac{\varkappa^2\Delta^2}{4}\hat{\rho}_n \right)^{1/2}, \quad (4.10)$$

$$\hat{\rho}_n = \psi_1^\dagger(n)\psi_1(n) + \psi_2^\dagger(n)\psi_2(n).$$

Нормировочный множитель $\mathcal{N}$ в формуле (4.9) выбран так, чтобы удовлетворить условию $\lambda_2(u) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы пишем номер узла решетки n в качестве аргумента операторов ψ_i и $\psi_i^\dagger$. Традиционно этот номер обозначают нижним индексом операторов ψ_i и $\psi_i^\dagger$, но в случае модели ДКБГ это неудобно.

L -оператор (4.9) является естественным обобщением L -оператора $\tilde{L}_n(u)$ размера 2×2 , который был построен в работе [32] для решеточной модели однокомпонентных бозонов,

$$\tilde{L}_n(u) = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{iu\Delta}{2} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi^\dagger(n)\psi(n) & -i\Delta\psi^\dagger(n)Q_n \\ i\Delta Q_n\psi(n) & 1 + \frac{iu\Delta}{2} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi^\dagger(n)\psi(n) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Легко видеть, что L -оператор (4.11) является правым нижним (2×2) -минором матрицы (4.9), если в ней положить $\psi_1(n) \equiv 0$, $\psi_2(n) \equiv \psi(n)$. В работах [33]–[35]

²⁾Здесь и в дальнейшем все пределы от операторнозначных выражений следует понимать в слабом смысле.

с использованием различных методов было показано, что в непрерывном пределе $\Delta \rightarrow 0$ L -оператор (4.11) описывает модель однокомпонентных бозонов с дельтаобразным взаимодействием. Нам нужно решить аналогичную задачу: проверить, что модель, заданная матрицей монодромии (4.8) и L -оператором (4.9), в непрерывном пределе действительно описывает модель ДКБГ. Для этого мы найдем векторы Бете решеточной модели (4.8) и покажем, что в непрерывном пределе они совпадают с состояниями (3.5).

Отметим несколько свойств L -оператора (4.9). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (L_n(u))_{11}|0\rangle &= (L_n(u))_{22}|0\rangle = |0\rangle, & (L_n(u))_{33}|0\rangle &= r_0(u)|0\rangle; \\ (L_n(u))_{12}|0\rangle &= 0, & \langle 0|(L_n(u))_{21} &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$r_0(u) = \frac{1 + iu\Delta/2}{1 - iu\Delta/2}. \quad (4.13)$$

Пользуясь этими свойствами, легко получить соотношения

$$\begin{aligned} r_1(u) &= 1, & r_3(u) &= r_0^N(u), \\ T_{12}(u)|0\rangle &= 0, & \langle 0|T_{21}(u) &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Отметим, что действия операторов $T_{12}(u)$ и $T_{21}(u)$ во второй строке формул (4.14) на самом деле вытекают из условия $r_1(u) = 1$. Действительно, из RTT -соотношения (2.2) следует, что

$$[T_{21}(v), T_{12}(u)] = g(v, u)(T_{11}(u)T_{22}(v) - T_{11}(v)T_{22}(u)). \quad (4.15)$$

Действуя этим равенством, например, на вектор $|0\rangle$ с учетом условия $r_1(u) = 1$, мы получим

$$\begin{aligned} [T_{21}(v), T_{12}(u)]|0\rangle &= T_{21}(v)T_{12}(u)|0\rangle = \\ &= g(v, u)(T_{11}(u)T_{22}(v) - T_{11}(v)T_{22}(u))|0\rangle = (r_1(u) - r_1(v))|0\rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Аналогично, действуя равенством (4.15) на $\langle 0|$, мы получим $\langle 0|T_{21}(u) = 0$.

Условие $T_{12}(u)|0\rangle = 0$ приводит к упрощению явной формулы для вектора Бете (2.8). Очевидно, что в этом случае следует рассматривать только такие разбиения набора $\bar{u}$, для которых $\bar{u}^{(2)} = \emptyset$, и $\bar{u}^{(1)} = \bar{u}$. Тогда формула (2.8) переходит в

$$\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \frac{\mathbf{K}_a(\bar{v}^{(1)}|\bar{u})}{f(\bar{v}, \bar{u})} f(\bar{v}^{(2)}, \bar{v}^{(1)}) T_{13}(\bar{v}^{(1)}) T_{23}(\bar{v}^{(2)})|0\rangle. \quad (4.17)$$

Здесь сумма берется по разбиениям только одного набора $\bar{v} \Rightarrow \{\bar{v}^{(1)}, \bar{v}^{(2)}\}$ при условии $\# \bar{v}^{(1)} = a$. Очевидно, что последнее ограничение может быть удовлетворено тогда и только тогда, когда $a \leq b$. Следовательно, если $a > b$, то $\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = 0$. В частных случаях имеем

$$\mathbb{B}_{0,1}(\emptyset; v) = T_{23}(v)|0\rangle, \quad \mathbb{B}_{1,1}(u; v) = \frac{g(v, u)}{f(v, u)} T_{13}(v)|0\rangle. \quad (4.18)$$

В заключение этого раздела мы приведем две формулы, которые связаны с переходом к непрерывному пределу $\Delta \rightarrow 0$. Первая формула дает предел степеней функции $r_0(u)$:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} r_0^n(u) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1 + iu\Delta/2}{1 - iu\Delta/2} \right)^{x_n/\Delta} = e^{iu x_n}. \quad (4.19)$$

Вторая формула описывает типичную процедуру перехода к непрерывному пределу в суммах по узлам решетки. Пусть $\Phi(x)$ – интегрируемая функция на интервале $[0, L]$. Тогда

$$\Delta \sum_{j=1}^N \Phi(x_j) \psi^\dagger(j) = \sum_{j=1}^N \Phi(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Psi_k^\dagger(x) dx \rightarrow \int_0^L \Phi(x) \Psi_k^\dagger(x) dx, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

и мы напоминаем, что все пределы операторнозначных выражений должны пониматься в слабом смысле. Таким образом, мы можем сформулировать общее правило: сумма по узлам решетки, умноженная на Δ , в непрерывном пределе переходит в интеграл. Легко видеть, что если мы имеем m -кратную сумму по узлам решетки, умноженную на Δ^m , то в непрерывном пределе она переходит в m -кратный интеграл.

5. ВЕКТОРЫ БЕТЕ В ТЕРМИНАХ ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим мультикомпозиционную модель с полной матрицей монодромии (4.8). Пусть количество M парциальных матриц монодромии совпадает с числом узлов N . Тогда каждая парциальная матрица монодромии $T^{(n)}(u)$ является L -оператором $L_n(u)$ (4.9). Соответственно мы имеем

$$r_1^{(k)}(u) = 1, \quad r_3^{(k)}(v) = r_0(v). \quad (5.1)$$

Формула для полного вектора Бете (2.18) принимает вид

$$\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum \prod_{j=1}^N r_0^{j-1}(\bar{v}^{(j)}) \prod_{1 \leq k < j \leq N} \frac{f(\bar{u}^{(j)}, \bar{u}^{(k)}) f(\bar{v}^{(j)}, \bar{v}^{(k)})}{f(\bar{v}^{(j)}, \bar{u}^{(k)})} \prod_{j=1}^N \mathbb{B}_{a_j, b_j}^{(j)}(\bar{u}^{(j)}; \bar{v}^{(j)}). \quad (5.2)$$

Это основная формула, которой мы будем пользоваться. Однако, перед тем как применить эту формулу к модели ДКБГ, полезно посмотреть, как она работает, на более простом примере однокомпонентного бозе-газа.

5.1. Однокомпонентный бозе-газ. L -оператор однокомпонентного бозе-газа дается формулой (4.11), однако для построения векторов Бете нам достаточно знать этот L -оператор только с точностью до членов порядка Δ :

$$\tilde{L}_n(u) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{iu\Delta}{2} & -i\Delta\sqrt{\kappa}\psi^\dagger(n) \\ i\Delta\sqrt{\kappa}\psi(n) & 1 + \frac{iu\Delta}{2} \end{pmatrix} + O(\Delta^2). \quad (5.3)$$

Напомним, что в данной формуле мы положили $\psi_2(n) \equiv \psi(n)$, $\psi_1(n) \equiv 0$ и аналогично для $\psi_k^\dagger(n)$. В непрерывном пределе эти операторы соответственно превращаются в бозонные поля $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$.

Векторы Бете однокомпонентного бозе-газа соответствуют частному случаю векторов $\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v})$ при $a = 0$ и $\bar{u} = \emptyset$. Тогда формула (5.2) принимает вид

$$\mathbb{B}_{0,b}(\emptyset; \bar{v}) \equiv \mathbb{B}_b(\bar{v}) = \sum_{j=1}^N \prod_{j=1}^N r_0^{j-1}(\bar{v}^{(j)}) \prod_{1 \leq k < j \leq N} f(\bar{v}^{(j)}, \bar{v}^{(k)}) \prod_{j=1}^N \mathbb{B}_{b_j}^{(j)}(\bar{v}^{(j)}). \quad (5.4)$$

Парциальный вектор Бете в узле с номером j есть

$$\mathbb{B}_{b_j}^{(j)}(\bar{v}^{(j)}) = (-i\Delta\sqrt{\kappa}\psi^\dagger(j))^{b_j}|0\rangle, \quad (5.5)$$

где мы опустили поправки порядка $O(\Delta^{b_j+1})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Напомним, что в мультикомпонентной модели полный вектор псевдовакуума $|0\rangle$ равен тензорному произведению парциальных псевдовакуумных векторов $|0\rangle^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$. Однако в случае однокомпонентного бозе-газа можно считать, что все операторы $\psi(j)$ и $\psi^\dagger(j)$ действуют в одном и том же фоковском пространстве. Очевидно, что в силу коммутативности $\psi(j)$ и $\psi^\dagger(k)$ при $j \neq k$ такое понимание эквивалентно исходному. В случае модели ДКБГ мы будем трактовать мультикомпонентную модель таким же образом.

Рассмотрим в качестве примера случай $b = 2$. В этом случае имеются две возможности:

- существует единственное значение $b_j = 2$, а все остальные $b_\ell = 0$, тогда подмножество $\bar{v}^{(j)}$ совпадает с исходным множеством $\{v_1, v_2\}$, в то время как все остальные подмножества $\bar{v}^{(\ell)}$ пусты;

- существуют два значения $b_j = 1$ и $b_k = 1$, а все остальные $b_\ell = 0$, тогда подмножества $\bar{v}^{(j)}$ и $\bar{v}^{(k)}$ состоят из одного элемента (скажем, $\bar{v}^{(j)} = v_2$ и $\bar{v}^{(k)} = v_1$, или наоборот), все остальные подмножества $\bar{v}^{(\ell)}$ пусты.

Рассмотрим первый случай. Обозначим соответствующий вклад в вектор Бете через $\mathbb{B}_{2,\emptyset}$. Тогда

$$\mathbb{B}_{2,\emptyset} = -\kappa\Delta^2 \sum_{j=1}^N (r_0(v_1)r_0(v_2))^{j-1} (\psi^\dagger(j))^2|0\rangle, \quad (5.6)$$

и в силу (4.19) мы получаем

$$\mathbb{B}_{2,\emptyset} = -\kappa\Delta^2 \sum_{j=1}^N e^{ix_j(v_1+v_2)} (\psi^\dagger(j))^2|0\rangle. \quad (5.7)$$

Данная сумма стремится к нулю, поскольку она содержит коэффициент Δ^2 . В самом деле, в силу (4.20) имеем

$$\Delta^2 \sum_{j=1}^N e^{ix_j(v_1+v_2)} (\psi^\dagger(j))^2|0\rangle \rightarrow \Delta \int_0^L e^{ix(v_1+v_2)} (\Psi^\dagger(x))^2 dx|0\rangle \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0. \quad (5.8)$$

Остается рассмотреть второй случай. Обозначим соответствующий вклад в вектор Бете через $\mathbb{B}_{1,1,\emptyset}$. Тогда

$$\mathbb{B}_{1,1,\emptyset} = -\kappa\Delta^2 \text{Sym}_{\bar{v}} \sum_{1 \leq k < j \leq N} r_0^{j-1}(v_2)r_0^{k-1}(v_1)f(v_2, v_1)\psi^\dagger(j)\psi^\dagger(k)|0\rangle \quad (5.9)$$

или, с учетом (4.19),

$$\mathbb{B}_{1,1,\emptyset} = -\varkappa \Delta^2 \text{Sym}_{\bar{v}} \sum_{1 \leq k < j \leq N} e^{ix_k v_1 + ix_j v_2} f(v_2, v_1) \psi^\dagger(j) \psi^\dagger(k) |0\rangle. \quad (5.10)$$

На этот раз мы снова имеем коэффициент Δ^2 , но сумма двойная. Поэтому ее предел конечен:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{B}_{1,1,\emptyset} = \mathbb{B}_2(\bar{v}) = -\varkappa \text{Sym}_{\bar{v}} f(v_2, v_1) \int_0^L dx_2 \int_0^{x_2} e^{ix_1 v_1 + ix_2 v_2} \Psi^\dagger(x_2) \Psi^\dagger(x_1) |0\rangle dx_1. \quad (5.11)$$

Из формул (5.4) и (5.5) становится ясно, что в общем случае произвольного b вектор Бете $\mathbb{B}_b(\bar{v})$ пропорционален Δ^b . В непрерывном пределе этот коэффициент должен быть компенсирован. Единственная возможность заработать такую компенсацию – это получить b -кратную сумму по узлам решетки. Тогда коэффициент Δ^b , умноженный на b -кратную сумму, дает b -кратный интеграл. Следовательно, нам надо рассматривать только такие разбиения множества $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_b\}$, которые сводятся к b -кратным суммам по узлам решетки. Очевидно, что это такие разбиения, в которых имеются ровно b непустых подмножеств. В этом случае каждое такое подмножество состоит из одной переменной. Таким образом, реально мы имеем дело с ситуацией, уже рассмотренной в п. 2.4. Поэтому сумма по разбиениям сводится к сумме по узлам решетки и сумме по перестановкам, т. е. к симметризации по набору $\bar{v}$.

Итак, в случае общего b мы имеем

$$\mathbb{B}_b(\bar{v}) = (-i\sqrt{\varkappa}\Delta)^b \text{Sym}_{\bar{v}} \prod_{b \geq j > k \geq 1} f(v_j, v_k) \sum_{j_b > \dots > j_1}^N \prod_{k=1}^b (r_0^{j_k-1}(v_k) \psi^\dagger(j_k)) |0\rangle \quad (5.12)$$

или же, частично беря непрерывный предел,

$$\mathbb{B}_b(\bar{v}) = (-i\sqrt{\varkappa}\Delta)^b \text{Sym}_{\bar{v}} \prod_{b \geq j > k \geq 1} f(v_j, v_k) \sum_{j_b > \dots > j_1}^N \prod_{k=1}^b (e^{ix_{j_k} v_k} \psi^\dagger(j_k)) |0\rangle. \quad (5.13)$$

Данная b -кратная сумма по узлам решетки стремится к b -кратному интегралу, и в конечном итоге мы приходим к равенству

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \mathbb{B}_b(\bar{v}) = (-i\sqrt{\varkappa})^b \text{Sym}_{\bar{v}} \prod_{b \geq j > k \geq 1} f(v_j, v_k) \int_{\mathcal{D}} \prod_{k=1}^b (e^{ix_k v_k} \Psi^\dagger(x_k)) |0\rangle dx_1 \dots dx_b, \quad (5.14)$$

где $\mathcal{D} = \{L > x_b > \dots > x_1 > 0\}$. Представление (5.14) совпадает с хорошо известным результатом для векторов Бете в координатном анзаце Бете [1], [2], [31]. Таким образом, мы построили векторы Бете в терминах локальных бозонных полей $\Psi^\dagger(x)$, начав с решеточного L -оператора (5.3).

5.2. Двухкомпонентный бозе-газ. Инфинитезимальный решеточный L -оператор модели ДКБГ имеет вид [7]

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{iu\Delta}{2} & 0 & -i\Delta\sqrt{\varkappa}\psi_1^\dagger(n) \\ 0 & 1 - \frac{iu\Delta}{2} & -i\Delta\sqrt{\varkappa}\psi_2^\dagger(n) \\ i\Delta\sqrt{\varkappa}\psi_1(n) & i\Delta\sqrt{\varkappa}\psi_2(n) & 1 + \frac{iu\Delta}{2} \end{pmatrix} + O(\Delta^2). \quad (5.15)$$

Мы вновь рассматриваем мультикомпозиционную модель, в которой количество парциальных матриц монодромии $T^{(n)}(u)$ равно количеству узлов решетки. Тогда каждая матрица $T^{(n)}(u)$ в такой модели совпадает с L -оператором (5.15). Прежде всего посмотрим, как векторы Бете зависят от Δ . В модели ДКБГ векторы Бете даются формулой (4.17). Легко видеть, что общее число операторов рождения T_{13} и T_{23} в формуле (4.17) равно b . В случае парциальных векторов Бете $\mathbb{B}_{a_j, b_j}^{(j)}(\bar{u}^{(j)}; \bar{v}^{(j)})$ мы имеем

$$T_{13}^{(j)}(w) = -i\Delta\sqrt{\varkappa}\psi_1^\dagger(j), \quad T_{23}^{(j)}(w) = -i\Delta\sqrt{\varkappa}\psi_2^\dagger(j). \quad (5.16)$$

Поэтому

$$\mathbb{B}_{a_j, b_j}^{(j)}(\bar{u}^{(j)}; \bar{v}^{(j)}) \sim \Delta^{b_j}, \quad \text{следовательно,} \quad \mathbb{B}_{a, b}(\bar{u}; \bar{v}) \sim \Delta^b. \quad (5.17)$$

Векторы Бете мультикомпозиционной модели ДКБГ даются формулой (5.2). Те же аргументы, которые использовались при рассмотрении модели однокомпонентного бозе-газа, позволяют нам сделать вывод, что мы должны рассматривать только такие разбиения набора $\bar{v}$, в которых имеются ровно b непустых подмножеств, состоящих из одного элемента. Тогда сумма по таким разбиениям набора $\bar{v}$ переходит в сумму по перестановкам в множестве $\bar{v}$ и b -кратную сумму по узлам решетки.

Посмотрим теперь, что происходит с разбиениями набора $\bar{u}$. В каждом парциальном векторе Бете $b_j \geq a_j$. Как было показано выше, все b_j равны либо нулю, либо единице. Если $b_j = 0$, то $a_j = 0$. Однако если $b_j = 1$, то либо $a_j = 1$, либо $a_j = 0$. В первом случае мы получаем парциальный вектор Бете вида $B_{1,1}^{(j)}$, во втором случае – парциальный вектор Бете вида $B_{0,1}^{(j)}$. Но, поскольку все непустые подмножества $\bar{u}^{(j)}$ состоят ровно из одного элемента, сумма по разбиениям набора $\bar{u}$ также переходит в сумму по перестановкам в множестве $\bar{u}$ и сумму по узлам решетки, в которых $a_j = 1$.

Таким образом, сумма в формуле (5.2) устроена следующим образом. Прежде всего мы должны выбрать набор J , состоящий из b чисел, $J = \{j_1, \dots, j_b\}$. Это будут номера узлов решетки, в которых $b_{j_k} = 1$. Во всех остальных узлах $b_j = 0$. Будем считать, что подмножество $\bar{v}^{(j_k)}$ состоит из одного элемента v_k . Выполняя симметризацию по $\bar{v}$ и суммируя по всем возможным j_k с условием $j_b > \dots > j_1$, мы таким образом воспроизводим сумму по разбиениям набора $\bar{v}$. Более точно, мы воспроизводим только такие разбиения, которые дают вклады в непрерывный предел.

До этого места всё происходит точно так же, как и для однокомпонентных бозонов. Теперь нам нужно учесть разбиения набора $\bar{u}$. Для этого нам следует в наборе $J = \{j_1, \dots, j_b\}$ выбрать подмножество чисел K , состоящее из a элементов: $K = \{j_{k_1}, \dots, j_{k_a}\}$, $K \subset J$. Это будут номера узлов решетки, в которых $a_{j_{k_m}} = 1$.

Во всех остальных узлах $a_j = 0$. Будем считать, что подмножество $\bar{u}^{(j_{k_m})}$ состоит из одного элемента u_m . Выполняя симметризацию по $\bar{u}$ и суммируя по всем возможным j_{k_m} с условием $j_{k_a} > \dots > j_{k_1}$, мы тем самым воспроизводим сумму по разбиениям набора $\bar{u}$.

Суммируя все вышесказанное, мы можем переписать представление (5.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) &= \text{Sym}_{\bar{v}, \bar{u}} \prod_{b \geq j > k \geq 1} f(v_j, v_k) \prod_{a \geq j > k \geq 1} f(u_j, u_k) \times \\ &\times \sum_{j_b > \dots > j_1}^N \sum_{\substack{j_{k_a} > \dots > j_{k_1}, \\ j_{k_m} \in J}} \prod_{m=1}^a \prod_{\ell=k_m+1}^b f^{-1}(v_\ell, u_m) \prod_{k=1}^b r_0^{j_k-1}(v_k) \times \\ &\times \prod_{m=1}^a \mathbb{B}_{1,1}^{(j_{k_m})}(u_m; v_{k_m}) \prod_{j_\ell \in J \setminus K} \mathbb{B}_{0,1}^{(j_\ell)}(\emptyset; v_\ell). \end{aligned} \quad (5.18)$$

С учетом (4.18) и (5.15) находим

$$\mathbb{B}_{0,1}^{(j)}(\emptyset; v) = -i\Delta\sqrt{\varkappa}\psi_2^\dagger(j)|0\rangle, \quad \mathbb{B}_{1,1}^{(j)}(u; v) = -i\Delta\sqrt{\varkappa}\frac{g(v, u)}{f(v, u)}\psi_1^\dagger(j)|0\rangle \quad (5.19)$$

и, воспользовавшись формулой (4.19), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) &= (-i\Delta\sqrt{\varkappa})^b \text{Sym}_{\bar{v}, \bar{u}} \prod_{b \geq j > k \geq 1} f(v_j, v_k) \prod_{a \geq j > k \geq 1} f(u_j, u_k) \times \\ &\times \sum_{j_b > \dots > j_1}^N \sum_{\substack{j_{k_a} > \dots > j_{k_1}, \\ j_{k_m} \in J}} \prod_{m=1}^a \prod_{\ell=k_m+1}^b f^{-1}(v_\ell, u_m) \prod_{k=1}^b e^{ix_k v_k} \times \\ &\times \prod_{m=1}^a \frac{g(v_{k_m}, u_m)}{f(v_{k_m}, u_m)} \psi_1^\dagger(j_{k_m}) \prod_{j_\ell \in J \setminus K} \psi_2^\dagger(j_\ell)|0\rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Учитывая очевидные свойства функций $g(x, y)$ и $f(x, y)$,

$$f(x, y+c) = \frac{1}{f(y, x)}, \quad g(x, y+c) = -\frac{g(y, x)}{f(y, x)}, \quad (5.21)$$

мы видим, что

$$\text{Sym}_{\bar{u}} \prod_{a \geq j > k \geq 1} f(u_j, u_k) \prod_{m=1}^a \left\{ \frac{g(v_{k_m}, u_m)}{f(v_{k_m}, u_m)} \prod_{\ell=k_m+1}^b \frac{1}{f(v_\ell, u_m)} \right\} = (-1)^a \Omega_{k_1, \dots, k_a}^{(a,b)}(\bar{u}; \bar{v} + c),$$

где коэффициенты $\Omega_{k_1, \dots, k_a}^{(a,b)}$ заданы формулой (2.29).

Таким образом, представление (5.20) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}; \bar{v}) &= (-1)^a (-i\Delta\sqrt{\varkappa})^b \text{Sym}_{\bar{v}} \prod_{b \geq j > k \geq 1} f(v_j, v_k) \times \\ &\times \sum_{j_b > \dots > j_1}^N \sum_{\substack{j_{k_a} > \dots > j_{k_1}, \\ j_{k_m} \in J}} \prod_{k=1}^b e^{ix_k v_k} \Omega_{k_1, \dots, k_a}^{(a,b)}(\bar{u}; \bar{v} + c) \times \\ &\times \prod_{m=1}^a \psi_1^\dagger(j_{k_m}) \prod_{j_\ell \in J \setminus K} \psi_2^\dagger(j_\ell) |0\rangle, \end{aligned} \quad (5.22)$$

и теперь уже ясно, что с точностью до нормировочного множителя в непрерывном пределе мы приходим к выражению (3.4).

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ ЧЕРЕЗ БОЗОННЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе мы выведем явные представления матричных элементов матрицы монодромии $T_{ij}(u)$ через бозонные поля. Данные представления имеют вид формальных степенных рядов по константе связи $\varkappa$. Следует отметить, однако, что в слабом смысле эти ряды обрываются на любом векторе Бете.

Представим инфинитезимальный L -оператор (5.15) в виде блочной матрицы размера 2×2 :

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} a & b_n \\ c_n & d \end{pmatrix} + O(\Delta^2). \quad (6.1)$$

Здесь $d = 1 + iu\Delta/2$ и a является (2×2) -матрицей вида $a = (1 - iu\Delta/2) \cdot \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единичная матрица размера 2×2 . Двухкомпонентный вектор-столбец b_n и двухкомпонентная вектор-строка c_n суть

$$b_n = -i\Delta\sqrt{\varkappa} \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger(n) \\ \psi_2^\dagger(n) \end{pmatrix}, \quad c_n = i\Delta\sqrt{\varkappa} (\psi_1(n) \ \psi_2(n)). \quad (6.2)$$

Удобно разделить диагональную и антидиагональную части L -оператора (6.1) следующим образом³⁾:

$$L_n(u) = \Lambda(u) + W_n, \quad \Lambda(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad W_n = \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ c_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Теперь следует подставить представление (6.3) в формулу (4.8) и разложить получившееся выражение в ряд по W_n . Поскольку антидиагональная часть матрицы W_n пропорциональна $\sqrt{\varkappa}$, матрица монодромии $T(u)$ становится полиномом от $\sqrt{\varkappa}$, который в непрерывном пределе переходит в бесконечный степенной ряд:

$$T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^{n/2} T_n(u), \quad (6.4)$$

³⁾Здесь и далее мы опускаем члены порядка $O(\Delta^2)$, поскольку они не дают вклада в непрерывный предел.

где

$$\varkappa^{n/2} T_n(u) = \left(1 - \frac{iu\Delta}{2}\right)^{-N} \sum_{N \geq k_n > \dots > k_1 \geq 1} \Lambda^{N-k_n} W_{k_n} \Lambda^{k_n-k_{n-1}-1} \dots \Lambda^{k_2-k_1-1} W_{k_1} \Lambda^{k_1-1}. \quad (6.5)$$

Из этого представления ясно, что диагональные блоки матрицы монодромии являются рядами по целым степеням $\varkappa$, в то время как антидиагональные блоки являются рядами по полуцелым степеням $\varkappa$.

Пусть

$$\widetilde{W}_{k_i} = \Lambda^{-k_i} W_{k_i} \Lambda^{k_i-1} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}_{k_i} \\ \tilde{c}_{k_i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где

$$\tilde{b}_{k_i} = \frac{b_{k_i}}{1 + iu\Delta/2} \left(\frac{1 + iu\Delta/2}{1 - iu\Delta/2} \right)^{k_i}, \quad \tilde{c}_{k_i} = \frac{c_{k_i}}{1 - iu\Delta/2} \left(\frac{1 - iu\Delta/2}{1 + iu\Delta/2} \right)^{k_i}. \quad (6.7)$$

Тогда равенство (6.5) принимает вид

$$\varkappa^{n/2} T_n(u) = \left(1 - \frac{iu\Delta}{2}\right)^{-N} \Lambda^N \sum_{N \geq k_n > \dots > k_1 \geq 1} \widetilde{W}_{k_n} \widetilde{W}_{k_{n-1}} \dots \widetilde{W}_{k_1}. \quad (6.8)$$

Частично беря непрерывный предел с помощью (4.19), получаем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(1 - \frac{iu\Delta}{2}\right)^{-N} \Lambda^N = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & e^{iuL} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

и $\tilde{b}_{k_i} = b_{k_i} e^{iux_{k_i}}$, $\tilde{c}_{k_i} = c_{k_i} e^{-iux_{k_i}}$.

Удобно рассмотреть операторы $T_n(u)$ отдельно для четных n и нечетных n . Пусть $n = 2\ell$. Произведение двух матриц $\widetilde{W}_{k_i}$ и $\widetilde{W}_{k_{i-1}}$ дает блочно-диагональную матрицу

$$\widetilde{W}_{k_i} \widetilde{W}_{k_{i-1}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{k_i} \tilde{c}_{k_{i-1}} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{k_i} \tilde{b}_{k_{i-1}} \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Следовательно, мы получаем

$$\varkappa^\ell T_{2\ell}(u) = \begin{pmatrix} A_\ell(u) & 0 \\ 0 & D_\ell(u) \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_\ell(u) &= \sum_{N \geq k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \tilde{b}_{k_{2\ell}} \tilde{c}_{k_{2\ell-1}} \tilde{b}_{k_{2\ell-2}} \tilde{c}_{k_{2\ell-3}} \dots \tilde{b}_{k_2} \tilde{c}_{k_1} \\ D_\ell(u) &= e^{iuL} \sum_{N \geq k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \tilde{c}_{k_{2\ell}} \tilde{b}_{k_{2\ell-1}} \tilde{c}_{k_{2\ell-2}} \tilde{b}_{k_{2\ell-3}} \dots \tilde{c}_{k_2} \tilde{b}_{k_1}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Отметим, что в этих произведениях все операторы коммутируют, поскольку они отвечают разным узлам решетки. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{k_{2\ell}} \tilde{c}_{k_{2\ell-1}} \tilde{b}_{k_{2\ell-2}} \tilde{c}_{k_{2\ell-3}} \dots \tilde{b}_{k_2} \tilde{c}_{k_1} &= : \tilde{b}_{k_{2\ell}} \tilde{c}_{k_{2\ell-1}} \tilde{b}_{k_{2\ell-2}} \tilde{c}_{k_{2\ell-3}} \dots \tilde{b}_{k_2} \tilde{c}_{k_1} :, \\ \tilde{c}_{k_{2\ell}} \tilde{b}_{k_{2\ell-1}} \tilde{c}_{k_{2\ell-2}} \tilde{b}_{k_{2\ell-3}} \dots \tilde{c}_{k_2} \tilde{b}_{k_1} &= : \tilde{c}_{k_{2\ell}} \tilde{b}_{k_{2\ell-1}} \tilde{c}_{k_{2\ell-2}} \tilde{b}_{k_{2\ell-3}} \dots \tilde{c}_{k_2} \tilde{b}_{k_1} :, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где символ $:$: означает нормальное упорядочение. Очевидно, что

$$\tilde{c}_{k_{2i}} \tilde{b}_{k_{2i-1}} = \varkappa \Delta^2 e^{iu(x_{k_{2i-1}} - x_{k_{2i}})} : (\psi_1^\dagger(k_{2i-1}) \psi_1(k_{2i}) + \psi_2^\dagger(k_{2i-1}) \psi_2(k_{2i})) :. \quad (6.14)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} A_\ell(u) &= \varkappa^\ell \Delta^{2\ell} \sum_{N \geq k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell} e^{iu(x_{k_{2i}} - x_{k_{2i-1}})} \times \\ &\times : \prod_{i=1}^{\ell-1} (\psi_1^\dagger(k_{2i}) \psi_1(k_{2i+1}) + \psi_2^\dagger(k_{2i}) \psi_2(k_{2i+1})) \begin{pmatrix} \psi_1^\dagger(k_{2\ell}) \psi_1(k_1) & \psi_1^\dagger(k_{2\ell}) \psi_2(k_1) \\ \psi_2^\dagger(k_{2\ell}) \psi_1(k_1) & \psi_2^\dagger(k_{2\ell}) \psi_2(k_1) \end{pmatrix} : , \\ D_\ell(u) &= e^{iuL} \varkappa^\ell \Delta^{2\ell} \sum_{N \geq k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell} e^{-iu(x_{k_{2i}} - x_{k_{2i-1}})} \times \\ &\times : \prod_{i=1}^{\ell} (\psi_1^\dagger(k_{2i-1}) \psi_1(k_{2i}) + \psi_2^\dagger(k_{2i-1}) \psi_2(k_{2i})) : . \end{aligned}$$

Остается заменить суммы по k_i на интегралы по формуле (4.20). Удобно положить $x_{k_{2i}} = z_i$ и $x_{k_{2i-1}} = y_i$. Тогда

$$\begin{aligned} A_\ell(u) &= \varkappa^\ell \int_0^L \prod_{i=1}^{\ell} \{e^{iu(z_i - y_i)} dz_i dy_i\} \Theta_\ell(\bar{z}, \bar{y}) \times \\ &\times : \prod_{i=1}^{\ell-1} (\Psi_1^\dagger(z_i) \Psi_1(y_{i+1}) + \Psi_2^\dagger(z_i) \Psi_2(y_{i+1})) \begin{pmatrix} \Psi_1^\dagger(z_\ell) \Psi_1(y_1) & \Psi_1^\dagger(z_\ell) \Psi_2(y_1) \\ \Psi_2^\dagger(z_\ell) \Psi_1(y_1) & \Psi_2^\dagger(z_\ell) \Psi_2(y_1) \end{pmatrix} : , \quad (6.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_\ell(u) &= e^{iuL} \varkappa^\ell \int_0^L \prod_{i=1}^{\ell} \left\{ e^{-iu(z_i - y_i)} dz_i dy_i \right\} \Theta_\ell(\bar{z}, \bar{y}) \times \\ &\times : \prod_{i=1}^{\ell} (\Psi_1^\dagger(y_i) \Psi_1(z_i) + \Psi_2^\dagger(y_i) \Psi_2(z_i)) : , \quad (6.16) \end{aligned}$$

где

$$\Theta_\ell(\bar{z}, \bar{y}) = \theta(z_\ell - y_\ell) \prod_{i=1}^{\ell-1} \theta(y_{i+1} - z_i) \theta(z_i - y_i). \quad (6.17)$$

Тем же самым способом можно найти антидиагональные блоки матрицы монодромии. Полагая $n = 2\ell + 1$ в формуле (6.8), получим

$$\varkappa^{\ell+1/2} T_{2\ell+1}(u) = \begin{pmatrix} 0 & B_\ell(u) \\ C_\ell(u) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

где

$$\begin{aligned} C_\ell(u) &= ie^{iuL} \varkappa^{\ell+1/2} \int_0^L \prod_{i=1}^{\ell} \{e^{iu(z_i - y_i)} dz_i dy_i\} e^{-iuy_{\ell+1}} \theta(y_{\ell+1} - z_\ell) \Theta_\ell(\bar{z}, \bar{y}) dy_{\ell+1} \times \\ &\times : \prod_{i=1}^{\ell} (\Psi_1^\dagger(z_i) \Psi_1(y_{i+1}) + \Psi_2^\dagger(z_i) \Psi_2(y_{i+1})) \cdot (\Psi_1(y_1) \ \Psi_2(y_1)) : , \end{aligned}$$

$$B_\ell(u) = -i\kappa^{\ell+1/2} \int_0^L \prod_{i=1}^{\ell} \{e^{-iu(z_i-y_i)} dz_i dy_i\} e^{iuy_{\ell+1}} \theta(y_{\ell+1} - z_\ell) \Theta_\ell(\bar{z}, \bar{y}) dy_{\ell+1} \times \\ \times : \prod_{i=1}^{\ell} (\Psi_1^\dagger(y_i) \Psi_1(z_i) + \Psi_2^\dagger(y_i) \Psi_2(z_i)) \cdot \left(\Psi_1^\dagger(y_{\ell+1}) \right) :.$$

Таким образом, мы получили представление для матричных элементов матрицы монодромии $T_{ij}(u)$ в виде ряда, члены которого явным образом зависят от локальных бозонных полей. Данный ряд является формальным, и мы не исследуем вопрос о его сходимости. Однако легко видеть, что если ввести вектор

$$|\Phi_{a,b}\rangle = \int_0^L \Phi_{a,b}(x_1, \dots, x_a; y_1, \dots, y_b) \prod_{i=1}^a \Psi_1^\dagger(x_i) \prod_{j=1}^b \Psi_2^\dagger(y_j) |0\rangle dx_1, \dots, dx_a dy_1, \dots, dy_b,$$

где $\Phi_{a,b}(x_1, \dots, x_a; y_1, \dots, y_b)$ – некоторая непрерывная в области интегрирования функция, то действие любого $T_{ij}(u)$ на $|\Phi_{a,b}\rangle$ превращается в конечную сумму.

7. ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛЕЙ

Благодаря инвариантности R -матрицы при транспонировании по обоим пространствам отображение

$$\phi(T_{jk}(u)) = T_{kj}(u) \quad (7.1)$$

определяет антиформорфизм алгебры (2.2) (см. работу [21]). Данное отображение является очень удобным инструментом при изучении формфакторов, потому что оно позволяет установить связь между формфакторами различных операторов. В случае модели ДКБГ антиморфизм (7.1) согласован со следующим отображением бозонных полей:

$$\phi(\Psi_i(x)) = -\Psi_i^\dagger(L-x), \quad \phi(\Psi_i^\dagger(x)) = -\Psi_i(L-x). \quad (7.2)$$

В самом деле, посмотрим, например, как отображение (7.2) действует на матричные элементы $T_{jk}(u)$ при $j, k = 1, 2$. В силу равенств (6.11), (6.15) мы имеем

$$T_{jk}(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \kappa^\ell (T_{2\ell})_{jk}(u), \quad j, k = 1, 2, \quad (7.3)$$

где

$$(T_{2\ell})_{jk}(u) = \int_0^L \prod_{n=1}^{\ell} \{e^{iu(z_n-y_n)} dz_n dy_n\} \Theta_\ell(\bar{z}, \bar{y}) \times \\ \times : \Psi_j^\dagger(z_\ell) \Psi_k(y_1) \prod_{n=1}^{\ell-1} \left(\sum_{s=1}^2 \Psi_s^\dagger(z_n) \Psi_s(y_{n+1}) \right) :. \quad (7.4)$$

Напомним, что благодаря множителю $\Theta_\ell(\bar{z}, \bar{y})$ интегрирование в формуле (7.4) ведется по области $z_\ell > y_\ell > z_{\ell-1} > \dots > z_1 > y_1$. Поэтому в формуле (7.4) все операторы коммутируют друг с другом, и на самом деле нормальное упорядочение

не требуется. Действуя на (7.4) отображением ϕ , как предписано условиями (7.2), мы получим

$$\begin{aligned} \phi((T_{2\ell})_{jk}(u)) &= \int_0^L \prod_{n=1}^{\ell} \{e^{iu(z_n - y_n)} dz_n dy_n\} \Theta_{\ell}(\bar{z}, \bar{y}) \times \\ &\times : \Psi_k^{\dagger}(L - y_1) \Psi_j(L - z_{\ell}) \prod_{n=1}^{\ell-1} \left(\sum_{s=1}^2 \Psi_s^{\dagger}(L - y_{n+1}) \Psi_s(L - z_n) \right) :. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Теперь достаточно сделать замену переменных $z_n \rightarrow L - y_{\ell+1-n}$ и $y_n \rightarrow L - z_{\ell+1-n}$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \Theta_{\ell}(\bar{z}, \bar{y}) \Big|_{\substack{z_n \rightarrow L - y_{\ell+1-n}, \\ y_n \rightarrow L - z_{\ell+1-n}}} &= \prod_{n=1}^{\ell-1} \theta(y_{\ell-n+1} - z_{\ell-n}) \prod_{n=1}^{\ell} \theta(z_{\ell-n+1} - y_{\ell-n+1}) = \\ &= \prod_{i=1}^{\ell-1} \theta(y_{i+1} - z_i) \prod_{i=1}^{\ell} \theta(z_i - y_i) = \Theta_{\ell}(\bar{z}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Также легко видеть, что

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\ell-1} \left(\sum_{s=1}^2 \Psi_s^{\dagger}(L - y_{n+1}) \Psi_s(L - z_n) \right) \Big|_{\substack{z_n \rightarrow L - y_{\ell+1-n}, \\ y_n \rightarrow L - z_{\ell+1-n}}} &= \prod_{n=1}^{\ell-1} \left(\sum_{s=1}^2 \Psi_s^{\dagger}(z_{\ell-n}) \Psi_s(y_{\ell-n+1}) \right) = \\ &= \prod_{n=1}^{\ell-1} \left(\sum_{s=1}^2 \Psi_s^{\dagger}(z_n) \Psi_s(y_{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Таким образом, мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} \phi((T_{2\ell})_{jk}(u)) &= \int_0^L \prod_{n=1}^{\ell} \{e^{iu(z_n - y_n)} dz_n dy_n\} \Theta_{\ell}(\bar{z}, \bar{y}) \times \\ &\times : \Psi_k^{\dagger}(y_1) \Psi_j(z_{\ell}) \prod_{n=1}^{\ell-1} \left(\sum_{s=1}^2 \Psi_s^{\dagger}(z_n) \Psi_s(y_{n+1}) \right) : = (T_{2\ell})_{kj}(u). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Аналогично можно доказать, воспользовавшись явными представлениями для других операторов $T_{jk}(u)$, что из отображения (7.2) следует (7.1).

8. НУЛЕВЫЕ МОДЫ

В работе [12] был предложен метод вычисления формфакторов локальных операторов в $GL(3)$ -инвариантных моделях. Данный метод основан на использовании парциальных нулевых мод матричных элементов $T_{ij}(u)$ в композитной модели с двумя парциальными матрицами монодромии (2.12). Несмотря на то что этот подход применим к широкому классу интегрируемых моделей, в случае модели ДКБГ его следует слегка видоизменить. Дело в том, что в работе [12] предполагалось, что матрица монодромии $T(u)$ при $|u| \rightarrow \infty$ стремится к единичному оператору. Данное ограничение не является очень существенным, однако в случае модели ДКБГ оно приводит к небольшим изменениям.

Заметим, что матрица монодромии $T^{(a)}(u)$, построенная по L -оператору (4.1), обладает отмеченным выше свойством. Действительно, мы можем определить локальные L -операторы $L_n^{(a)}(u)$, $n = 1, \dots, N$, равенствами (4.1) и (4.2), в которых операторы a_k и $a_k^\dagger$ заменены соответственно на $a_k(n)$ и $a_k^\dagger(n)$ с коммутационными соотношениями $[a_i(n), a_k^\dagger(m)] = \delta_{nm}\delta_{ik}$. Мы можем положить

$$T^{(a)}(u) = u^{-N} L_N^{(a)}(u) \dots L_1^{(a)}(u), \quad (8.1)$$

а такая матрица очевидно имеет асимптотическое разложение

$$T^{(a)}(u) = \mathbf{1} + \frac{C}{u} T^{(a)}[0] + O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty. \quad (8.2)$$

Поэтому мы можем определить нулевые моды этой матрицы монодромии стандартным образом:

$$T^{(a)}[0] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{C} (T^{(a)}(u) - \mathbf{1}). \quad (8.3)$$

Однако, переходя от L -оператора (4.1) к L -оператору (4.9), мы умножили $L^{(a)}(u)$ на матрицу $J = \text{diag}(1, 1, -1)$ (см. формулу (4.5)). Это привело к тому, что матрица монодромии $T(u)$ (4.8) в непрерывном пределе имеет в бесконечности существенно особую точку. Поэтому в случае модели ДКБГ определение нулевых мод нуждается в уточнении. В этом разделе мы обсуждаем данную проблему и рассматриваем асимптотическое разложение матричных элементов $T_{ij}(u)$ при большом значении аргумента. Для мы пользуемся интегральными представлениями для $T_{ij}(u)$, полученными в разделе 6.

При $u \rightarrow \infty$ разложение для матрицы монодромии содержит кратные интегралы от быстроосциллирующих функций. Методы вычисления быстроосциллирующих интегралов хорошо известны (см., например, монографии [36], [37]). В нашем случае каждая переменная интегрирования изменяется на конечном интервале $[0, L]$, поэтому одним из простейших способов получить асимптотическое разложение для $T_{ij}(u)$ является интегрирование по частям. Пользуясь этим методом, легко показать, что обычные и двойные интегралы ведут себя как $1/u$, а все слагаемые с $\ell > 1$ дают вклады порядка $o(u^{-1})$. Поэтому для того, чтобы найти нулевые моды, достаточно взять только первые нетривиальные члены разложения матрицы $T(u)$. Тогда мы имеем

$$T_{ij}(u) = \delta_{ij} + \varkappa \int_0^L e^{iu(z-y)} \theta(z-y) \Psi_i^\dagger(z) \Psi_j(y) dz dy + O(\varkappa^2), \quad i, j = 1, 2,$$

$$T_{33}(u) = e^{iuL} + \varkappa e^{iuL} \int_0^L e^{iu(y-z)} \theta(z-y) (\Psi_1^\dagger(y) \Psi_1(z) + \Psi_2^\dagger(y) \Psi_2(z)) dz dy + O(\varkappa^2).$$

$$T_{i3}(u) = -i\sqrt{\varkappa} \int_0^L e^{iuy} \Psi_i^\dagger(y) dy + O(\varkappa^{3/2}), \quad i = 1, 2,$$

$$T_{3j}(u) = i\sqrt{\varkappa} e^{iuL} \int_0^L e^{-iuy} \Psi_j(y) dy + O(\varkappa^{3/2}), \quad j = 1, 2.$$

Все слагаемые, обозначенные через $O(\varkappa^2)$ или $O(\varkappa^{3/2})$, дают вклады порядка $O(u^{-2})$ при $u \rightarrow \infty$, и поэтому они не важны. Интегрируя по частям, получаем

$$T_{ij}(u) = \delta_{ij} + \frac{i\varkappa}{u} \int_0^L \Psi_i^\dagger(y) \Psi_j(y) dy + O(u^{-2}), \quad i, j = 1, 2, \quad (8.4)$$

$$T_{33}(u) = e^{iuL} - \frac{i\varkappa}{u} e^{iuL} \int_0^L (\Psi_1^\dagger(y) \Psi_1(y) + \Psi_2^\dagger(y) \Psi_2(y)) dy + O(u^{-2}). \quad (8.5)$$

$$T_{i3}(u) = -\frac{\sqrt{\varkappa}}{u} (e^{iuL} \Psi_i^\dagger(L) - \Psi_i^\dagger(0)) + O(u^{-2}), \quad i = 1, 2, \quad (8.6)$$

$$T_{3j}(u) = -\frac{\sqrt{\varkappa}}{u} (\Psi_j(L) - e^{iuL} \Psi_j(0)) + O(u^{-2}), \quad j = 1, 2. \quad (8.7)$$

Теперь определим нулевые моды следующим образом:

$$T_{ij}[0] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{c} (T_{ij}(u) - \delta_{ij}) = - \int_0^L \Psi_i^\dagger(y) \Psi_j(y) dy, \quad i, j = 1, 2, \quad (8.8)$$

(напомним, что $c = -i\varkappa$). Это то же самое определение, что и для моделей, рассмотренных в работе [12]. Нулевая мода $T_{33}[0]$ определяется несколько иначе,

$$T_{33}[0] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{c} (e^{-iuL} T_{33}(u) - 1) = \int_0^L (\Psi_1^\dagger(y) \Psi_1(y) + \Psi_2^\dagger(y) \Psi_2(y)) dy, \quad (8.9)$$

и, следовательно, $T_{11}[0] + T_{22}[0] = -T_{33}[0]$.

Глядя на выражения (8.6), (8.7), мы видим, что для этих операторов имеются два типа нулевых мод. Назовем их левыми и правыми нулевыми модами и обозначим соответственно через $T_{ij}^{(L)}[0]$ и $T_{ij}^{(R)}[0]$. Тогда

$$\begin{aligned} T_{k3}^{(R)}[0] &= \lim_{u \rightarrow -i\infty} e^{-iuL} \frac{u}{c} T_{k3}(u) = \frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi_k^\dagger(L), \\ T_{k3}^{(L)}[0] &= \lim_{u \rightarrow +i\infty} \frac{u}{c} T_{k3}(u) = -\frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi_k^\dagger(0), \end{aligned} \quad k = 1, 2, \quad (8.10)$$

и

$$\begin{aligned} T_{3j}^{(R)}[0] &= \lim_{u \rightarrow +i\infty} \frac{u}{c} T_{3j}(u) = \frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi_j(L), \\ T_{3j}^{(L)}[0] &= \lim_{u \rightarrow -i\infty} e^{-iuL} \frac{u}{c} T_{3j}(u) = -\frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi_j(0), \end{aligned} \quad j = 1, 2. \quad (8.11)$$

Суммы $T_{ij}^{(L)}[0] + T_{ij}^{(R)}[0]$ играют ту же роль, что и нулевые моды матрицы монодромии типа (8.1), (8.2). Известно (см., в частности, работы [38], [13]), что некоторые нулевые моды $T_{ij}[0]$ уничтожают on-shell векторы Бете:

$$T_{ij}^{(a)}[0] \mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad i > j. \quad (8.12)$$

Аналогично можно проверить, что

$$(T_{3j}^{(L)}[0] + T_{3j}^{(R)}[0]) \mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad j \neq 3, \quad (8.13)$$

при условии, что $\mathbb{B}_{a,b}(\bar{u}, \bar{v})$ является on-shell вектором. Для того чтобы доказать равенство (8.13), достаточно воспользоваться формулами действия операторов $T_{ij}(u)$ на векторы Бете [25] и рассмотреть пределы $u \rightarrow \pm i\infty$, как в формулах (8.11).

И, наконец, полученные формулы для нулевых мод позволяют исследовать формфакторы локальных операторов в рамках композитной модели (2.12). Действительно, пусть в представлении (2.12) парциальная матрица монодромии $T^{(1)}(u)$ соответствует интервалу $[0, x]$, где x – некоторая фиксированная точка интервала $[0, L]$. Тогда парциальные нулевые моды $T_{ij}^{(1)}[0]$ и $T_{ij}^{(1;R)}[0]$ даются выражениями (8.8)–(8.11), в которых всюду следует заменить L на x . В частности, мы получаем

$$\begin{aligned}\Psi_i^\dagger(x)\Psi_j(x) &= -\frac{d}{dx}T_{ij}^{(1)}[0] = \frac{1}{i\kappa}\frac{d}{dx}\lim_{u\rightarrow\infty}u(T_{ij}^{(1)}(u) - \delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \\ \Psi_j(x) &= i\sqrt{\kappa}T_{3j}^{(1;R)}[0] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\lim_{u\rightarrow+i\infty}uT_{3j}^{(1)}(u), \quad j = 1, 2, \\ \Psi_k^\dagger(x) &= i\sqrt{\kappa}T_{k3}^{(1;R)}[0] = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\lim_{u\rightarrow-i\infty}e^{-iux}uT_{k3}^{(1)}(u), \quad k = 1, 2.\end{aligned}\tag{8.14}$$

Таким образом, проблема вычисления формфакторов локальных операторов в модели ДКБГ сводится к вычислению формфакторов парциальных нулевых мод $T_{ij}^{(1)}[0]$ и $T_{ij}^{(1;R)}[0]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы описали модель ДКБГ в рамках алгебраического анзаца Бете. Основная цель заключалась в том, чтобы доказать, что решеточный L -оператор (4.9) правильно описывает модель ДКБГ в непрерывном пределе и позволяет найти нулевые моды матрицы монодромии $T(u)$. Данная цель успешно достигнута. Для того чтобы вычислить формфакторы локальных полей $\Psi_i(x)$, $\Psi_i^\dagger(x)$ и их комбинаций $\Psi_i^\dagger(x)\Psi_j(x)$, мы теперь можем воспользоваться методом работы [12]. На самом деле часть результатов можно предсказать уже сейчас. Действительно, определение (8.8) нулевых мод $T_{ij}[0]$ для $i, j = 1, 2$ совпадает с определением, использовавшимся в работе [12]. Поэтому формфакторы операторов $\Psi_i^\dagger(x)\Psi_j(x)$ фактически уже вычислены. Вычисление формфакторов полей $\Psi_i(x)$ и $\Psi_i^\dagger(x)$ следует слегка изменить. Однако и в этом случае модификация касается только процедуры взятия предела $u \rightarrow \infty$, но она не влияет на детерминантные представления для парциальных нулевых мод. Мы рассмотрим этот вопрос более подробно в нашей следующей публикации.

Благодарности. Я с большим удовольствием благодарю моих коллег С. Пакуляка и Э. Рагуси за многочисленные и плодотворные обсуждения. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Список литературы

- [1] E. H. Lieb, W. Liniger, *Phys. Rev.*, **130**:4 (1963), 1605–1616.
- [2] E. H. Lieb, *Phys. Rev.*, **130**:4 (1963), 1616–1624.
- [3] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:23 (1967), 1312–1315.
- [4] B. Sutherland, *Phys. Rev. Lett.*, **20**:3 (1968), 98–100.
- [5] B. Sutherland, *Phys. Rev. B*, **12**:9 (1975), 3795–3805.

- [6] M. Gaudin, *La fonction d'onde de Bethe*, Masson, Paris, 1983.
- [7] P. P. Kulish, *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 246–257.
- [8] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **120** (1982), 92–121.
- [9] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **554**:3 (1999), 647–678, arXiv: math-ph/9807020.
- [10] J. M. Maillet, V. Terras, *Nucl. Phys. B*, **575**:3 (2000), 627–644, arXiv: hep-th/9911030.
- [11] B. Pozsgay, W.-V. G. van Oei, M. Kormos, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:46 (2012), 465007, 34 pp., arXiv: 1204.4037.
- [12] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *GL(3)-based quantum integrable composite models: 2. Form factors of local operators*, arXiv: 1502.01966.
- [13] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *Nucl. Phys. B*, **893** (2015), 459–481, arXiv: 1412.6037.
- [14] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 67–92.
- [15] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **40**:2 (1979), 194–220.
- [16] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 13–63.
- [17] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Symmetries quantiques [Quantum Symmetries]*, Proceedings of the Les Houches summer school, Session LXIV (Les Houches, France, August 1–September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149–219.
- [18] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *ЖЭТФ*, **80**:1 (1981), 214–228.
- [19] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**:16 (1983), L591–L596.
- [20] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **04** (2013), P04033, 16 pp., arXiv: 1211.3968.
- [21] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *Nucl. Phys. B*, **881** (2014), 343–368, arXiv: 1312.1488.
- [22] А. Н. Варченко, В. О. Тарасов, *Алгебра и анализ*, **6**:2 (1994), 90–137, arXiv: hep-th/9311040.
- [23] S. Khoroshkin, S. Pakuliak, V. Tarasov, *J. Geom. Phys.*, **57**:8 (2007), 1713–1732, arXiv: math/0610517.
- [24] S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *J. Math. Kyoto Univ.*, **48**:2 (2008), 277–321, arXiv: 0711.2819.
- [25] S. Belliard, S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *J. Stat. Mech.*, **02** (2013), P02020, 24 pp., arXiv: 1210.0768.
- [26] V. E. Korepin, *Commun. Math. Phys.*, **86**:3 (1982), 391–418.
- [27] А. Г. Изергин, *Докл. АН СССР*, **297**:2 (1987), 331–333.
- [28] B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *Commun. Math. Phys.*, **276**:3 (2007), 691–725.
- [29] S. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov, *GL(3)-based quantum integrable composite models: 1. Bethe vectors*, arXiv: 1501.07566.
- [30] А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **150** (1986), 26–36.
- [31] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [32] А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, *Докл. АН СССР*, **259** (1981), 76–79.
- [33] A. G. Izergin, V. E. Korepin, *Nucl. Phys. B*, **205**:3 (1982), 401–413.
- [34] В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **57**:2 (1983), 163–181.
- [35] Н. М. Боголюбов, В. Е. Корепин, *ТМФ*, **66**:3 (1986), 455–462.
- [36] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, Bibliotheca Mathematica, **4**, North-Holland, Amsterdam, 1961.
- [37] А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*, Фитматгиз, М., 1962.
- [38] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *J. Stat. Mech.*, **08** (2006), P08002, 44 pp., arXiv: math/0605015.