Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. П. Ванг, Представления алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в категории $\mathcal{O}$ и мастер-симметрии, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 2, 212–243

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:30:38

© 2015 г.

Дж. П. Ванг*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ В КАТЕГОРИИ $\mathcal{O}$ И МАСТЕР-СИММЕТРИИ

Показано, что неразложимые $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -модули в категории $\mathcal{O}$ Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда возникают естественным образом для однородных интегрируемых нелинейных эволюционных систем. Разработан новый метод, названный $\mathcal{O}$ -схемой, построения мастер-симметрий для таких интегрируемых систем. Этот подход позволяет естественным образом рассчитать иерархию зависящих от времени симметрий. Эффективность метода проиллюстрирована классическими и новыми примерами. Проведено сравнение с существующими известными методами построения мастер-симметрий. С помощью мастер-симметрий построены сохраняющиеся плотности для новых интегрируемых уравнений, таких как уравнение типа Бенджамина–Оно, новое интегрируемое уравнение типа Деви–Стюартсона и две различные версии $(2+1)$ -мерных обобщений цепочек Вольтерра.

Ключевые слова: однородные интегрируемые нелинейные уравнения, мастер-симметрии, категория $\mathcal{O}$ Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда, законы сохранения, симметрии.

DOI: 10.4213/tmf8875

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из неявных свойств интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений является существование бесконечного набора коммутирующих симметрий; этот факт используется в качестве критерия для решения проблемы классификации интегрируемых систем. На основе этого получены полезные результаты (см., например, обзорные работы [1]–[7] и имеющиеся в них ссылки). Одним из способов генерации коммутирующих симметрий является использование хорошо известных рекурсионных операторов [8], [9], которые отображают данную симметрию в новую симметрию. Свойство Нийенхейса рекурсионных операторов позволяет построить абелеву алгебру Ли симметрий [10], [11]. Настоящая работа посвящена построению мастер-симметрий, которые представляют собой альтернативный способ генерации упомянутой иерархии взаимно коммутирующих симметрий.

Мастер-симметрия – это эволюционное векторное поле τ , присоединенное действие ad_τ которого переводит данную симметрию в новую симметрию. Понятие

*School of Mathematics, Statistics and Actuarial Science, University of Kent, Kent, Canterbury, UK. E-mail: J.Wang@kent.ac.uk

мастер-симметрии впервые было введено в работе [12], в которой была построена мастер-симметрия для уравнения Бенджамина–Оно и показано, что у этого уравнения не существует рекурсионного оператора полиномиального типа. Далее эта концепция развивается в работах [13], [14]. Недавний обзор на эту тему можно найти в работе [1]. Например, уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + uu_x$$

обладает мастер-симметрией

$$\tau = x(u_{xx} + uu_x) + \frac{1}{2}u^2.$$

Если задать начальный шаг как $a_0 = u_x$, рекурсионная процедура $a_{n+1} = \text{ad}_\tau a_n$ генерирует иерархию коммутирующих симметрий для уравнения Бюргерса. Эта процедура называется также τ -схемой [14].

Существует несколько способов построения мастер-симметрий. Для однородных уравнений мастер-симметрии строятся с помощью применения их рекурсионных операторов к соответствующим масштабным симметриям (см. определение 4 в настоящей работе). Их также можно считать неизоспектральными потоками, полученными из представлений Лакса [15], [16]. Не имея под рукой указанных дополнительных структур, мы можем построить мастер-симметрию на основе существования зависящих от времени симметрий высшего порядка [17], [18]. Уравнение Бюргерса обладает бесконечным набором зависящих от t симметрий, которые мы обозначим как S_n , $n = 1, 2, \dots$, причем S_n является полиномом n -й степени по t . Перечислим несколько из них:

$$\begin{aligned} S_1 &= tu_x + 1, \\ S_2 &= t^2(u_{xx} + uu_x) + t(xu_x + u) + x, \\ S_3 &= t^3\left(u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_{xx} + \frac{3}{2}u_x^2 + \frac{3}{4}u^2u_x\right) + \frac{3}{2}t^2\left(xu_{xx} + xuu_x + 2u_x + \frac{1}{2}u^2\right) + \\ &\quad + \frac{3}{4}t(x^2u_x + 2xu + 2) + \frac{3}{4}x^2, \\ S_4 &= t^4\left(u_{xxxx} + 2uu_{xxx} + 5u_xu_{xx} + \frac{3}{2}u^2u_{xx} + 3uu_x^2 + \frac{1}{2}u^3u_x\right) + \\ &\quad + t^3\left(x\left(2u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + \frac{3}{2}u^2u_x\right) + 5u_{xx} + 6uu_x + \frac{1}{2}u^3\right) + \\ &\quad + \frac{3}{2}t^2(x^2u_{xx} + x^2uu_x + xu^2 + 4xu_x + 2u) + \frac{1}{2}t(x^3u_x + 3x^2u + 6x) + \frac{1}{2}x^3. \end{aligned}$$

Мастер-симметрию τ можно получить из коэффициента при t^2 в S_3 .

Чтобы рассчитать зависящие от t симметрии нелинейных эволюционных уравнений, мы в работе [19] заметили, что в данном случае имеется алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, и применили эту идею к некоторым хорошо известным уравнениям, таким как уравнение Бюргерса и Кадомцева–Петвиашвили (КП). Для уравнения Бюргерса положим

$$e = u_x, \quad h = 2(xu_x + u), \quad f = -(x^2u_x + 2xu + 2)$$

(эти функции пропорциональны коэффициентам при t в приведенном выше списке). Тогда имеем

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad (1)$$

где скобка Ли определена ниже выражением (4), т.е. эти три элемента образуют алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Отметим, что

$$[u_t, f] = [u_{xx} + uu_x, f] = 4\tau + 8u_x$$

является мастер-симметрией, поскольку u_x коммутирует со всеми a_n . Позже в работе [20] Финкель и Фокас применили ее (не упоминая явно алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$) к уравнениям с нелокальными мастер-симметриями, таким как уравнение Савады–Котера

В настоящей работе мы обоснуем данный метод, объяснив происхождение элемента f , и представим строгие условия, при которых $[f, u_t]$ является мастер-симметрией. Далее мы применим наш метод к различным задачам, в том числе к некоторым новым $(2+1)$ -мерным уравнениям, которые представлены в работах [21], [22].

Отметим, что элементы e , h и f связаны с линейными по t членами симметрий S_i , $i = 1, 2, 3$. Пусть $w = (1/3)x^3u_x + x^2u + 2x$ (см. линейный по t член в S_4), тогда имеем $[e, w] = f$. Мы покажем, что векторное пространство, натянутое на все линейные члены симметрий S_n , $n = 1, 2, \dots$, образует бесконечномерный модуль алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в категории $\mathcal{O}$ Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда (БГГ). Таким образом, можно представить симметрии, мастер-симметрии и их обобщения как элементы модулей Ли. Назовем эту структуру $\mathcal{O}$ -схемой для соответствующего интегрируемого уравнения. Все векторы этой структуры можно использовать для генерации (зависящих от времени) симметрий уравнения.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 дано краткое описание представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в категории $\mathcal{O}$ БГГ. Затем в разделе 3 мы приводим определение симметрий и мастер-симметрий эволюционных уравнений и напоминаем, как можно генерировать иерархию сохраняющихся плотностей с помощью мастер-симметрии. Основные теоретические результаты представлены в разделе 4. Сначала мы показываем, что для однородного эволюционного уравнения независимо от того, интегрируемо оно или нет, существует естественная алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, а также бесконечномерный модуль в категории $\mathcal{O}$ БГГ¹⁾. Далее мы предлагаем подход к построения мастер-симметрий для таких интегрируемых уравнений и затем получаем их $\mathcal{O}$ -схемы. Наконец, мы показываем, что элементы этого бесконечномерного модуля позволяют генерировать зависящие от времени симметрии уравнений. В разделе 5 продемонстрировано, каким образом предложенный метод можно применить к различным примерам как $(1+1)$ -мерных, так и $(2+1)$ -мерных эволюционных уравнений. В заключении приводится краткое обсуждение дальнейших исследований в этом направлении.

2. КАТЕГОРИЯ БГГ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -МОДУЛЕЙ

В этом разделе мы приведем краткие сведения о категории $\mathcal{O}$ БГГ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -модулей, которые будут использоваться в настоящей статье. Подробности читатель может найти в книгах [24], [25].

Алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ порождается тремя генераторами e , f , h , удовлетворяющими соотношениям

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f. \quad (2)$$

¹⁾В недавней статье [23] показано, что все неразложимые $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -модули в категории $\mathcal{O}$ БГГ возникают как квантованные фазовые пространства физических моделей.

Пусть M – $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ введем подпространство M_λ следующим образом:

$$M_\lambda = \{v \in M \mid h \cdot v = \lambda v\}.$$

Если λ не является собственным числом представления $h \cdot$, то $M_\lambda = \{0\}$. Для любого подпространства $M_\lambda \neq \{0\}$ будем называть λ весом генератора h в модуле M , при этом M_λ – связанное с ним весовое пространство.

Объектами категории $\mathcal{O}$ БГГ $\mathfrak{sl}(2)$ -модулей являются такие модули M , что:

- M – конечно-порожденный модуль,
- M – весовой модуль: M – прямая сумма своих весовых пространств,
- все весовые пространства модуля M конечномерные.

Понятно, что все конечномерные модули лежат в указанной категории $\mathcal{O}$. Действительно, все модули в этой категории – прямые суммы неразложимых модулей. Классификация неразложимых модулей внутри категории $\mathcal{O}$ алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ проведена в работе [24]. Здесь мы перечислим некоторые основные результаты для таких неизоморфных неразложимых модулей.

2.1. Конечномерный простой модуль $L(\lambda)$. Конечномерный простой модуль $L(\lambda)$ с $\lambda \in \mathbb{N}$ имеет размерность $\lambda + 1$. У него имеются одномерные весовые пространства с весами $\lambda, \lambda - 2, \dots, -(\lambda - 2)$ и $-\lambda$. Базисные векторы v_i ($0 \leq i \leq \lambda$) можно выбрать так, что

$$f \cdot v_i = v_{i+1}, \quad h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i, \quad e \cdot v_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}, \quad e \cdot v_0 = f \cdot v_\lambda = 0.$$

Здесь v_0 – вектор старшего веса, соответствующий старшему весу λ . Это (с точностью до масштабирования) единственный вектор, обращающийся в нуль под действием генератора e .

2.2. Модуль Верма $M(\lambda)$. Для любого старшего веса $\lambda \in \mathbb{C}$ введем модуль Верма $M(\lambda)$ как модуль, порожденный универсальной обертывающей алгеброй, которая действует на вектор старшего веса. Веса модуля Верма $M(\lambda)$ таковы: $\lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots$, кратность каждого из них равна единице. Базисные векторы v_i ($i \geq 0$) можно выбрать так, что

$$f \cdot v_i = v_{i+1}, \quad h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i, \quad e \cdot v_i = i(\lambda - i + 1)v_{i-1}.$$

Для $\lambda \in \mathbb{N}$ имеем $e \cdot v_{\lambda+1} = 0$. В этом случае максимальным подмодулем модуля $M(\lambda)$ будет $M(-\lambda - 2)$, а конечномерный простой модуль $L(\lambda)$ есть факторпространство $M(\lambda)/M(-\lambda - 2)$. Если λ не является положительным целым числом, то модуль Верма $M(\lambda)$ простой.

2.3. Дуальный модуль Верма $M^\vee(\lambda)$. Дуальное действие внутри категории $\mathcal{O}$ отображает модуль Верма $M(\lambda)$ в дуальный ему модуль $M^\vee(\lambda)$. Свойство этого модуля заключается в том, что можно получить вектор старшего веса, действуя генератором e на любой вектор. Это свойство дуально по отношению к свойству самого модуля Верма $M(\lambda)$, которое заключается в том, что любой вектор можно получить, действуя генератором f на вектор старшего веса. При любом старшем весе $\lambda \in \mathbb{C}$ веса дуального модуля Верма совпадают с весами модуля Верма. Базисные векторы v_i ($i \geq 0$) можно выбрать так, что

$$e \cdot v_i = v_{i-1}, \quad h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i, \quad f \cdot v_i = (i + 1)(\lambda - i)v_{i+1}, \quad e \cdot v_0 = 0.$$

При $\lambda \in \mathbb{N}$ имеем $f \cdot v_\lambda = 0$. В этом случае максимальный подмодуль модуля $M^\vee(\lambda)$ есть $L(\lambda)$. Факторпространство $M^\vee(\lambda)/L(\lambda)$ изоморфно модулю Верма $M(-\lambda - 2)$.

2.4. Проективный модуль $P(-\lambda - 2)$. При $\lambda \in \mathbb{N}$ существует также нетривиальный проективный модуль $P(-\lambda - 2)$. Его веса $\lambda, \lambda - 2, \dots, -\lambda$ имеют единичную кратность, а веса $-\lambda - 2, -\lambda - 4, \dots$ имеют кратность два. Следовательно, можно выбрать базисные векторы v_i ($i \geq 0$) и w_j ($j \geq 0$) так, что

$$\begin{aligned} f \cdot v_i &= v_{i+1}, & h \cdot v_i &= (\lambda - 2i)v_i, & e \cdot v_i &= i(\lambda - i + 1)v_{i-1}, \\ f \cdot w_i &= w_{i+1}, & h \cdot w_i &= (-\lambda - 2 - 2i)w_i, & e \cdot w_i &= -i(\lambda + i + 1)w_{i-1}, & e \cdot w_0 &= v_\lambda. \end{aligned}$$

Отметим, что у неразложимого модуля $P(-\lambda - 2)$ существует подмодуль Верма $M(\lambda)$, а также подмодуль Верма $M(-\lambda - 2)$. Факторпространство $P(-\lambda - 2)/M(\lambda)$ изоморфно модулю $M(-\lambda - 2)$, а факторпространство $P(-\lambda - 2)/M(-\lambda - 2)$ изоморфно модулю $M^\vee(\lambda)$.

3. МАСТЕР-СИММЕТРИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы дадим определения симметрий и мастер-симметрий скалярных $(1+1)$ -мерных эволюционных уравнений в частных производных и вместе с тем введем некоторые обозначения. Эти определения легко обобщить на многокомпонентные и $(2+1)$ -мерные эволюционные уравнения.

Пусть u – скалярная гладкая функция независимых переменных x и t . Рассмотрим дифференциальное уравнение с зависимой переменной u

$$u_t = K[u], \quad (3)$$

где $[u]$ означает, что гладкая функция K зависит от u и ее производных по x вплоть до некоторого конечного порядка.

Все гладкие функции, зависящие от x, t, u и производных функции u по x , образуют дифференциальное кольцо $\mathcal{F}$ с полной производной по x , заданной как

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{(k+1)x} \frac{\partial}{\partial u_{kx}},$$

где $u_{kx} = \partial_x^k u$. При малых значениях k мы будем использовать упрощенные обозначения $u, u_x, u_{xx}, \dots$ вместо $u_{0x}, u_{1x}, u_{2x}, \dots$. Высший порядок производной по x назовем порядком данной функции. Для любого элемента $g \in \mathcal{F}$ введем класс эквивалентности (или функционал) $\int g$, полагая g и h эквивалентными тогда и только тогда, когда $g - h \in \text{Im } D_x$. Пространство функционалов, обозначаемое как $\mathcal{F}'$, не наследует структуру кольца $\mathcal{F}$.

Назовем векторное поле (дифференцирование) эволюционным, если оно коммутирует с оператором D_x . В скалярном случае это векторное поле полностью определяется гладкой функцией $P \in \mathcal{F}$. Назовем ее характеристикой векторного поля:

$$\mathbf{v}_P = \sum_{k=0}^{\infty} D_x^k(P) \frac{\partial}{\partial u_{kx}}.$$

Для любых двух эволюционных векторных полей с характеристиками P и Q введем скобку Ли следующим образом:

$$[P, Q] = Q_*(P) - P_*(Q), \quad P_* = \sum_j \frac{\partial P}{\partial u_{jx}} D_x^j; \quad (4)$$

здесь P_* – производная Фреше от P . Эволюционное векторное поле образует алгебру Ли, обозначаемую как $\mathfrak{h}$. Для простоты будем говорить, что $P \in \mathfrak{h}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Эволюционное векторное поле с характеристикой P является *симметрией* системы (3) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \text{ad}_K P = \frac{\partial P}{\partial t} + [K, P] = 0. \quad (5)$$

Говорят, что уравнение *интегрируемо*, если оно обладает бесконечным набором симметрий высшего порядка.

Отметим, что если функция P не зависит явно от t , то условие симметрии сводится к $\text{ad}_K P = 0$. Поскольку правая часть уравнения (3) не зависит явно от t , можно формально найти зависящую от t симметрию P в виде (см. работу [17]) $P = \exp(-t \text{ad}_K) \phi$ для любого $\phi \in \mathcal{F}$, не зависящего явно от t . Это выражение приобретает смысл при редуцировании его к конечной сумме. В частности, если при некотором $m \in \mathbb{N}$ выполняется условие $\text{ad}_K^m \phi = 0$, то функция

$$P = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-t)^l}{l!} \text{ad}_K^l \phi$$

является симметрией уравнения (3). Более того, частная производная функции P по t порядка $r \in \mathbb{N}$, т. е. $\partial^r P / \partial t^r$, также является симметрией функции K :

$$\frac{\partial^{r+1} P}{\partial t^{r+1}} + \text{ad}_K \frac{\partial^r P}{\partial t^r} = \frac{\partial^r}{\partial t^r} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \text{ad}_K P \right) = 0.$$

В частности, это предполагает, что если P – полином по t степени p , то $\partial^p P / \partial t^p$ является не зависящей от времени симметрией функции K . Отметим, что для применимости приведенных рассуждений существенно, что K и ψ не зависят явно от времени. Это было отмечено в работе [17], где вводится понятие K -генераторов: говорят, что $\phi[x, u]$ является K -генератором степени m , если $\text{ad}_K^{m+1} \phi = 0$ и $\text{ad}_K^m \phi \neq 0$. Хорошо известные мастер-симметрии уравнения (3) являются K -генераторами первой степени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть a_0 – не зависящая от времени симметрия уравнения (3), т. е. $[a_0, K] = 0$. Говорят, что не зависящее от t эволюционное векторное поле τ является *мастер-симметрией* уравнения (3), если симметрии a_n , полученные по рекуррентным формулам

$$a_{n+1} = [\tau, a_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

взаимно коммутируют, $[a_i, a_j] = 0$, и существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $a_k = K$.

Из данного определения, очевидно, вытекает, что существование мастер-симметрии предполагает интегрируемость, а также следующее:

- 1) $\text{ad}_K^2 \tau = 0$, т. е. τ является K -генератором степени 1,
- 2) $t \text{ad}_K \tau + \tau$ — зависящая от времени симметрия уравнения (3).

Эти два предположения использовались при построении мастер-симметрии данного уравнения. Конкретные примеры можно найти в работе [26] и имеющихся там ссылках.

Мастер-симметрии можно использовать для построения иерархии сохраняющихся плотностей уравнения (3), если они существуют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем $\rho \in \mathcal{F}'$ *сохраняющейся плотностью* уравнения (3), если

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_*(K) \right) = 0.$$

Если ρ не зависит явно от t , то определение упрощается, и мы получаем

$$0 = \int \rho_*(K) = \int \mathbf{v}_K(\rho) = \int K \cdot \frac{\delta \rho}{\delta u},$$

где

$$\frac{\delta \rho}{\delta u} = \sum_j (-D_x)^j \left(\frac{\partial \rho}{\partial u_{jx}} \right)$$

есть вариационная производная функции ρ . Для любого $Q \in \mathfrak{h}$ имеем (эту формулу можно легко получить с помощью правила Лейбница для производных Ли [14])

$$\int \mathbf{v}_Q(\rho_*(K)) = \int [Q, K] \frac{\delta \rho}{\delta u} + \int K \frac{\delta \rho_*(Q)}{\delta u}. \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ρ — сохраняющаяся плотность, Q — симметрия уравнения (3). Если $\rho_*(Q) \not\equiv 0$, то эта функция также является сохраняющейся плотностью уравнения (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись определением 3, получаем

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial \rho_*(Q)}{\partial t} + (\rho_*(Q))_*(K) \right) &= \int \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_*(Q) + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{\delta \rho}{\delta u} + K \frac{\delta \rho_*(Q)}{\delta u} \right) = \\ &= \int \mathbf{v}_Q \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_*(K) \right) + \int \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + [K, Q] \right) \frac{\delta \rho}{\delta u} = 0, \end{aligned}$$

где использовано тождество (6) и определение 1. Таким образом, утверждение доказано.

Полагая $Q = \tau$ в (6) и используя определение 3, сформулируем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть ρ — не зависящая от t сохраняющаяся плотность уравнения (3). Предположим, что существует такое не зависящее от t эволюционное векторное поле τ , что $\rho_*(\text{ad}_\tau K) \equiv 0$. Если $\rho_*(\tau) \not\equiv 0$, то эта функция является сохраняющейся плотностью уравнения (3).

Комбинируем предложения 1 и 2. Если известно, что τ – мастер-симметрия, то, выбрав любое a_i , можно начать с сохраняющейся плотности ρ_0 уравнения $u_t = a_i$ и получить

$$\rho_1 \equiv \begin{cases} \rho_{0*}(\text{ad}_\tau a_i), & \text{если } \rho_{0*}(\text{ad}_\tau a_j) \neq 0, \\ \rho_{0*}(\tau), & \text{если } \rho_{0*}(\text{ad}_\tau a_j) \equiv 0. \end{cases}$$

Если $\rho_1 \neq 0$, то повторим эту процедуру и найдем ρ_2 . Таким образом мы построим бесконечный набор сохраняющихся плотностей $\rho_i \neq 0$. Если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\rho_k = 0$, то, по-видимому, уравнение $u_t = a_i$ обладает только конечным набором сохраняющихся плотностей.

В случае гамильтоновых систем мастер-симметрию можно использовать и для генерации гамильтоновых векторных полей [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{H}$ – гамильтониан. Предположим, что a_0 – гамильтоново векторное поле, т.е. существует такая функция $f \in \mathcal{F}'$, что $a_0 = \mathcal{H} \frac{\delta f_0}{\delta u}$. Если мастер-симметрия τ также является гамильтоновым векторным полем, то для всех $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \mathcal{H} \frac{\delta f_n}{\delta u}, \quad \text{где } f_n \equiv f_{n-1*}(\tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку τ является гамильтоновым векторным полем, существует такая функция $g \in \mathcal{F}'$, что $\tau = \mathcal{H} \frac{\delta g}{\delta u}$. Заметим, что

$$a_1 = [\tau, a_0] = \left[\mathcal{H} \frac{\delta g}{\delta u}, \mathcal{H} \frac{\delta f_0}{\delta u} \right] = \mathcal{H} \frac{\delta \{g, f_0\}}{\delta u} = \mathcal{H} \frac{\delta f_{0*}(\tau)}{\delta u},$$

где скобка Пуассона $\{g, f_0\}$ определяется гамильтоновым оператором $\mathcal{H}$. Таким образом, a_1 является гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом $f_1 \equiv f_{0*}(\tau)$. Далее утверждение доказывается по индукции.

Наконец, введем понятие однородности уравнения (3), что является формальным требованием метода построения мастер-симметрий, представленного в следующем разделе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем уравнение (3) *однородным* (или *α -однородным*), если существуют такие постоянные α и κ , что $[xu_x + \alpha u, K] = \kappa K$. Назовем функцию $xu_x + \alpha u$ с фиксированным таким образом значением α *масштабной симметрией* уравнения.

В следующем разделе мы покажем, что в окрестности масштабной симметрии можно построить алгебру $\mathfrak{sl}(2)$. Другими словами, это означает, что если уравнение (3) однородное, то правая часть уравнения является базисом весового пространства $M_{2\kappa}$.

4. ПОСТРОЕНИЕ МАСТЕР-СИММЕТРИЙ

В этом разделе мы предлагаем метод построения мастер-симметрий, основанный на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -модуле. Фактически концепция K -генераторов также напоминает о теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ [19]. Далее мы введем естественную алгебру $\mathfrak{sl}(2)$ для однородного уравнения и затем построим бесконечномерный модуль в категории $\mathcal{O}$ БГГ.

ЛЕММА 1. При заданной масштабной симметрии $h = 2(xu_x + \alpha u)$, где $\alpha = \text{const}$, элементы $e = u_x$ и $f = -(x^2u_x + 2\alpha xu)$ образуют алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко получается проверкой того, что три заданных выше элемента h , e и f удовлетворяют соотношению (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В лемме 1 элемент f при заданных h и e не единствен. Действительно, эти элементы образуют алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ с любым элементом $f' = f + f_0$, в котором f_0 удовлетворяет условиям $[e, f_0] = 0$ и $[h, f_0] = -2f_0$. Например, вместо $-(x^2u_x + 2\alpha xu)$ в (1) можно взять $f = -(x^2u_x + 2\alpha xu + 2)$.

Иногда для удобства вместо обозначения $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ будем использовать $\mathfrak{sl}_d(2)$, указывая на то, что три элемента этой алгебры лежат в диагональном направлении (см. диаграмму 1 далее). Отметим, что $\text{ad}_e w = \text{ad}_{u_x} w = -\partial w / \partial x$ для $w \in \mathfrak{h}$. Таким образом, мы можем рассчитать действие, обратное к действию ad_e . Это означает, что для любого $g \in \mathfrak{h}$ можно найти такой $w \in \mathfrak{h}$, что $\text{ad}_e w = g$.

ЛЕММА 2. Пусть $w = (x^3u_x + 3\alpha x^2u)/3$. Имеем $\text{ad}_e w = f$. Кроме того,

$$\text{ad}_f^n w = \frac{n!}{3} (x^{n+3}u_x + (n+3)\alpha x^{n+2}u), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$u \text{ ad}_h \text{ad}_f^n w = -2(n+2) \text{ad}_f^n w.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственными вычислениями получим

$$\text{ad}_e w = -\frac{\partial w}{\partial x} = f, \quad \text{ad}_h \text{ad}_f^n w = -2(n+2) \text{ad}_f^n w.$$

Теперь выведем соотношение (7) по индукции. Для $n = 0$ оно, очевидно, выполняется. Пусть формула справедлива для некоторого n . Тогда для $n + 1$ имеем

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^{n+1} w &= [f, \text{ad}_f^n w] = \left[-(x^2u_x + 2\alpha xu), \frac{n!}{3} (x^{n+3}u_x + (n+3)\alpha x^{n+2}u) \right] = \\ &= \frac{n!}{3} (x^2 D_x (x^{n+3}u_x + (n+3)\alpha x^{n+2}u) + 2\alpha x (x^{n+3}u_x + (n+3)\alpha x^{n+2}u)) - \\ &\quad - \frac{n!}{3} (x^{n+3} D_x (x^2u_x + 2\alpha xu) + (n+3)\alpha x^{n+2} (x^2u_x + 2\alpha xu)) = \\ &= \frac{n!}{3} ((n+1)x^{n+4}u_x + (n+1)(n+4)\alpha x^{n+3}u) = \\ &= \frac{(n+1)!}{3} (x^{n+4}u_x + (n+4)\alpha x^{n+3}u), \end{aligned}$$

и мы получаем правую часть равенства (7) для $n + 1$. Таким образом, утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Элемент w в лемме 2, удовлетворяющий условиям $\text{ad}_e w = f$ и $\text{ad}_h w = -4w$, не является единственным. Можно взять $w + w_0$ вместо w , если только $[e, w_0] = 0$ и $[h, w_0] = -4w_0$.

В силу леммы 2 нам известно, что все $\text{ad}_f^n w$ независимы над полем $\mathbb{C}$. Они образуют бесконечномерное пространство над $\mathbb{C}$. Вместе с леммой 1 мы получили

следующий $\mathfrak{sl}_d(2)$ -модуль:

$$\begin{array}{ccccccc} f & \xrightarrow{f} & f & \xleftarrow{e} & w & \xleftarrow{e} & \text{ad}_f w & \xleftarrow{e} & \text{ad}_f^2 w & \xleftarrow{e} & \cdots ; \end{array} \quad (8)$$

здесь $f \xrightarrow{N} g$ означает, что $\text{ad}_N f = \gamma g$, где γ – ненулевая константа.

Модуль (8) является факторпространством $P(-4)/M(-4)$. Этот модуль, а также та его свобода, которая отмечена в замечаниях 1 и 2, играют важную роль при построении мастер-симметрий однородных эволюционных уравнений и вычислении их зависящих от времени симметрий.

Для однородного эволюционного уравнения (3) независимо от того, интегрируемо оно или нет, существует алгебра $\mathfrak{sl}_d(2)$, а также ее бесконечномерный модуль вида (8). В следующей теореме мы утверждаем, что $\text{ad}_f K$ (или $\text{ad}_{f'} K$ согласно замечанию 1) является мастер-симметрией для интегрируемого уравнения $u_t = K[u]$ при определенных условиях.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_0 = e$ и $a_1 \in \mathfrak{h}$ удовлетворяют условиям

$$[a_0, a_1] = 0, \quad [h, a_1] = [2(xu_x + \alpha u), a_1] = \lambda a_1, \quad \lambda > 2,$$

при постоянном значении α . Пусть $f = -(x^2 u_x + 2\alpha x u)$. Положим

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} \text{ad}_f a_1, \quad a_{n+1} = [\tau, a_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Предположим, что существует такая постоянная $s \geq 2$, что:

- 1) $[a_{n-1}, a_n] = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots, s$;
 - 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ из условия $[[a_n, a_{n+1}], a_k] = 0$, где $0 \leq k \leq s-1$, следует существование такого $m \leq 2s \in \mathbb{N}$, что $[a_n, a_{n+1}] = \sum_{j=0}^m \gamma_j a_j$, где γ_j – постоянные.
- Тогда все a_n взаимно коммутируют, т. е. $[a_i, a_j] = 0$ для любых $i, j = 0, 1, 2, \dots$.

Прежде чем мы дадим доказательство этой теоремы, проверим, согласуется ли определение $a_1 = [\tau, a_0]$ с определением мастер-симметрии τ . В самом деле,

$$[\tau, a_0] = [\tau, e] = -\frac{1}{\lambda} [[f, a_1], e] = \frac{1}{\lambda} ([[e, f], a_1] + [[a_1, a_0], f]) = \frac{1}{\lambda} [h, a_1] = a_1.$$

Доказательство теоремы 1 очень похоже на доказательство τ -схемы в книге [14]. Однако для лучшего понимания статьи мы приведем подробное доказательство теоремы и начнем с доказательства двух лемм.

ЛЕММА 3. Предположим, что элементы a_n введены, как в теореме 1. Тогда $[h, a_n] = (n\lambda - 2n + 2)a_n$ для $n = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение по индукции. Когда $n = 0$, оно справедливо по нашему предположению. Допустим, что утверждение справедливо при некотором n . Для $n + 1$ с помощью тождества Якоби получим

$$\begin{aligned} [h, a_{n+1}] &= [h, [\tau, a_n]] = -[\tau, [a_n, h]] - [a_n, [h, \tau]] = \\ &= (n\lambda - 2n + 2)[\tau, a_n] - (\lambda - 2)[a_n, \tau] = ((n + 1)\lambda - 2n)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что $\tau = (1/\lambda)[a_1, f]$ имеет вес $\lambda - 2$.

ЛЕММА 4. *Предположим, что a_n введены, как в теореме 1, и $[a_{n-1}, a_n] = 0$ при $n \leq l$. Тогда $[a_m, a_n] = 0$ для всех $m + n \leq 2l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова дадим доказательство по индукции. Справедливость этого утверждения при $l = 0$ тривиальна. Пусть утверждение справедливо при некотором l . Докажем это утверждение при $l + 1$. Без ограничения общности предположим, что $m \leq n$ для всех пар m и n . Возможны три случая: либо $m + n \leq 2l$, либо $m + n = 2l + 1$, либо $m + n = 2l + 2$.

Случай $m + n \leq 2l$ покрывается предположением индукции и не нуждается в доказательстве.

Для двух других случаев предположим, что $m < n$ без ограничения общности. Воспользовавшись тождеством Якоби, имеем

$$\begin{aligned} [a_m, a_n] &= [a_m, [\tau, a_{n-1}]] = -[\tau, [a_{n-1}, a_m]] - [a_{n-1}, [a_m, \tau]] = \\ &= -[\tau, [a_{n-1}, a_m]] + [a_{n-1}, a_{m+1}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для случая $m + n = 2l + 1$ известно, что $[a_{n-1}, a_m] = 0$, поскольку $m + n - 1 \leq 2l$. Таким образом, получим

$$[a_m, a_n] = [a_{n-1}, a_{m+1}] = -[a_{m+1}, a_{n-1}].$$

Повторно применяя это тождество, получим $[a_m, a_n] = (-1)^{(n-m-1)/2} [a_l, a_{l+1}]$, что обращается в нуль по нашему предположению.

Для случая $m + n = 2l + 2$ имеем $[a_{n-1}, a_m] = 0$, поскольку $m + n - 1 \leq 2l + 1$. Как и в предыдущем случае, получим

$$[a_n, a_m] = [a_{l+1}, a_{l+1}] = 0,$$

и, таким образом, доказательство закончено.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Нам нужно только показать, что $[a_{n-1}, a_n] = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Сделаем это по индукции.

Из условия 1 теоремы следует справедливость этого тождества при $n = 1, 2, \dots, s$. Предположим, что оно справедливо при $n \leq l$ и $l \geq s$. При $n = l + 1$ имеем согласно тождеству Якоби

$$[[a_l, a_{l+1}], a_k] = -[[a_{l+1}, a_k], a_l] - [[a_k, a_l], a_{l+1}].$$

Из леммы 4 следует, что $[a_{l+1}, a_k] = [a_k, a_l] = 0$, поскольку $l + 1 + k \leq 2l$ для $0 \leq k \leq s - 1$. Это приводит к соотношению

$$[[a_l, a_{l+1}], a_k] = 0, \quad 0 \leq k \leq s - 1.$$

Выписанное выражение подразумевает, что $[a_l, a_{l+1}] = \sum_{j=0}^m \gamma_j a_j$, где число $m \leq 2s$ взято из условия 2 теоремы. Воспользуемся ad_h , действовав на обе части последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} 0 &= [h, [a_l, a_{l+1}]] - \sum_{j=0}^m \gamma_j [h, a_j] = \\ &= [[h, a_l], a_{l+1}] + [a_l, [h, a_{l+1}]] - \sum_{j=0}^m \gamma_j (j\lambda - 2j + 2) = \\ &= \sum_{j=0}^m (\lambda + (2l - j)(\lambda - 2)) \gamma_j a_j. \end{aligned}$$

Поскольку $l \geq s$ и $\lambda > 2$, имеем $\lambda + (2l - j)(\lambda - 2) > 2$ для всех $0 \leq j \leq m \leq 2s$. Таким образом, все $\gamma_j = 0$, поскольку a_j независимы над полем $\mathbb{C}$. Это приводит к тождеству $[a_l, a_{l+1}] = 0$, что завершает доказательство.

На основании доказанной теоремы мы заключаем, что $[e, a_n] = 0$, где a_n имеет вес $(\lambda - 2)n + 2$ при $\lambda > 2$. Поэтому, начиная с вектора высшего веса a_n , получим пространство, порожденное элементами $\text{ad}_f^j a_n$, где $j = 0, 1, 2, \dots$, которое является $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{e, h, f\}$ -модулем категории $\mathcal{O}$ БГГ. Если при фиксированном n существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $\text{ad}_f^{k+1} a_n = 0$, то множество $\{\text{ad}_f^j a_n \mid j = 0, 1, 2, \dots, k\}$ является конечномерным простым модулем $L((\lambda - 2)n + 2) = L(k)$. В этом случае можно найти такое $\bar{w}$, что $\text{ad}_e \bar{w} = \text{ad}_f^k a_n$, как и в лемме 2. Таким образом, множество

$$\{\text{ad}_f^j a_n, \text{ad}_f^l \bar{w} \mid j = 0, 1, 2, \dots, k, \quad l = 0, 1, 2, \dots\}$$

является $\mathfrak{sl}(2)$ -модулем $P(-(\lambda - 2)n - 4)/M(-(\lambda - 2)n - 4)$.

Непосредственное использование теоремы 1 заключается в построении мастер-симметрии для уравнения (3).

ТЕОРЕМА 2. *Для однородного эволюционного уравнения $u_t = K[u]$, удовлетворяющего условиям*

$$[u_x, K] = 0, \quad [xu_x + \alpha u, K] = \kappa K, \quad \kappa > 1,$$

при некоторой постоянной α , введем

$$\tau = \frac{1}{2\kappa} [x^2 u_x + 2\alpha x u, K],$$

при этом $a_{n+1} = [\tau, a_n]$ и $a_0 = e = u_x$. Предположим, что:

- 1) $[[\tau, K], K] = 0$;
- 2) *существует такая подалгебра Ли $\mathfrak{h}'$, что $a_n \in \mathfrak{h}'$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, и, кроме того, $[P, Q] = 0$ для любых элементов $P, Q \in \mathfrak{h}'$, удовлетворяющих условиям $[P, e] = [Q, e] = [P, K] = [Q, K] = 0$.*

Тогда τ является мастер-симметрией уравнения $u_t = K[u]$, т. е. все a_n взаимно коммутируют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя определению, имеем

$$a_1 = [\tau, a_0] = \frac{1}{2\kappa} [[-f, K], e] = K.$$

Таким образом, при данных условиях справедлива теорема 1 для $s = 2$. Это приводит к тому, что τ является мастер-симметрией уравнения.

Теорема 2 дает способ построения мастер-симметрий для однородных эволюционных уравнений. Кроме того, начиная с любого a_n , полученного в этой теореме, можно построить бесконечномерный $\mathfrak{sl}(2)$ -модуль. Мы назовем эту структуру $\mathcal{O}$ -схемой и представим ее в виде диаграммы 1.

ДИАГРАММА 1. $\mathcal{O}$ -схема для $u_t = K[u]$.

Покажем, что элементы в горизонтальных направлениях связаны с t -коэффициентами зависящих от t симметрий уравнения $u_t = K$. Сначала сделаем несколько замечаний к теореме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие $\kappa > 1$ тривиально выполняется для всех скалярных однородных уравнений с линейными членами порядка выше единицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Мы часто игнорируем постоянный множитель в τ (поскольку он не влияет на коммутативность a_j) и пишем просто $\tau = [x^2 u_x + 2\alpha x u, K]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условие 2 в теореме 1 является формальным и только один раз используется в доказательстве. Соответствующее условие в теореме 2 представляет собой особый случай. Оно справедливо для скалярных однородных полиномиальных уравнений с линейными членами. Мы знаем по построению, что все a_n принадлежат подалгебре Ли однородных полиномиальных векторных полей с ненулевыми линейными членами. Все полиномиальные симметрии таких уравнений, не зависящие от x и t , начинаются с линейных членов [27]. В скобке Ли двух симметрий, которая тоже является симметрией, линейных членов нет. Поэтому она должна равняться нулю. Это рассуждение можно обобщить на многокомпонентные однородные

полиномиальные интегрируемые системы с ненулевыми линейными членами [28]. Все примеры следующего раздела относятся к этому классу.

ЛЕММА 5. В рамках условий теоремы 2 для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f^{n-1} a_j = \mathrm{ad}_K^n \mathrm{ad}_f^{n-1} a_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение по индукции. При $n = 1$ утверждение совпадает с результатом теоремы 2. Предположим, что оно доказано при всех значениях, меньших n . Докажем то же утверждение для n . Отметим сначала, что для всех $m \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\mathrm{ad}_K^m \mathrm{ad}_f = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \mathrm{ad}_{(\mathrm{ad}_K^i f)} \mathrm{ad}_K^{m-i} = \sum_{i=0}^2 \binom{m}{i} \mathrm{ad}_{(\mathrm{ad}_K^i f)} \mathrm{ad}_K^{m-i}, \quad (10)$$

поскольку $\mathrm{ad}_K^i f = 0$ при $i \geq 3$. Таким образом,

$$\mathrm{ad}_K^n \mathrm{ad}_f^{n-1} a_j = \sum_{i=0}^2 \binom{n}{i} \mathrm{ad}_{(\mathrm{ad}_K^i f)} \mathrm{ad}_K^{n-i} \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j = \binom{n}{2} \mathrm{ad}_{(\mathrm{ad}_K^2 f)} \mathrm{ad}_K^{n-2} \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j.$$

Здесь используется предположение индукции $\mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j = 0$. Кроме того, мы знаем, что $\mathrm{ad}_K^2 f$ и $\mathrm{ad}_K^{n-2} \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j$ коммутируют с K и $e = u_x$. Таким образом, имеем $\mathrm{ad}_{(\mathrm{ad}_K^2 f)} \mathrm{ad}_K^{n-2} \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j = 0$ по условию 2 теоремы 2.

Покажем теперь, что $\mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f^{n-1} a_j = 0$. Получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f^{n-1} a_j &= \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_f^{n-1} a_j = \\ &= \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_h \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j + \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f \mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j = \\ &= \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f^2 \mathrm{ad}_e \mathrm{ad}_f^{n-3} a_j = \mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f^{n-1} \mathrm{ad}_e a_j = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались условием $\mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_h \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j = \mathrm{ad}_K^{n-2} \mathrm{ad}_h \mathrm{ad}_K \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j = 0$ и предположением индукции $\mathrm{ad}_K^{n-1} \mathrm{ad}_f^{n-2} a_j = 0$. На этом доказательство закончено.

Отметим, что $\mathrm{ad}_f^n a_j$ может равняться нулю при фиксированном j , если n больше j . В данном случае можно определить значения n при фиксированном j . Если $\mathrm{ad}_f^n a_j \neq 0$, то такие функции являются K -генераторами степени n , что следует из леммы 5. Итак, зависящие от t симметрии уравнения (3) имеют вид

$$\exp(-t \mathrm{ad}_K)(\mathrm{ad}_f^n a_j).$$

Отметим также, что при заданной степени t и заданном порядке полинома существует единственная независимая симметрия. Например, симметрии

$$\frac{\partial}{\partial t} (\exp(-t \mathrm{ad}_K) \mathrm{ad}_f^2 a_1), \quad \exp(-t \mathrm{ad}_K) \mathrm{ad}_f a_2$$

зависимы в том смысле, что разность между ними выражается через сумму симметрий низшего порядка. Поэтому, чтобы генерировать независимые симметрии, нам нужны элементы только на контуре диаграммы 1. Следующее утверждение отвечает на вопрос, в каком случае функции $\mathrm{ad}_f^j w$ при $j = 0, 1, 2, \dots$ являются K -генераторами.

ЛЕММА 6. *Предположим, что существует такое число $r \in \mathbb{N}$, что $\text{ad}_K^r w = 0$ и $\text{ad}_e \text{ad}_K^{r-1} w = 0$. В рамках условий теоремы 2 имеем*

$$\text{ad}_e \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_f^n w = \text{ad}_K^{n+r} \text{ad}_f^n w = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству леммы 5. Докажем утверждение по индукции. При $n = 0$ имеем условие леммы. Предположим, что утверждение доказано при всех значениях, меньших n . Докажем его для n . Применив формулу (10), получим

$$\text{ad}_K^{n+r} \text{ad}_f^n w = \sum_{i=0}^2 \binom{n+r}{i} \text{ad}_{(\text{ad}_K^i f)} \text{ad}_K^{n+r-i} \text{ad}_f^{n-1} w = \binom{n}{2} \text{ad}_{(\text{ad}_K^2 f)} \text{ad}_K^{n+r-2} \text{ad}_f^{n-1} w.$$

Здесь использовано предположение индукции $\text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_f^{n-1} w = 0$. Поскольку как $\text{ad}_K^{n+r-2} \text{ad}_f^{n-1} w$, так и $\text{ad}_K^2 f$ коммутируют с K и $e = u_x$, мы имеем по условию 2 теоремы 2

$$\text{ad}_{(\text{ad}_K^2 f)} \text{ad}_K^{n+r-2} \text{ad}_f^{n-1} w = 0.$$

Покажем теперь, что $\text{ad}_e \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_f^n w = 0$. Запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \text{ad}_e \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_f^n w &= \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_e \text{ad}_f^n w = \\ &= \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_h \text{ad}_f^{n-1} w + \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_f \text{ad}_e \text{ad}_f^{n-1} w = \\ &= \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_f^n \text{ad}_e w = \text{ad}_K^{n+r-1} \text{ad}_f^n f = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Из диаграммы 1 и леммы 5 следует, что вместо того чтобы непосредственно искать такое целое r , что $\text{ad}_K^r w = 0$, можно проверить, существует ли такая постоянная $\gamma \neq 0$, что

$$\text{ad}_K w = \gamma \text{ad}_f^2 K = \gamma \text{ad}_f^2 a_1.$$

Если это так, то w — K -генератор степени 3, т.е. $\text{ad}_K^4 w = 0$. Кроме того, γ можно выразить через вес K .

ЛЕММА 7. *Пусть элементы f, h и w такие же, как и в леммах 1 и 2. Предположим, что $[h, K] = 2\kappa K$, где $\kappa > 1$. Если $\gamma \text{ad}_K w = \text{ad}_f^2 K$, то $\gamma = 2 - 4\kappa$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $\partial w / \partial x = -f$ и $\partial f / \partial x = -h$. Продифференцируем обе части выражения $\gamma \text{ad}_K w = \text{ad}_f^2 K$ по x и получим

$$\gamma \text{ad}_K(-f) = [-h, [f, K]] + [f, [-h, K]] = (-(2\kappa - 2) - 2\kappa)[f, K],$$

и это означает, что $\gamma = 2 - 4\kappa$, поскольку $[f, K] \neq 0$.

Таким образом, получен следующий результат относительно зависящих от t симметрий уравнения (3).

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что однородное уравнение $u_t = K[u]$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть эволюционное векторное поле w удовлетворяет условиям*

$$\text{ad}_e w = f, \quad \text{ad}_K w = \frac{1}{2 - 4\kappa} \text{ad}_f^2 K.$$

Тогда

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \exp(-t \operatorname{ad}_K)(\operatorname{ad}_f^n w), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n + 2,$$

являются зависящими от t симметриями уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было показано ранее, при сделанном в теореме предположении функция w является K -генератором степени 3. Из леммы 2 нам известно, что $\operatorname{ad}_f^j w \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, и мы имеем $\operatorname{ad}_K^{n+4} \operatorname{ad}_f^n w = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что следует из леммы 6. Поэтому симметрия $\exp(-t \operatorname{ad}_K)(\operatorname{ad}_f^n w)$ является полиномом по t степени $n + 3$. Поскольку уравнение не зависит от x и t явно, частная производная симметрии по t тоже является симметрией.

Отметим, что для некоторых уравнений, таких как уравнение Бюргерса, которое мы рассмотрим в следующем разделе, теорема 3 не дает все зависящие от времени симметрии.

5. ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом разделе мы продемонстрируем подход, развитый в разделе 4, в применении к построению мастер-симметрий как для многокомпонентных, так и для многомерных эволюционных уравнений. Мы применим теорему 2 к некоторым новым уравнениям. Чтобы сравнить наш метод с существующими, мы привлечем также некоторые хорошо известные примеры, такие как уравнение Бюргерса.

5.1. (1+1)-мерные дифференциальные уравнения. В этом пункте, используя подход, развитый в разделе 4, мы воспроизведем уже известные результаты, относящиеся к мастер-симметриям для нескольких примеров типичных уравнений, таких как уравнение Бюргерса (однокомпонентное однородное уравнение), уравнение Ландау–Лифшица (двухкомпонентное неоднородное уравнение) и уравнение Бенджамина–Оно (интегро-дифференциальное уравнение). В то же время мы сравним наш подход с уже существующими методами.

5.1.1. Уравнение Бюргерса. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$u_t = K = u_{xx} + uu_x, \quad (11)$$

которое является однородным при $\alpha = 1$. Имеем в этом случае $[xu_x + u, K] = 2K$. Согласно теореме 2 мастер-симметрия этого уравнения имеет вид

$$\tau = \frac{1}{4}[x^2 u_x + 2xu, K] = x(u_{xx} + uu_x) + \frac{3}{2}u_x + \frac{1}{2}u^2,$$

поскольку

$$a_2 = [\tau, K] = 2u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + \frac{3}{2}u^2 u_x$$

и $[[\tau, K], K] = 0$, а условие 2 теоремы тривиальным образом удовлетворяется, что следует из замечания 5.

Обсудим теперь зависящие от времени симметрии уравнения (11). Пусть

$$w = \frac{1}{3}x^3 u_x + x^2 u.$$

Отметим, что

$$\operatorname{ad}_K w = -2(x^2 u u_x + x^2 u_{xx} + 3x u_x + x u^2 + u) = -\frac{1}{6} \operatorname{ad}_f^2 K.$$

Согласно теореме 3 можно выписать зависящие от времени симметрии для уравнения (11). Например,

$$\begin{aligned} S = \exp(-t \operatorname{ad}_K) w = & \frac{4}{3} t^3 (2u_{4x} + 4u u_{3x} + 10u_x u_{xx} + 3u^2 u_{xx} + 6u u_x^2 + u^3 u_x) + \\ & + t^2 (x(4u_{3x} + 6u u_{xx} + 6u_x^2 + 3u^2 u_x) + 8u_{xx} + 10u u_x + u^3) + \\ & + 2t(x^2(u_{xx} + u u_x) + x(3u_x + u^2) + u) + \frac{1}{3} x^3 u_x + x^2 u \end{aligned}$$

и $\partial^j S / \partial t^j$ при $j = 0, 1, 2$ будут зависящими от времени симметриями. Сравнивая со списком зависящих от t симметрий S_n , $n = 1, 2, 3, 4$, уравнения Бюргерса, приведенном во введении, получим

$$\frac{\partial S_4}{\partial t} = \frac{3}{2} S + 3 S_2.$$

Из леммы 5 следует, что обе функции $\operatorname{ad}_f a_2$ и $\operatorname{ad}_f^2 a_1$ являются K -генераторами. Однако они не порождают новых симметрий. В самом деле, имеем

$$\exp(-t \operatorname{ad}_K)(\operatorname{ad}_f a_2) = -\frac{3}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \quad \exp(-t \operatorname{ad}_K)(\operatorname{ad}_f^2 a_1) = 6 \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Мастер-симметрии и зависящие от времени симметрии уравнения Бюргерса известны в литературе (см., например, работы [17], [29]). Обсудим теперь, каким образом можно объяснить другие подходы в рамках представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2)$.

В работе [19] построены две различные алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в окрестности масштабной симметрии $h = x u_1 + u$ с генераторами e_i , h_i и f_i , $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_h(2, \mathbb{C}): \quad e_1 &= K = u_{xx} + u u_x, \quad f_1 = -x, \quad h_1 = \frac{h}{2} = x u_x + u; \\ \mathfrak{sl}_v(2, \mathbb{C}): \quad e_2 &= 1, \quad f_2 = -2\tau = -2x(u_{xx} + u u_x) - 3u_x - u^2, \quad h_2 = -h = -2(x u_x + u). \end{aligned}$$

Вместо f_2 здесь можно взять любую функцию $f_2 + \beta u_x$, где β – постоянная. Чтобы обеспечить согласованность с ранее введенной симметрией τ , выберем ее в алгебре $\mathfrak{sl}_v(2, \mathbb{C})$. Представим эти алгебры на диаграмме вместе с алгеброй $\mathfrak{sl}_d(2)$, взятой из леммы 1 (см. диаграмму 2).

Здесь три алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ представляют собой основу различных методов построения мастер-симметрий. τ -Схема Дорфмана [14] основана на алгебре $\mathfrak{sl}_v(2)$. Поскольку $[h_2, a_0] = -2a_0$ и $[e_2, a_0] = 0$, симметрии a_j являются базисом модуля Верма $M(-2)$ алгебры $\mathfrak{sl}_v(2)$. Элемент τ в τ -схеме уже известен. Так что его можно использовать только при доказательстве того, что τ действительно является мастер-симметрией.

Поскольку $[a_n, K] = 0$ и $[h_1, a_n] = (n+1)a_n$, пространство, натянутое на множество

$$\{\operatorname{ad}_{f_1}^i a_n \mid i = 0, 1, \dots, n+1\},$$

является $(n+2)$ -мерным неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{sl}_h(2)$. Это теория, стоящая за методом Фуксштайнера в работе [17]. Согласно этому методу мастер-

 ДИАГРАММА 2. Три алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ для уравнения Бюргерса.

симметрией для уравнения $u_t = K[u]$ является $[a_2, f_1]$. В самом деле, для уравнения Бюргерса функция

$$[a_2, f_1] = 3x(u_{xx} + uu_x) + 6u_x + \frac{3}{2}u^2 = 3\tau + \frac{3}{2}u_x$$

является мастер-симметрией, поскольку $[u_x, a_n] = 0$.

Метод, предложенный в настоящей работе, основан на алгебре $\mathfrak{sl}(2)$. По сути этот метод был впервые использован в работе [19] для уравнения Ибрагимова–Шабата

$$u_t = u_{xxx} + 3u^2u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4u_x \quad (12)$$

и уравнения КП (мы вернемся к нему в п. 5.2.1). Позже в работе [20] Финкель и Фокас приспособили этот метод (не конкретизируя алгебру $\mathfrak{sl}(2)$) для работы с нелокальными мастер-симметриями, такими как симметрии для уравнения Савады–Котера. Преимущество в использовании $\mathfrak{sl}_d(2)$ вместо другой алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ заключается в том, что она является свободной структурой для однородного эволюционного уравнения. Не нужно искать e_2 и f_1 . Более того, для некоторых интегрируемых уравнений их не существует, например для уравнения Ибрагимова–Шабата. Мы не получили f_1 , следовательно, мы не нашли все зависящие от t симметрии.

Наконец, заметим, что использование факторпространства $P(-4)/M(-4)$ (см. диаграмму (8)) вместо одной только алгебры $\mathfrak{sl}_d(2)$ позволяет нам найти больше зависящих от времени симметрий (но, возможно, не все). Это привело к тому, что некоторые зависящие от t симметрии уравнения (12) отсутствуют в работе [19], на что было указано в работе [30].

5.1.2. Уравнение Ландау–Лифшица. Рассмотрим уравнение Ландау–Лифшица

$$\mathbf{S}_t = K = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \wedge J\mathbf{S}, \quad (13)$$

где $\mathbf{S}$ – вектор-функция от x и t в $\mathbb{R}^3$ при $|\mathbf{S}| = 1$, $\wedge$ означает векторное произведение, а J – постоянная диагональная (3×3) -матрица. Это неоднородное уравнение относительно одной зависимой переменной $\mathbf{S}$. Однако, если добавить уравнение $J_t = 0$, система становится однородной и удовлетворяет условию

$$\left[\begin{pmatrix} x\mathbf{S}_x + \alpha\mathbf{S} \\ xJ_x + 2J \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \right] = (2 + \alpha) \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя теореме 2, введем τ как первую компоненту (вторую компоненту можно опустить, поскольку она всегда нулевая) столбца

$$\frac{1}{2(2+\alpha)} \left[\begin{pmatrix} x^2 \mathbf{S}_x + 2x\alpha \mathbf{S} \\ x^2 J_x + 4xJ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x(\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \wedge J\mathbf{S}) + \frac{1+2\alpha}{2+\alpha} \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим теперь условие 1 теоремы 2. Сначала вычислим

$$\begin{aligned} a_2 = [\tau, K] &= \left(2 + \frac{1+2\alpha}{2+\alpha} \right) \mathbf{S} \wedge (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_{xx}) + 2\mathbf{S} \wedge (\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xxx}) + \\ &+ 2\mathbf{S} \wedge (\mathbf{S}_x \wedge J\mathbf{S}) + \left(2 - \frac{1+2\alpha}{2+\alpha} \right) \mathbf{S} \wedge (\mathbf{S} \wedge J\mathbf{S}_x) + \frac{1+2\alpha}{2+\alpha} \mathbf{S} \wedge J(\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x), \end{aligned}$$

используя условия $|\mathbf{S}| = 1$ и $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_x = 0$. Прямое вычисление показывает, что эта функция коммутирует с K при $\alpha = 1$. Условие 2 теоремы было явно доказано в работе [31].

Таким образом, мы получили мастер-симметрию

$$\tau = x(\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \wedge J\mathbf{S}) + \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x, \quad (14)$$

которая совпадает с мастер-симметрией, полученной в работе [31]. Она генерирует иерархию симметрий любого порядка, начиная с $a_0 = \mathbf{S}_x$. Эти симметрии можно также получить с помощью рекурсионных операторов. Для уравнения Ландау–Лифшица существуют два слабо нелокальных [32] рекурсионных оператора второго и третьего порядка, которые связаны уравнением эллиптической кривой [33]. Чтобы получить все симметрии, порожденные мастер-симметрией (14), нужно использовать оба оператора.

Теперь вычислим зависящие от времени симметрии уравнения (13). Прежде всего, имеем

$$\text{ad}_{\bar{K}} w = -\frac{1}{10} \text{ad}_f^2 \bar{K}, \quad (15)$$

где

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x^3 \mathbf{S}_x + x^2 \mathbf{S} \\ \frac{1}{3}x^3 J_x + 2x^2 J \end{pmatrix}, \quad f = -\begin{pmatrix} x^2 \mathbf{S}_x + 2x \mathbf{S} \\ x^2 J_x + 4xJ \end{pmatrix}.$$

Отметим, что вторая компонента функции $\text{ad}_{\bar{K}} w$ равна нулю. Такими же будут и все функции $\text{ad}_{\bar{K}} \text{ad}_f^n w$. Их первые компоненты обозначим как w_n и $\text{ad}_K^{n+3} w_n = 0$. Согласно теореме 3 зависящие от времени симметрии уравнения (13) имеют вид

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \exp(-t \text{ad}_K) w_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n+1.$$

5.1.3. Уравнение типа Бенжамино–Оно. Михайлов и Новиков в работе [34] провели классификацию уравнений типа Бенджамина–Оно с высшими симметриями, используя пертурбативный симметричный подход в символьном представлении. Здесь мы построим мастер-симметрию для следующего уравнения из их списка:

$$u_t = K = H(u_{xx}) + D_x \left(\frac{1}{2} c_1 u^2 + \frac{1}{2} c_2 H(u^2) - c_2 u H(u) \right), \quad (16)$$

где c_1 и c_2 – постоянные, а H означает преобразование Гильберта,

$$H(f) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy, \quad i^2 = -1.$$

Отметим, что при $c_1 = 2$ и $c_2 = 0$ оно сводится к хорошо известному уравнению Бенджамина–Оно

$$u_t = K = H(u_{xx}) + 2uu_x. \quad (17)$$

Симметрии высшего порядка и законы сохранения уравнения типа Бенджамина–Оно содержат вложенное преобразование Гильберта, так что требуется соответствующее расширение дифференциального кольца. Подробности этого расширения можно найти в работе [34]. Оно очень похоже на то, что предложили Михайлов и Ямилов в работе [35] для $(2+1)$ -мерных уравнений, которые мы рассмотрим в п. 5.2.

Применим теперь теорему 2 к построению мастер-симметрии уравнения (16). Сначала заметим, что это уравнение однородно, поэтому

$$[xu_x + u, K] = 2K.$$

В работе [34] доказано, что символьные представления его симметрий начинаются с линейных по u членов. Согласно замечанию 1 условие 2 теоремы 2 удовлетворяется. Пусть

$$\tau = \frac{1}{4}[x^2u_x + 2xu, K] = xK + \frac{3}{2}H(u_x) + \frac{1}{2}c_1u^2 + \frac{1}{2}c_2H(u^2) - c_2uH(u). \quad (18)$$

Имеем

$$\begin{aligned} a_2 = [\tau, K] &= 2u_{xxx} + \frac{c_1}{2}D_x(3H(uu_x) + 3uH(u_x) + c_1u^3) + \\ &+ \frac{c_2}{2}D_x(-3H(u_xH(u)) - 3H(u)H(u_x) - 3c_1u^2H(u) + c_1H(u^3)) + \\ &+ \frac{c_2^2}{2}D_x(u^3 - 3H(u^2H(u)) + 3uH^2(u)) \end{aligned}$$

и $[a_2, K] = 0$. Здесь мы учли связь $H^2 = 1$ и правило Гильберта–Лейбница

$$H(fg) = fH(g) + gH(f) - H(H(f)H(g)).$$

Таким образом, τ вида (18) является мастер-симметрией. Если $c_1 = 2$ и $c_2 = 0$, то получим мастер-симметрию уравнения (17), найденную в работе [12].

Как указывалось в разделе 3, мастер-симметрию можно использовать для построения сохраняющихся плотностей. Уравнение (16) является гамильтоновым с гамильтонианом $\mathcal{H} = D_x$. Действительно,

$$u_t = D_x \frac{\delta \rho_1}{\delta u} = D_x \left(H(u_x) + \frac{1}{2}c_1u^2 + \frac{1}{2}c_2H(u^2) - c_2uH(u) \right),$$

где

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \left(uH(u_x) + \frac{1}{3}c_1u^3 + c_2uH(u^2) \right).$$

Кроме того, имеем

$$\tau = D_x \left(x \frac{\delta \rho_1}{\delta u} + \frac{1}{2} H(u) \right) = D_x \frac{\delta(x \rho_1)}{\delta u}.$$

Пусть $\rho_0 = u^2/2$, что соответствует $a_0 = u_x = D_x \frac{\delta \rho_0}{\delta u}$. Из предложения 3 следует, что симметрии $a_n = [\tau, a_{n-1}]$ суть гамильтоновы векторные поля и $a_n = D_x \frac{\delta \rho_n}{\delta u}$, где $\rho_n \equiv \rho_{n-1*}(\tau)$. Можно проверить, что $\rho_1 \equiv \rho_{0*}(\tau)$, и найти

$$\begin{aligned} \rho_2 \equiv \rho_{1*}(\tau) &\equiv \frac{\delta \rho_1}{\delta u} D_x \left(\frac{1}{2} H(u) + x \frac{\delta(\rho_1)}{\delta u} \right) \equiv \frac{1}{2} \frac{\delta \rho_1}{\delta u} \left(H(u_x) + \frac{\delta(\rho_1)}{\delta u} \right) \equiv \\ &\equiv -u_x^2 + \frac{c_1}{4} \left(3u^2 H(u_x) + \frac{c_1}{2} u^4 \right) + \frac{c_2}{2} (-3u H(u) H(u_x) - c_1 u^3 H(u)) + \\ &\quad + \frac{c_2^2}{4} \left(3u^2 H^2(u) + \frac{u^4}{2} \right). \end{aligned}$$

Если положить $c_1 = 2$ и $c_2 = 0$, то получим известные законы сохранения [12] для уравнения Бенджамина–Оно (17).

5.2. (2+1)-мерные уравнения в частных производных. Развитый в разделе 4 метод построения мастер-симметрий справедлив и для (2+1)-мерных уравнений в частных производных. Типичным примером является уравнение КП

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + 3D_x^{-1} D_y u_y, \quad (19)$$

где зависимая переменная u – гладкая функция независимых переменных x , y и t , а D_x^{-1} – формальный оператор, обратный к оператору полной производной по x . Основным препятствием для непосредственного обобщения теории (1+1)-мерных нелинейных эволюционных уравнений на (2+1)-мерные уравнения является нелокальность. Понятие законов сохранения и симметричный подход к проверке интегрируемости [4] в основном базируются на локальности. Михайлов и Ямилов исследовали проблему нелокальности в работе [35]. Они отметили, что операторы D_x^{-1} и D_y^{-1} никогда не появляются поодиночке, а только в паре типа $D_x^{-1} D_y$ и $D_y^{-1} D_x$ для всех известных интегрируемых уравнений и их иерархий симметрий и законов сохранения. Основываясь на этом наблюдении, они ввели понятие квазилокальных функций, которые являются естественным обобщением локальных функций. С помощью символического представления было доказано, что это наблюдение верно для интегрируемых уравнений, полученных из скалярных операторов Лакса определенного типа [36].

Обозначим производные зависимой переменной u по независимым переменным x и y через $u_{i,j,y} = \partial_x^i \partial_y^j u$. Иногда для малых i и j мы будем выписывать индексы явно, т.е. использовать u_{xxy} и u вместо $u_{2x,1y}$ и $u_{0x,0y}$. Все гладкие функции, зависящие от x , y , t и производных от u , образуют дифференциальное кольцо $\mathcal{F}$ с полными производными по x и y следующего вида:

$$D_x = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{(i+1)x,jy} \frac{\partial}{\partial u_{ix,jy}}, \quad D_y = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ix,(j+1)y} \frac{\partial}{\partial u_{ix,jy}}.$$

Положим

$$\Theta = D_x^{-1} D_y, \quad \Theta^{-1} = D_y^{-1} D_x. \quad (20)$$

Чтобы ввести определение квазилокальных функций $\mathcal{F}(\Theta)$, введем последовательность расширений кольца $\mathcal{F}$ следующим образом.

Пусть $\Theta\mathcal{F} = \{\Theta f \mid f \in \mathcal{F}\}$ и $\Theta^{-1}\mathcal{F} = \{\Theta^{-1}f \mid f \in \mathcal{F}\}$. Пусть $\mathcal{F}_0(\Theta) = \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_k(\Theta)$ – замыкание кольца

$$\mathcal{F}_{k-1}(\Theta) \cup \Theta\mathcal{F}_{k-1}(\Theta) \cup \Theta^{-1}\mathcal{F}_{k-1}(\Theta).$$

Здесь индекс k означает максимальную глубину вложения операторов $\Theta^{\pm 1}$ в данном выражении. Очевидно, $\mathcal{F}_{k-1}(\Theta) \subset \mathcal{F}_k(\Theta)$. Введем теперь $\mathcal{F}(\Theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}_k(\Theta)$. При этом для данного $f \in \mathcal{F}(\Theta)$ существует такое k , что $f \in \mathcal{F}_k(\Theta)$. Отметим, что $\mathcal{F}(\Theta)$ не инвариантно по отношению к преобразованиям переменных.

Поскольку зависимые переменные зависят от двух пространственных параметров x и y , рассмотрим масштабную симметрию вида $xu_x + \beta yu_y + \alpha u$, где α и β – постоянные. Примем вес производной по x равным единице. В окрестности элемента h можно построить два представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, взяв $e = u_x$ или $e = u_y$. Оба представления рассмотрены в следующих двух леммах, аналогичных леммам 1 и 2 для $(1+1)$ -мерного случая. Доказательства этих лемм совпадают с доказательством лемм 1 и 2, и мы не будем повторять его еще раз.

ЛЕММА 8. *Для данной масштабной симметрии $h = 2(xu_x + \beta yu_y + \alpha u)$, где α и β – постоянные, элементы $e = u_x$ и $f = -(x^2u_x + 2\beta xyu_y + 2\alpha xu)$ вместе с h образуют алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Кроме того, существует*

$$w = \frac{1}{3}x^3u_x + \beta x^2yu_y + \alpha x^2u.$$

Имеем $\text{ad}_e w = f$ и

$$\text{ad}_f^n w = \frac{n!}{3}(x^{n+3}u_x + (n+3)x^{n+2}(\beta yu_y + \alpha u)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Отметим, что параметры x и y равноправны. Можно также построить алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ положив $e = u_y$.

ЛЕММА 9. *Предположим, что $\beta \neq 0$. Для данной масштабной симметрии*

$$h = \frac{2}{\beta}(xu_x + \beta yu_y + \alpha u),$$

где α и β – постоянные, элементы $e = u_y$ и $f = -(1/\beta)(2xyu_x + \beta y^2u_y + 2\alpha yu)$ вместе с h образуют алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Кроме того, существует

$$w = \frac{1}{3}y^3u_y + \frac{1}{\beta}y^2(xu_x + \alpha u).$$

Имеем $\text{ad}_e w = f$ и

$$\text{ad}_f^n w = \frac{n!}{3}\left(y^{n+3}u_y + \frac{n+3}{\beta}y^{n+2}(xu_x + \alpha u)\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Нелокальность может нарушить справедливость тождества Якоби для характеристик нелокальных векторных полей. Это впервые было отмечено в работе [19], в которой авторы систематически исследовали симметричные свойства уравнения КП.

Для решения этой проблемы в работах [37], [38] было введено понятие фиктивных характеристик. Фиктивные характеристики – это выражения в терминах ядер операторов D_x и/или D_y . Одним из преимуществ представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, предложенных в леммах 8 и 9 является то, что в них нет этих членов и, следовательно, проблема фиктивности не возникают.

5.2.1. *Уравнение КП.* Перепишем уравнение КП, используя наши обозначения (19), в следующем виде:

$$u_t = K = u_{xxx} + 6uu_x + 3\Theta u_y. \quad (23)$$

Если пренебречь зависимостью от y , то уравнение сводится к хорошо известному уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ). Поскольку уравнение (23) является естественным обобщением уравнения КдФ, структура его симметрий хорошо изучена в литературе. Например, бесконечный набор его зависящих от t симметрий приведен в работах [13], [39]. На этой основе в работе [19] даны три различных представления его алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, аналогичные тем, которые обсуждались для уравнения Бюргерса в п. 5.1.1. Мы еще раз рассмотрим это уравнение и построим его мастер-симметрии с помощью нашего метода, используя оба представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, описанные в леммах 8 и 9.

Уравнение КП однородно относительно масштабной симметрии $h = 2yu_y + xu_x + 2u$, при этом $[h, K] = 3K$. Из лемм 8 и 9 следует существование двух представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в окрестности элемента h . Если использовать алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ из леммы 9, то согласно теореме 2 можно ввести

$$\tau = \frac{1}{6}[xyu_x + y^2u_y + 2yu, K] = \frac{1}{2}y(u_{xxx} + 6uu_x + 3\Theta u_y) + xu_y + 2\Theta u,$$

что приводит к мастер-симметрии для уравнения КП, полученной в работе [40]. Действительно, следующая симметрия, которую мы обозначим через P , имеет вид

$$P = [\tau, K] = 6(u_{xy} + \Theta^2 u_y + 4uu_y + 2u_x \Theta u). \quad (24)$$

Если использовать алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ из леммы 8, то получим, что

$$\text{ad}_K^3 f = \text{ad}_K^3 (x^2 u_x + 4xyu_y + 4xu) \neq 0.$$

Это влечет, что $[f, K]$ не является мастер-симметрией. Как отмечено в замечании 1, $f' = f + f_0$ также образует алгебру $\mathfrak{sl}(2)$ с элементами e и h , если только $[e, f_0] = 0$ и $[h, f_0] = -2f_0$. Используя условие $\text{ad}_K^3 f' = 0$, можно определить элементы

$$f_0 = y^2(u_{xxx} + 6uu_x + 3\Theta u_y) + 8y\Theta u + 2D_x^{-1}u$$

и

$$f' = f + f_0 = 2y\tau + x^2 u_x + 2xyu_y + 4xu + 4y\Theta u + 2D_x^{-1}u.$$

Это приводит к следующей формуле:

$$\tau' = \frac{1}{6}[f', K] = \frac{2}{3}yP + xK + 4u_{xx} + 8u^2 + 2u_x D_x^{-1}u + 6\Theta^2 u, \quad (25)$$

где P имеет вид (24). Эта функция относится к неизоспектральной иерархии уравнения КП, представленной в работе [41], и является мастер-симметрией. Легко заметить, что

$$[\tau, u_x] = u_y, \quad [\tau', u_x] = K.$$

Если выбрать u_x в качестве начального шага, мастер-симметрия τ' порождает иерархию симметрий, которая редуцируется к иерархии симметрий уравнения КдФ, если функция u не зависит от y .

На диаграмме 3 показана связь между указанными двумя представлениями алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ и соответствующими мастер-симметриями.

ДИАГРАММА 3. Мастер-симметрии уравнения КП и два представления алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

5.2.2. *Некоммутативное уравнение КП.* Рассмотрим некоммутативное уравнение КП [42], [36]

$$u_t = K = u_{xxx} + 3uu_x + 3u_xu + 3\Theta u_y - 3C_u \Theta u, \quad (26)$$

где зависимая переменная u принимает значения в ассоциативной алгебре и C_u означает коммутатор в ассоциативной алгебре, т. е. $C_u \Theta u = u \Theta u - (\Theta u)u$, что равно нулю если u принимает значения в ассоциативной алгебре. Если u не зависит от y , это уравнение сводится к некоммутативному уравнению КдФ (другие примеры, а также некоммутативные $(1+1)$ -мерные интегрируемые эволюционные уравнения можно найти в работах [43], [44])

$$u_t = K = u_{xxx} + 3uu_x + 3u_xu.$$

Некоммутативное уравнение КП (26) однородно по отношению к масштабной симметрии $h = 2yu_y + xu_x + 2u$ уравнения КП (23).

Отметим также, что элементы алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, представленные в леммах 8 и 9, линейны по u и их производным, и это означает, что леммы справедливы независимо от коммутативности зависимых переменных. Поэтому можно применить теорему 2 к уравнению (26). Введем

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{6}[xyu_x + y^2u_y + 2yu, K] = \\ &= \frac{1}{2}y(u_{xxx} + 3uu_x + 3u_xu + 3\Theta u_y - 3C_u \Theta u) + xu_y + 2\Theta u - \frac{1}{2}C_u D_x^{-1}u. \end{aligned} \quad (27)$$

Используя это выражение, вычислим коммутатор

$$\begin{aligned} [\tau, K] = & 6(u_{xxy} + \Theta^2 u_y + 2uu_y + 2u_y u + u_x \Theta u + (\Theta u)u_x) + \\ & + 6(C_u D_x^{-1} C_u \Theta u - \Theta C_u \Theta u - C_u \Theta^2 u), \end{aligned}$$

который является потоком симметрий, полученным в работе [36] в предположении, что $[[\tau, K], K] = 0$. Условие 2 теоремы 2 выполняется тривиальным образом благодаря замечанию 5. Итак, функция τ , введенная по формуле (27), является мастер-симметрией уравнения (26).

5.2.3. Новое интегрируемое уравнение типа Деви–Стюартсона. Недавно Хуард и Новиков провели классификацию интегрируемых уравнений типа уравнений Деви–Стюартсона [21] и нашли несколько новых уравнений. Теперь применим наш подход для построения мастер-симметрий одного из них (уравнение (3.6) в работе [21]), линейные члены которого имеют постоянные коэффициенты. После этого выпишем его гамильтониан и вычислим сохраняющиеся плотности с помощью мастер-симметрии.

Рассмотрим систему следующего вида

$$\begin{aligned} u_t &= u_x \Theta^{-1} u - \frac{1}{4} c^2 v v_y + v_x + \epsilon(u_{xx} + c v_{xy}), \\ v_t &= D_x(v \Theta^{-1} u) + c v v_x - \epsilon v_{xx}, \end{aligned} \quad (28)$$

где c и ϵ – постоянные. Эта система является однородной, поскольку

$$\left[\begin{pmatrix} x u_x \\ x v_x + v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \right] = 2 \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}.$$

Чтобы придать выражению более компактный вид, введем обозначения $p_y = u_x$ и $q_y = v_x$. Согласно теореме 2 имеется следующая мастер-симметрия:

$$\tau = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} x^2 u_x \\ x^2 v_x + 2xv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x u_t + \frac{\epsilon}{2}(u_x + c v_y) + \frac{v}{2} \\ x v_t + v p + \frac{c}{2} v^2 - \frac{3}{2} \epsilon v_x \end{pmatrix}.$$

Заметим, что антисимметричный постоянный оператор

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -c D_y^2 D_x^{-1} & D_y \\ D_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c D_y \Theta & D_y \\ D_y & 0 \end{pmatrix}$$

есть гамильтониан, он также является гамильтоновым оператором для уравнения (28), поскольку мы можем записать его как

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} &= \mathcal{H} \begin{pmatrix} \Theta^{-1}(vp) + \frac{c}{2} \Theta^{-1} v^2 - \epsilon \Theta^{-1} v_x \\ \frac{1}{2} p^2 + c v p + \frac{3}{8} c^2 v^2 + q + \epsilon p_x \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{H} \delta_{(u,v)} \left(\frac{1}{2} (v p^2 + c v^2 p + v q) + \epsilon v p_x + \frac{1}{8} c^2 v^3 \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Используем теперь мастер-симметрию для построения иерархии сохраняющихся плотностей уравнения (28). Ясно, что u и v – две сохраняющиеся плотности, поскольку

$$u_t = D_y \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{8} c^2 v^2 + q + \epsilon(p_x + cv_x) \right), \quad v_t = D_x \left(vp + \frac{c}{2} v^2 - \epsilon v_x \right).$$

Однако мы не можем принять две указанные плотности в качестве стартовых, поскольку

$$\int u_*(\tau) = v, \quad \int v_*(\tau) = 0.$$

Кроме того, обе функции порождают нулевое гамильтоново векторное поле. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} q \\ p + cv \end{pmatrix} = \mathcal{H} \delta_{(u,v)} \begin{pmatrix} vp + \frac{c}{2} v^2 \end{pmatrix}$$

и

$$\tau = \mathcal{H} \delta_{(u,v)} \left(\frac{x}{2} (vp^2 + cv^2 p + vq) + \epsilon xvp_x + \frac{1}{8} c^2 xv^3 + \frac{\epsilon}{2} uq \right).$$

Пусть $\rho_0 = vp + (c/2)v^2$. Применим предложение 3 для построения гамильтонианов, соответствующих симметриям, т. е. $a_n = [\tau, a_{n-1}] = \mathcal{H} \delta_{(u,v)} \rho_n$ и $\rho_n = \int \rho_{n-1*}(\tau)$. В частности, имеем

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \int \rho_{0*}(\tau) = \int \left(\left(xv_t + vp + \frac{c}{2} v^2 - \frac{3}{2} \epsilon v_x \right) p + v \Theta^{-1} \left(xu_t + \frac{\epsilon}{2} (u_x + cv_y) + \frac{v}{2} \right) \right) + \\ &\quad + \int cv \left(xv_t + vp + \frac{c}{2} v^2 - \frac{3}{2} \epsilon v_x \right) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} (vp^2 + cv^2 p + vq) + \epsilon vp_x + \frac{1}{8} c^2 v^3, \end{aligned}$$

что является гамильтонианом для данного уравнения (см. уравнение (29)), и

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \int \rho_{1*}(\tau) \equiv \frac{1}{2} (vp^3 + 3vpq - 3\epsilon v_x p^2 - 4\epsilon^2 p_x v_x) + \frac{3}{4} cv^2 (q + \epsilon p_x + p^2) - \\ &\quad - c\epsilon^2 v_x^2 + \frac{3}{8} c^2 v^3 p + \frac{1}{16} c^3 v^4, \end{aligned}$$

что соответствует следующей симметрии:

$$\begin{aligned} a_2 &= \mathcal{H} \delta_{(u,v)} \rho_2 = \\ &= \begin{pmatrix} D_y \left(\frac{1}{2} p^3 + \frac{3}{2} pq + 3\epsilon p_x + 2\epsilon^2 p_{xx} + \frac{3}{2} \epsilon c(p_x v + 2pv_x) - \frac{1}{8} c^2 v^2 (3p + cv) \right) + \\ \quad + D_y \left(\frac{3}{2} \Theta^{-1}(pv) + \frac{3}{4} c \Theta^{-1} v^2 \right) \\ \frac{3}{2} D_x \left(p^2 v + vq - 2\epsilon pv_x + \frac{4}{3} \epsilon^2 v_{xx} + cpv^2 - \epsilon cvv_x + \frac{1}{4} c^2 v^3 \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3. $(2+1)$ -мерные уравнения решеточных полей. В этом пункте мы применим подход, развитый в разделе 4, к $(2+1)$ -мерным уравнениям полей, заданных на решетке. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение [45]

$$u_t = u_{yy} + 2uu_y + 2(S-1)^{-1}u_{yy}, \quad (30)$$

где зависимая переменная $u = u(n, y, t)$ является функцией непрерывных переменных y, t и дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$, гладкой по непрерывным переменным. Здесь S – оператор сдвига, отображающий $u(n, y, t)$ в $u(n+1, y, t)$. Оператор $S-1$ есть дискретный аналог производной. Отметим, что D_y и $(S-1)^{-1}$ появляются парами. Как и в случае $(2+1)$ -мерных уравнений в частных производных, описанных в п. 5.2.1, введем понятие квазилокальных функций.

Обозначим $S^i \partial_y^j u$ через $u_{i,jy}$, где $i \in \mathbb{Z}$, а $j \in \mathbb{N}$ – порядок производной зависимой переменной u по независимой переменной y . Если $i = 0$ или $j = 0$, будем писать просто u_i или u_{jy} . Все функции, зависящие от n, y, t, u и $u_{i,jy}$, являются гладкими по всем своим переменным за исключением n и образуют дифференциальное кольцо $\mathcal{F}$ с полной производной D_y по y . Положим

$$\Theta = (S-1)^{-1}D_y, \quad \Theta^{-1} = D_y^{-1}(S-1). \quad (31)$$

Рассматривая последовательность расширений кольца $\mathcal{F}$, как и в п. 5.2.1, можно ввести квазилокальные функции $\mathcal{F}(\Theta)$.

Поскольку y – единственная непрерывная пространственная переменная для зависимой переменной, рассмотрим масштабную симметрию вида $yu_y + \alpha u$, где α – постоянная. Таким образом, в окрестности функции h получим те же представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ (заменив только x на y), что и в леммах 1 и 2 для $(1+1)$ -мерного случая. Теперь мы готовы применить теорему 2 к однородным эволюционным уравнениям такого типа.

5.3.1. Дифференциально-разностное уравнение КП. Используя наши обозначения, перепишем уравнения (30) в виде

$$u_t = K = u_{yy} + 2uu_y + 2\Theta u_y. \quad (32)$$

Его мастер-симметрия была недавно изучена в работах [41], [46]. В статье [46] зависящие от времени симметрии также изучаются с помощью алгебры $\mathfrak{sl}_h(2)$ (см. диаграмму 2). В настоящей работе мы продемонстрируем применение нашего подхода к построению мастер-симметрии. Отметим, что уравнение (32) однородно по отношению к $h = yu_y + u$ и $[yu_y + u, K] = 2K$. Следуя замечанию 1, возьмем $f = -(y^2u_y + 2yu + f_0)$ и образуем алгебру $\mathfrak{sl}(2)$, содержащую u_y и h , где f_0 удовлетворяет условиям $[e, f_0] = 0$ и $[h, f_0] = -2f_0$. Предположим, что f_0 – функция независимой переменной n , т. е. $f_0 = g(n)$, и введем

$$\tau = \frac{1}{4}[y^2u_y + 2yu + g(n), K] = y(u_{yy} + 2uu_y + 2\Theta u_y) + \frac{1}{2}g(n)u_y + \frac{3}{2}u_y + u^2 + 3\Theta u.$$

С помощью условия $[[\tau, K], K] = 0$ найдем, что $g(n) = 2n$. Полученная мастер-симметрия τ эквивалентна мастер-симметрии, представленной в работах [41], [46] в том смысле, что она порождает то же пространство симметрий для уравнения (32).

5.3.2. $(2 + 1)$ -Мерная решетка Вольтерра. Рассмотрим следующее дифференциально-разностное уравнение:

$$\begin{aligned} u_t &= K = (\mathcal{S} + 1)(\mathcal{S} - 1)^{-1}u_{yy} + u_y(\mathcal{S} + 1)(\mathcal{S} - 1)^{-1}u_y + e^{2u_1} - e^{2u_{-1}} = \\ &= (\mathcal{S} + 1)\Theta u_y + u_y(\mathcal{S} + 1)\Theta u + e^{2u_1} - e^{2u_{-1}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Эта система периодического вида называется двумерным обобщением решетки Вольтерра [47]. Ее представление Лакса инвариантно относительно группы диэдральных редукций [47]–[49], которые порождаются как внутренним, так и внешним автоморфизмами алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, а само это уравнение можно считать дискретизацией уравнения КП [50]. Для фиксированного периода n оно является бигамильтоновой системой. Для случая $n = 3$ его рекурсионный оператор и бигамильтонова структура построены в явном виде по представлению Лакса в работе [51]. Его преобразование Дарбу для произвольного периода n недавно получено в работе [52].

Если зависимая переменная u не зависит от y , то уравнение (33) сводится к уравнению

$$u_t = e^{2u_1} - e^{2u_{-1}},$$

которое представляет собой хорошо известную цепочку Вольтерра $v_{t'} = v(v_1 - v_{-1})$ с точечным преобразованием $v = e^{2u}$ и $t' = 2t$.

В этом пункте мы построим мастер-симметрию для уравнения (33) с помощью нашего подхода, развитого в разделе 4, а затем с помощью мастер-симметрий найдем его сохраняющиеся плотности.

Отметим, что уравнение (33) однородно по отношению к масштабной симметрии $yu_y + 1$. Действительно, для уравнения (33) прямым вычислением можно получить, что $[yu_y + 1, K] = 2K$. Следующие три элемента образуют алгебру $\mathfrak{sl}(2)$:

$$e = u_y, \quad h = 2(yu_y + 1), \quad f = -(y^2u_y + 2y).$$

Из теоремы 2 следует, что функция

$$\tau = \frac{1}{4}[y^2u_y + 2y, K] = yK + nu_y + 2\Theta u \quad (34)$$

является мастер-симметрией уравнения (33), если она удовлетворяет определенным условиям. Прежде всего, условие 2 теоремы 2 тривиальным образом удовлетворяется согласно замечанию 5. Проверим теперь условие 1 $[[\tau, K], K] = 0$. Непосредственным вычислением получим

$$\begin{aligned} a_2 = [\tau, K] &= (\mathcal{S}^2 + \mathcal{S} + 1)\Theta^2u_y + 3u_y\mathcal{S}^2\Theta^2u + 3(\Theta u)(\mathcal{S} + 1)\Theta u_y + u_y^3 + \\ &+ 3u_y(\Theta u)\mathcal{S}(\Theta u) + \frac{3}{2}D_y(e^{2u_1} + e^{2u} + e^{2u_{-1}}) + 3e^{2u_1}u_y + 3(e^{2u_1} - e^{2u_{-1}})\Theta u, \end{aligned}$$

где использовано тождество

$$(\mathcal{S} - 1)^{-1}(nu_y) = (n - 1)(\mathcal{S} - 1)^{-1}u_y - (\mathcal{S} - 1)^{-2}u_y.$$

Далее, $[a_2, K] = 0$. Здесь мы опустим длинные формулы, которые подтверждают, что a_2 – симметрия уравнения (33), что можно проделать, сгруппировав полино-

миальные, экспоненциальные и смешанные члены. Можно также сравнить a_2 с потоками симметрий, полученными с помощью представления Лакса в работах [47], [50], [22].

Обратимся теперь к сохраняющимся плотностям уравнения (33). Уравнение (33) можно записать в виде

$$u_t = K = (\mathcal{S} - 1)((\mathcal{S} + 1)\Theta^2 u + (\Theta u)^2 + e^{2u} + e^{2u-1}),$$

где предполагается, что u – сохраняющаяся плотность. Поскольку $\int u_*(\tau) = 0$, мы не можем использовать u в качестве исходной точки для получения других сохраняющихся плотностей.

Пусть $\rho_0 = (\Theta u)^2/2 + e^{2u}$, эта функция является сохраняющейся плотностью уравнения (33). В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} &= (\Theta u)\Theta u_t + 2e^{2u}u_t = \\ &= D_y \left((\Theta u) \left((\mathcal{S} + 1)\Theta^2 u + \frac{2}{3}(\Theta u)^2 + 3e^{2u} + e^{2u-1} \right) + e^{2u}u_y \right) + \\ &\quad + (\mathcal{S} - 1)(e^{2u-1}\Theta u_y + 2\exp(2u + 2u_{-1}) - (\Theta^2 u)^2). \end{aligned}$$

При фиксированном периоде $n = 3$ она сводится к сохраняющейся плотности, полученной в работе [51]. Начав с нее и использовав мастер-симметрию, представленную выражением (34), получим следующую сохраняющуюся плотность:

$$\rho_1 = \int \rho_{0*}(\tau) = \int \tau \cdot \frac{\delta \rho_0}{\delta u} \equiv \frac{1}{3}(\Theta u)^3 + (\Theta u)(\Theta^2 u) + 2(\Theta u)e^{2u}.$$

5.3.3. Еще одно $(2+1)$ -мерное обобщение цепочки Вольтерра. В этом пункте мы построим мастер-симметрию для следующего уравнения:

$$\begin{aligned} u_t &= (\mathcal{S} + 1)(\mathcal{S} - 1)^{-1}u_{yy} + u_y(\mathcal{S} + 1)(\mathcal{S} - 1)^{-1}u_y + 2e^{u+u_1} - 2e^{u+u_{-1}} = \\ &= K = (\mathcal{S} + 1)\Theta u_y + u_y(\mathcal{S} + 1)\Theta u + 2e^{u+u_1} - 2e^{u+u_{-1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Это уравнение появляется в работе [22], где проведена классификация семейства уравнений с нелокальностью типа нелокальности уравнения волн средней длины. Действительно, оба уравнения (33) и (35) принадлежат списку интегрируемых уравнений этого класса, причем оба уравнения имеют один и тот же бездисперсионный предел.

Можно также рассмотреть уравнение периодического вида. Соответствующие уравнения (33) и (35) с периодом $n = 3$ появляются при классификации интегрируемых систем типа нелинейного уравнения Шредингера [53].

Если зависимая переменная u не зависит от y , то уравнение (35) сводится к уравнению

$$u_t = 2e^{u+u_1} - 2e^{u+u_{-1}},$$

которое также представляет собой известную цепочку Вольтерра $v_{t'} = v(v_1 - v_{-1})$ с точечным преобразованием $v = e^{u+u_1}$ и $t' = 2t$.

Отметим, что уравнение (35) также однородно и имеет ту же масштабную симметрию, что и уравнение (33). Поэтому можно использовать ту же самую алгебру $\mathfrak{sl}(2)$

для построения его мастер-симметрии. Здесь мы выпишем только результат, поскольку рассуждения относительно применения теоремы 2 остаются теми же, так как уравнения (33) и (35) имеют одни и те же линейные члены. Нам нужно только проверить условие 1: $[[\tau, K], K] = 0$.

Введем симметрию

$$\tau = \frac{1}{4}[y^2 u_y + 2y, K] = yK + nu_y + 2\Theta u, \quad (36)$$

имеющую тот же вид, что и симметрия (34), и найдем

$$\begin{aligned} a_2 = [\tau, K] &= (\mathcal{S}^2 + \mathcal{S} + 1)\Theta^2 u_y + 3u_y \mathcal{S}^2 \Theta^2 u + 3(\Theta u)(\mathcal{S} + 1)\Theta u_y + u_y^3 + \\ &+ 3u_y(\Theta u)\mathcal{S}(\Theta u) + e^{u+u_1}(3u_{1,y} + 6u_y + 6\Theta u) + e^{u+u_{-1}}(3u_{-1,y} - 6\Theta u). \end{aligned}$$

Чтобы удостовериться, что $[a_2, K] = 0$, можно или прибегнуть к прямым вычислениям или сравнить данное выражение с потоками симметрий, полученными с помощью представления Лакса [22].

Рассмотрим теперь сохраняющиеся плотности уравнения (35), заметив, что

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\Theta u)^2 + e^{u+u_{-1}}$$

является сохраняющейся плотностью. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= (\Theta u)\Theta u_t + e^{u+u_{-1}}(u_t + u_{-1,t}) \equiv \\ &\equiv D_y \left(-\frac{1}{3}(\Theta u)^3 + 2e^{u+u_1}\Theta u + e^{u+u_1}u_y + e^{u+u_{-1}}u_y \right) + \\ &+ (\mathcal{S} - 1)(e^{u+u_{-1}}u_y u_{-1,y} - 2e^{u+u_{-1}}u_y \Theta u - (\Theta^2 u)^2). \end{aligned}$$

Начав с данной плотности и воспользовавшись мастер-симметрией (36), получим следующую сохраняющуюся плотность:

$$\rho_1 = \int \rho_{0*}(\tau) = \int \tau \cdot \frac{\delta \rho_0}{\delta u} \equiv \frac{1}{3}(\Theta u)^3 + (\Theta u)(\Theta^2 u) + (e^{u+u_1} + e^{u+u_{-1}})\Theta u.$$

6. ОБСУЖДЕНИЯ

В настоящей статье представлена новая структура, названная $\mathcal{O}$ -схемой, для однородных эволюционных интегрируемых уравнений. Для эволюционного векторного поля $u_t = K[u]$ алгебра Ли симметрий является пространством ядра оператора ad_K , алгебра Ли мастер-симметрий лежит в ядре оператора ad_K^2 . Симметрии, мастер-симметрии и нильпотентные элементы высшего порядка можно аккуратно подстроить как элементы модулей в $\mathcal{O}$ -категории БГГ. Это утверждение основано на том факте, что существует свободное представление алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, а также бесконечномерные модули в категории БГГ, связанные с этими уравнениями, независимо от того, являются интегрируемыми или нет. Доказано, что при некоторых формальных условиях достаточно построить мастер-симметрии и сгруппировать зависящие от времени симметрии, используя элементы этого модуля. Это также предоставляет способ построения мастер-симметрий.

Мастер-симметрии для двух $(2 + 1)$ -мерных цепочек Вольтерра имеют вид (34) и (36), поскольку у них одна масштабная симметрия. Таким образом, для данного семейства уравнений $u_t = K$ с общей масштабной симметрией условие теоремы 2 о том, что $\text{ad}_K^2 f$ коммутирует с K , можно использовать в качестве критерия классификации интегрируемых уравнений. В частности, этот критерий имеет смысл исследовать (хотя соответствующие расчеты весьма утомительны) в применении к некоторым $(2 + 1)$ -мерным уравнениям, условие интегрируемости которых сформулировать трудно.

Мы построили $\mathcal{O}$ -схемы как для $(1 + 1)$ -мерных, так и для $(2 + 1)$ -мерных уравнений в частных производных, а также для $(2 + 1)$ -мерных уравнений полей на решетке с $(\mathcal{S} - 1)^{-1} D_y$ в качестве нелокальных членов. В настоящее время мы работаем над обобщением предложенной $\mathcal{O}$ -схемы на интегрируемые дифференциально-разностные и дискретные системы.

В настоящей работе $\mathcal{O}$ -схема сформулирована для случая $\mathfrak{sl}(2)$ -модулей. Обобщение этой конструкции на алгебры высшего ранга является перспективным направлением исследований, которое позволит изучить намного более широкий класс важных в приложении систем, включая уравнение Буссинеска, систему с резонансным взаимодействием волн, двумерную цепочку Тоды и многие другие.

Благодарности. Автор выражает свою признательность за полезные обсуждения А. В. Михайлову, Дж. А. Сандерсу и В. С. Новикову, а также глубокую благодарность за финансовую поддержку EPSRC (грант EP/I038659/1).

Список литературы

- [1] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [2] V. V. Sokolov, A. B. Shabat, *Sov. Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev.*, **4** (1984), 221–280.
- [3] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42**:4(256) (1987), 3–53.
- [4] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov, “The symmetry approach to classification of integrable equations”, *What is integrability?*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, ed. V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1991, 115–184.
- [5] A. B. Shabat, A. V. Mikhailov, “Symmetries – test of integrability”, *Important developments in soliton theory*, eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov, Springer, Berlin, 1993, 355–374.
- [6] A. V. Mikhailov, V. S. Novikov, J. P. Wang, “Symbolic representation and classification of integrable systems”, *Algebraic Theory of Differential Equations*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **357**, eds. M. A. H. MacCallum, A. V. Mikhailov, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, 156–216.
- [7] J. A. Sanders, J. P. Wang, “Number theory and the symmetry classification of integrable systems”, *Integrability*, Lecture Notes in Physics, **767**, ed. A. V. Mikhailov, Springer, Berlin, 2009, 89–118.
- [8] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [9] P. J. Olver, *J. Math. Phys.*, **18**:6 (1977), 1212–1215.
- [10] B. Fuchssteiner, *Nonlinear Anal.*, **3**:6 (1979), 849–862.
- [11] F. Magri, “A geometrical approach to the nonlinear solvable equations”, *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems* (University of Lecce, June 20–23, 1979), Lecture Notes in Physics, **120**, eds. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani, Springer, Berlin, 1980, 233–263.
- [12] A. S. Fokas, B. Fuchssteiner, *Phys. Lett. A*, **86**:6–7 (1981), 341–345.
- [13] H. H. Chen, Y. C. Lee, J.-E. Lin, *Phys. D*, **9**:3 (1983), 439–445.
- [14] I. Dorfman, *Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations*, John Wiley and Sons, Chichester, 1993.

- [15] A. Yu. Orlov, E. I. Schulman, *Lett. Math. Phys.*, **12**:3 (1986), 171–179.
- [16] W.-X. Ma, *J. Math. Phys.*, **33**:7 (1992), 2464–2476.
- [17] B. Fuchssteiner, *Progr. Theoret. Phys.*, **70**:6 (1983), 1508–1522.
- [18] W. Oevel, B. Fuchssteiner, H. Zhang, O. Ragnisco, *J. Math. Phys.*, **30**:11 (1989), 2664–2670.
- [19] J. A. Sanders, J. P. Wang, “On integrability of evolution equations and representation theory”, *The Geometrical Study of Differential Equations* (Washington, DC, USA, June 20–25, 2000), Contemporary Mathematics, **285**, eds. J. A. Leslie, T. P. Robar, AMS, Providence, RI, 2001, 85–99.
- [20] F. Finkel, A. S. Fokas, *Phys. Lett. A*, **293**:1–2 (2002), 36–44, arXiv: nlin/0112002.
- [21] B. Huard, V. S. Novikov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:27 (2013), 275202, 13 pp.
- [22] E. V. Ferapontov, V. S. Novikov, I. Roustemoglou, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:24 (2013), 245207, 13 pp., arXiv: 1303.3430.
- [23] J. Troost, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:41 (2012), 415202, 18 pp.
- [24] J. E. Humphreys, *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$* , Graduate Studies in Mathematics, **94**, AMS, Providence, RI, 2008.
- [25] V. Mazorchuk, *Lectures on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -modules*, Imperial College Press, London, 2010.
- [26] B. Fuchssteiner, S. Ivanov, W. Wiwianka, *Math. Comput. Modelling*, **25**:8–9 (1997), 91–100.
- [27] J. A. Sanders, J. P. Wang, *J. Differ. Equ.*, **147**:2 (1998), 410–434.
- [28] F. Beukers, J. A. Sanders, J. P. Wang, *J. Differ. Equ.*, **146**:1 (1998), 251–260.
- [29] J. A. Sanders, J. P. Wang, *Phys. D*, **149**:1–2 (2001), 1–10.
- [30] A. Sergyeyev, J. A. Sanders, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10**:1 (2003), 78–85.
- [31] B. Fuchssteiner, *Phys. D*, **13**:3 (1984), 387–394.
- [32] A. Ya. Maltsev, S. P. Novikov, *Phys. D*, **156**:1–2 (2001), 53–80.
- [33] D. K. Demskoi, V. V. Sokolov, *Nonlinearity*, **21**:6 (2008), 1253–1264, arXiv: nlin/0607071.
- [34] A. V. Mikhailov, V. S. Novikov, *Mosc. Math. J.*, **3**:4 (2003), 1293–1305.
- [35] A. V. Mikhailov, R. I. Yamilov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:31 (1998), 6707–6715.
- [36] J. P. Wang, *J. Math. Phys.*, **47**:11 (2006), 113508, 19 pp.
- [37] P. J. Olver, J. A. Sanders, J. P. Wang, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9**, suppl. 1 (2002), 164–172.
- [38] P. J. Olver, “Nonlocal symmetries and ghosts”, *New Trends in Integrability and Partial Solvability* (Cadiz, Spain, June 12–16, 2002), NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, **132**, eds. A. B. Shabat, A. González-López, M. Mañas, L. Martínez Alonso, M. A. Rodríguez, Kluwer, Dordrecht, 2004, 199–215.
- [39] H. H. Chen, J. E. Lin, *Phys. D*, **26**:1–3 (1987), 171–180.
- [40] W. Oevel, B. Fuchssteiner, *Phys. Lett. A*, **88**:7 (1982), 323–327.
- [41] W. Fu, L. Huang, K. M. Tamizhmani, D.-J. Zhang, *Nonlinearity*, **26**:12 (2013), 3197–3229, arXiv: 1211.3585.
- [42] I. Y. Dorfman, A. S. Fokas, *J. Math. Phys.*, **33**:7 (1992), 2504–2514.
- [43] P. J. Olver, V. V. Sokolov, *Commun. Math. Phys.*, **193**:2 (1998), 245–268.
- [44] P. J. Olver, J. P. Wang, *Proc. London Math. Soc.* (3), **81**:3 (2000), 566–586.
- [45] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:12 (1982), 4116–4124.
- [46] F. Khanizadeh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:40 (2014), 405205, 8 pp.
- [47] A. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [48] A. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **32**:2 (1980), 187–192.
- [49] A. V. Mikhailov, *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.
- [50] S. Lombardo, A. V. Mikhailov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:31 (2004), 7727–7742, arXiv: nlin/0404013.
- [51] J. P. Wang, *J. Math. Phys.*, **50**:2 (2009), 023506, 25 pp.
- [52] A. V. Mikhailov, G. Papamikos, J. P. Wang, *J. Math. Phys.*, **55**:11 (2014), 113507, 20 pp., arXiv: 1402.5660.
- [53] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov, *Commun. Math. Phys.*, **115**:1 (1988), 1–19.