Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Левин, М. А. Ольшанецкий, А. В. Зотов, Квантовые R -матрицы Бакстера–Белавина и многомерные пары Лакса для уравнения Пенлеве VI, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 1, 41–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8877>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:36:51

© 2015 г. А. М. Левин^{*†}, М. А. Ольшанецкий^{†‡}, А. В. Зотов[§]

КВАНТОВЫЕ R -МАТРИЦЫ БАКСТЕРА–БЕЛАВИНА И МНОГОМЕРНЫЕ ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ VI

Квантовые эллиптические R -матрицы удовлетворяют ассоциативному уравнению Янга–Бакстера в $\text{Mat}(N)^{\otimes 2}$, которое можно рассматривать как некоммутативный аналог тождеств Фэя для скалярной функции Кронекера. Представлен более широкий список R -матричнозначных тождеств для эллиптических функций. В частности, предложен аналог тождеств Фэя в пространстве $\text{Mat}(N)^{\otimes 2}$, а также описано представление для R -матриц в виде двойных рядов Кронекера. В качестве приложения с помощью $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N)$ -симметричной эллиптической R -матрицы построены R -матричнозначные $(2N^2 \times 2N^2)$ -пары Лакса для уравнения Пенлеве VI (в эллиптической форме) с четырьмя произвольными константами. Более точно, случай четырех произвольных констант отвечает нечетным N , а четные N соответствуют случаю единственной константы в уравнении.

Ключевые слова: квантовые R -матрицы, многомерные пары Лакса, уравнения Пенлеве.

DOI: 10.4213/tmf8877

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей работе мы продолжаем изучение тождеств для квантовых (и классических) R -матриц, аналогичных тождествам для скалярных эллиптических функций [1], [2]. Предложен аналог тождества Фэя в пространстве $\text{Mat}(N)^{\otimes 2}$. Он позволяет для уравнения Пенлеве VI построить многомерные пары Лакса с матричными элементами в виде квантовых R -матриц.

^{*}Факультет математики, Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики, Москва, Россия. E-mail: alevin@hse.ru

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: olshanet@itep.ru

[‡]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[§]Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zotov@mi.ras.ru

Начнем со списка свойств и тождеств для эллиптических функций, а затем приведем их R -матричные аналоги. Большая часть свойств известна из работ [1]–[7].

Рассмотрим следующие функции:

$$\phi(z, u) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(z+u)}{\vartheta(z)\vartheta(u)}, \quad (1.1)$$

$$E_1(z) = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}, \quad E_2(z) = -\partial_z E_1(z) = \wp(z) - \frac{1}{3} \frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)}, \quad (1.2)$$

где $\vartheta(z)$ – нечетная тета-функция,

$$\vartheta(z) = \vartheta(z|\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp \left\{ \pi i \tau \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 + 2\pi i \left(z + \frac{1}{2} \right) \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (1.3)$$

а $\wp(z)$ – $\wp$ -функция Вейерштрасса.

Следуя монографии [8], функцию (1.1) будем называть функцией Кронекера, а функции (1.2) называются (первой и второй) функциями Эйзенштейна. Функцию Кронекера можно рассматривать как сечение расслоения Пуанкаре $\mathcal{P}$ над $\Sigma_\tau \times \Sigma'_\tau$. Здесь Σ_τ – эллиптическая кривая,

$$\Sigma_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}), \quad \text{Im } \tau > 0, \quad (1.4)$$

а Σ'_τ – ее якобиан ($\Sigma'_\tau \sim \Sigma_\tau$). Расслоение Пуанкаре $\mathcal{P}$ есть линейное расслоение над $\Sigma_\tau \times \Sigma'_\tau$,

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} & \\ & \downarrow & \\ & \Sigma_\tau \times \Sigma'_\tau & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Sigma_\tau & & \Sigma'_\tau \end{array}, \quad (1.5)$$

заданное соотношениями (1.6), (1.7), (1.10) и (1.11), приведенными ниже.

Свойства тета-функции (1.3) (включая тождества Римана [9]) приводят к следующему набору свойств и взаимосвязей для функций (1.1), (1.2).

- *Симметрия аргументов:*

$$\phi(z, u) = \phi(u, z), \quad z \in \Sigma_\tau, \quad u \in \Sigma'_\tau. \quad (1.6)$$

- *Локальное разложение:*

$$\phi(z, u) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2} (E_1^2(u) - \wp(u)) + O(z^2). \quad (1.7)$$

- *Вычет:*

$$\text{Res}_{z=0} \phi(z, u) = \text{Res}_{u=0} \phi(z, u) = \text{Res}_{z=0} E_1(z) = 1. \quad (1.8)$$

- *Четность:*

$$\phi(-z, -u) = -\phi(z, u), \quad E_1(-z) = -E_1(z), \quad E_2(-z) = E_2(z). \quad (1.9)$$

- (Квази)периодические свойства:

$$\phi(z+1, u) = \phi(z, u), \quad E_1(z+1) = E_1(z), \quad E_2(z+1) = E_2(z), \quad (1.10)$$

$$\phi(z+\tau, u) = e^{-2\pi i u} \phi(z, u), \quad E_1(z+\tau) = E_1(z) - 2\pi i, \quad E_2(z+\tau) = E_2(z). \quad (1.11)$$

- Уравнение теплопроводности:

$$2\pi i \partial_\tau \phi(z, u) = \partial_z \partial_u \phi(z, u). \quad (1.12)$$

- Производные:

$$\partial_u \phi(z, u) = \phi(z, u) (E_1(z+u) - E_1(u)), \quad (1.13)$$

$$\partial_z \phi(z, u) = \phi(z, u) (E_1(z+u) - E_1(z)). \quad (1.14)$$

- Тождество Фэя (тройной секущей) [10]:

$$\phi(x, u)\phi(y, w) = \phi(x-y, u)\phi(y, u+w) + \phi(y-x, w)\phi(x, u+w). \quad (1.15)$$

- Вырожденные тождества Фэя:

$$\phi(x, z)\phi(x, w) = \phi(x, z+w) (E_1(x) + E_1(z) + E_1(w) - E_1(x+z+w)) \quad (1.16)$$

или

$$\phi(x, z)\phi(y, z) = \phi(x+y, z) (E_1(x) + E_1(y) + E_1(z) - E_1(x+y+z)), \quad (1.17)$$

$$\phi(x, z)\phi(x, -z) = E_2(x) - E_2(z) = \wp(x) - \wp(z). \quad (1.18)$$

• *Геометрическая интерпретация.* Функция Кронекера $\phi(z, u)$ является сечением расслоения Пуанкаре $\mathcal{P}$. Это линейное расслоение над $\Sigma_\tau \times \Sigma_\tau$, заданное условиями (1.6), (1.7), (1.10), (1.11).

• *Функция Грина.* Функция Кронекера является функцией Грина оператора $\bar{\partial}$ в пространстве 1-форм $\mathcal{A}^{(1,0)}(\Sigma_\tau)$ с граничными условиями (1.10) и (1.11):

$$\bar{\partial}\phi(z, u) = \delta^2(z, \bar{z}). \quad (1.19)$$

(. Квантовые R -матрицы) Квантовые R -матрицы Рассмотрим $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N)$ -симметричную эллиптическую R -матрицу (Бакстера–Белавина [3], [4]) в фундаментальном представлении (см. также работы [5]). Она определяется в терминах конечномерного представления группы Гейзенберга. Пусть $Q, \Lambda \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})$,

$$Q_{kl} = \delta_{kl} e^{2\pi i k/N}, \quad \Lambda_{kl} = \delta_{k-l+1, 0 \pmod{N}}, \quad k, l = 1, \dots, N, \quad (1.20)$$

$$e^{2\pi i \gamma_1 \gamma_2 / N} Q^{\gamma_1} \Lambda^{\gamma_2} = \Lambda^{\gamma_2} Q^{\gamma_1}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}. \quad (1.21)$$

Определим базис синус-алгебры в $\text{Mat}(N, \mathbb{C})$:

$$T_\gamma := T_{\gamma_1 \gamma_2} = e^{\pi i \gamma_1 \gamma_2 / N} Q^{\gamma_1} \Lambda^{\gamma_2}, \quad \gamma_1, \gamma_2 = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.22)$$

Такое же определение сохраним и для всех $\gamma \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Тогда имеем

$$T_\alpha T_\beta = \kappa_{\alpha, \beta} T_{\alpha+\beta}, \quad \kappa_{a, b} = e^{\pi i (\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1) / N}, \quad (1.23)$$

где $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$.

R -матрица задается формулой

$$R_{12}^{\hbar}(u) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} \varphi_{\alpha}(u, \omega_{\alpha} + \hbar) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha} \in \text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}, \quad (1.24)$$

где¹⁾

$$\varphi_{\alpha}(u, \omega_{\alpha} + \hbar) = e^{2\pi i u \partial_{\tau} \omega_{\alpha}} \phi(u, \omega_{\alpha} + \hbar), \quad \omega_{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \tau}{N}. \quad (1.25)$$

Свойство $(\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N)$ -симметрии означает, что для $g = Q, \Lambda$ выполняется равенство

$$g \otimes g R_{12}^{\hbar}(u) g^{-1} \otimes g^{-1} = R_{12}^{\hbar}(u). \quad (1.26)$$

В случае $N = 1$ R -матрица (1.24) есть скалярная функция Кронекера $\phi(\hbar, u)$ (1.1). Отметим, что матрица (1.24) нормирована таким образом, что условие унитарности имеет вид

$$R_{12}^{\hbar}(u) R_{21}^{\hbar}(-u) = N^2 \phi(N\hbar, u) \phi(N\hbar, -u) 1 \otimes 1 = N^2 (\wp(N\hbar) - \wp(u)) 1 \otimes 1. \quad (1.27)$$

Его можно рассматривать как аналог равенства (1.18). Здесь $R_{21}(z) = P_{12} R_{12}(z) P_{12}$, где

$$P_{12} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha} T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes E_{ji}, \quad (E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad (1.28)$$

есть оператор перестановки.

Мы также используем обозначение $R_{ab}^{\hbar}(z)$, отличающееся от (1.27) тем, что вместо $T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}$ подставлено $T_{\alpha}^a \otimes T_{-\alpha}^b = 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes T_{\alpha} \otimes 1 \cdots \otimes 1 \otimes T_{-\alpha} \otimes 1 \cdots \otimes 1$ (здесь T_{α} и $T_{-\alpha}$ – матрицы в a -й и b -й компонентах тензорного произведения). Количество компонент в тензорном произведении есть целое число $\tilde{N}$. Это означает, что $R_{ab}^{\hbar}$ является элементом пространства $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes \tilde{N}}$, т. е. $(N^{\tilde{N}} \times N^{\tilde{N}})$ -матрицей.

Свойства и тождества (1.6)–(1.19) имеют следующие R -матричные аналоги.

- *Симметрия аргументов:*

$$R_{12}^{\hbar}(z) = R_{12}^{z/N}(N\hbar) P_{12}. \quad (1.29)$$

- *Локальное разложение по $\hbar$* представляет собой классический предел:

$$R_{12}^{\hbar}(z) = \hbar^{-1} 1 \otimes 1 + r_{12}(z) + \hbar m_{12}(z) + O(\hbar^2), \quad (1.30)$$

где $r_{12}(z)$ – классическая r -матрица (Белавина–Дринфельда [4]),

$$r_{12}(z) = E_1(z) 1 \otimes 1 + \sum_{\alpha \neq 0} \varphi_{\alpha}(z) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}, \quad (1.31)$$

а

$$m_{12}(z) = \frac{E_1^2(z) - \wp(z)}{2} 1 \otimes 1 + \sum_{\alpha \neq 0} e^{2\pi i z \partial_{\tau} \omega_{\alpha}} \partial_u \phi(z, u) \Big|_{u=\omega_{\alpha}} T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}. \quad (1.32)$$

Аналогично соотношению (1.7) имеем

$$r_{12}^2(z) - 2m_{12}(z) = 1 \otimes 1 N^2 \wp(z), \quad (1.33)$$

¹⁾Здесь $\partial_{\tau} \omega_{\alpha} = \alpha_2/N$.

т. е. квантовая R -матрица есть матричный аналог функции Кронекера (1.1), а классическая – матричный аналог первой функции Эйзенштейна (1.2). Разложение по z (в окрестности $z = 0$) имеет вид

$$R_{12}^{\hbar}(z) = \frac{NP_{12}}{z} + R_{12}^{\hbar,(0)} + O(z), \quad (1.34)$$

где²⁾

$$R_{12}^{\hbar,(0)} = \sum_{\alpha} T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha} (E_1(\hbar + \omega_{\alpha}) + 2\pi i \partial_{\tau} \omega_{\alpha}). \quad (1.35)$$

• *Вычеты:*

$$\operatorname{Res}_{\hbar=0} R_{12}^{\hbar}(z) = 1 \otimes 1, \quad \operatorname{Res}_{z=0} R_{12}^{\hbar}(z) = \operatorname{Res}_{z=0} r_{12}(z) = NP_{12}. \quad (1.36)$$

• *Четность:*

$$R_{12}^{\hbar}(z) = -R_{21}^{-\hbar}(-z), \quad r_{12}(z) = -r_{21}(-z), \quad m_{12}(z) = m_{21}(-z). \quad (1.37)$$

R -матричный аналог функции $E_2(u) = E_2(-u)$ (1.2) появляется в виде функции $F_{12}^0(u) = -\partial_u r_{12}(u)$ (что естественно, поскольку $r_{12}(u)$ есть матричный аналог функции $E_1(u)$). Классическая r -матрица нечетна. Следовательно, $F_{12}^0(u)$ четная. Такой же ответ следует и из локального разложения (1.7), (1.30): $E_2(u) = -\partial_u \phi(z, u)|_{z=0}$, тогда $-\partial_u R_{12}^z(u)|_{z=0} = -\partial_u r_{12}(u)$.

• *(Квази)периодические свойства:*

$$R_{12}^{\hbar}(z + N\omega_{\gamma}) = e^{-2\pi i N\hbar \partial_{\tau} \omega_{\gamma}} T_{\gamma}^{-1} \otimes 1 R_{12}^{\hbar}(z) T_{\gamma} \otimes 1, \quad (1.38)$$

$$R_{12}^{\hbar+\omega_{\gamma}}(z) = e^{-2\pi i z \partial_{\tau} \omega_{\gamma}} T_{\gamma}^{-1} \otimes 1 R_{12}^{\hbar}(z) (1 \otimes T_{\gamma}). \quad (1.39)$$

В частности,

$$R_{12}^{\hbar}(z + 1) = Q^{-1} \otimes 1 R_{12}^{\hbar}(z) Q \otimes 1, \quad (1.40)$$

$$R_{12}^{\hbar}(z + \tau) = e^{-2\pi i \hbar} \Lambda^{-1} \otimes 1 R_{12}^{\hbar}(z) \Lambda \otimes 1,$$

$$R_{12}^{\hbar+1}(z) = R_{12}^{\hbar}(z), \quad R_{12}^{\hbar+\tau}(z) = e^{-2\pi i z} R_{12}^{\hbar}(z), \quad (1.41)$$

$$r_{12}(z + 1) = Q^{-1} \otimes 1 r_{12}(z) Q \otimes 1, \quad (1.42)$$

$$r_{12}(z + \tau) = \Lambda^{-1} \otimes 1 r_{12}(z) \Lambda \otimes 1 - 2\pi i 1 \otimes 1.$$

Перепишем равенство (1.39) в виде

$$R_{ab}^{\hbar+1/N}(z_a - z_b) = Q_a^{-1} R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b) Q_b, \quad (1.43)$$

$$R_{ab}^{\hbar+\tau/N}(z_a - z_b) = e^{-2\pi i(z_a - z_b)/N} \Lambda_a^{-1} R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b) \Lambda_b. \quad (1.44)$$

R -матричнозначная матрица Лакса для $gl_{\tilde{N}}$ -системы Калоджеро-Мозера [1] имеет вид

$$\mathcal{L}(\hbar) = \sum_{a,b=1}^{\tilde{N}} \tilde{E}_{ab} \otimes \mathcal{L}_{ab}(\hbar), \quad \mathcal{L}_{ab}(\hbar) = \delta_{ab} p_a 1_a \otimes 1_b + \nu(1 - \delta_{ab}) R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b), \quad (1.45)$$

²⁾ Матрица $R_{12}^{\hbar,(0)}$ появляется в описании релятивистского волчка как часть обратного тензора инерции [11].

где $\tilde{E}_{ab}$ – стандартный базис в $gl_{\tilde{N}}$: $(\tilde{E}_{ab})_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd}$, $a, b, c, d = 1, \dots, \tilde{N}$. Тогда из формул (1.43), (1.44) следует, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\hbar + \frac{1}{N}\right) &= \mathbf{Q}^{-1}\mathcal{L}(\hbar)\mathbf{Q}, \\ \mathcal{L}\left(\hbar + \frac{\tau}{N}\right) &= e^{-\mathbf{Z}/N}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathcal{L}(\hbar)\mathbf{\Lambda}e^{\mathbf{Z}/N},\end{aligned}\tag{1.46}$$

где

$$\mathbf{Q} = \bigoplus_{a=1}^{\tilde{N}} Q_a, \quad \mathbf{\Lambda} = \bigoplus_{a=1}^{\tilde{N}} \Lambda_a, \quad \mathbf{Z} = \bigoplus_{a=1}^{\tilde{N}} z_a 1_a \tag{1.47}$$

суть блочно-диагональные матрицы. Количество блоков равно $\tilde{N} \times \tilde{N}$, а размер каждого блока равен $N^{\tilde{N}} \times N^{\tilde{N}}$.

- *Уравнение теплопроводности:*

$$2\pi i \partial_\tau R_{12}^{\hbar}(z) = \partial_z \partial_{\hbar} R_{12}^{\hbar}(z). \tag{1.48}$$

- *Производные*³⁾:

$$\begin{aligned}\partial_{\hbar} R_{12}^{\hbar}(z) &= \frac{1}{2}(r_{12}(z + N\hbar)R_{12}^{\hbar}(z) + R_{12}^{\hbar}(z)r_{12}(z - N\hbar)) + \\ &+ \frac{N}{2}(E_1(z + N\hbar) - E_1(z - N\hbar) - 2E_1(N\hbar))R_{12}^{\hbar}(z),\end{aligned}\tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}\partial_z R_{12}^{\hbar}(z) &= \frac{1}{2N}(r_{12}(z + N\hbar)R_{12}^{\hbar}(z) - R_{12}^{\hbar}(z)r_{12}(z - N\hbar)) + \\ &+ \frac{1}{2}(E_1(z + N\hbar) + E_1(z - N\hbar) - 2E_1(z))R_{12}^{\hbar}(z).\end{aligned}\tag{1.50}$$

- *Тождество Фэя в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 3}$* [1], [12], [2]:

$$R_{ab}^{\hbar}R_{bc}^{\hbar'} = R_{ac}^{\hbar'}R_{ab}^{\hbar-\hbar'} + R_{bc}^{\hbar'-\hbar}R_{ac}^{\hbar}, \quad R_{ab}^{\hbar} = R_{ab}^{\hbar}(z_a - z_b). \tag{1.51}$$

Обе части тождества – элементы пространства $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 3}$. Оно использовалось в работе [1] для построения многомерных пар Лакса для системы Калоджеро. Здесь мы докажем аналог того же тождества (1.15) в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$.

- *Тождество Фэя в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$:*

$$\begin{aligned}R_{12}^{\hbar}(z)R_{21}^{\hbar'}(-w) &= N\phi\left(N\hbar', \frac{z-w}{N} + \hbar' - \hbar\right)R_{12}^{\hbar-\hbar'}(z + N\hbar') - \\ &- N\phi\left(N\hbar, \frac{z-w}{N} + \hbar' - \hbar\right)R_{12}^{\hbar-\hbar'}(w + N\hbar) + \\ &+ N\phi\left(-w, \frac{z-w}{N} + \hbar' - \hbar\right)R_{12}^{(z-w)/N}(w + N\hbar) - \\ &- N\phi\left(-z, \frac{z-w}{N} + \hbar' - \hbar\right)R_{12}^{(z-w)/N}(z + N\hbar').\end{aligned}\tag{1.52}$$

³⁾Тождества для производных от R -матрицы по постоянной Планка и спектральному параметру были найдены в работах [6] и [7] соответственно. Авторы этих работ использовали другую нормировку R -матрицы.

Скалярный аналог этого тождества получается следующим образом: применим соотношение (1.15) (с $x = \hbar$, $y = \hbar'$) к $\phi(\hbar, z)\phi(\hbar', -w)$, а затем применим (1.15) еще раз в полученном выражении. В итоге получим скалярный аналог правой части (1.52).

- *Вырожденные тождества Фэя (1.51) в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 3}$:*

$$R_{ab}^{\hbar} R_{bc}^{\hbar} = R_{ac}^{\hbar} r_{ab} + r_{bc} R_{ac}^{\hbar} - \partial_{\hbar} R_{ac}^{\hbar}, \quad (1.53)$$

$$R_{ab}^{\hbar}(z) R_{bc}^{\hbar'}(-z) = R_{ac}^{\hbar', (0)} R_{ab}^{\hbar - \hbar'}(z) + R_{bc}^{\hbar' - \hbar}(-z) R_{ac}^{\hbar, (0)} + N F_{bc}^{\hbar' - \hbar}(-z) P_{ac}, \quad (1.54)$$

где $F_{ab}^{\hbar}(u) = \partial_u R_{ab}^{\hbar}(u)$ и $R_{ab}^{\hbar, (0)}$ задана в (1.34), (1.35).

- *Вырожденные тождества Фэя (1.52) в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$:*

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar}(z) R_{21}^{\hbar}(-w) &= N \phi\left(\frac{z-w}{N}, N\hbar\right) (r_{12}(z + N\hbar) - r_{12}(w + N\hbar)) + \\ &+ N \phi\left(\frac{w-z}{N}, z\right) R_{12}^{(z-w)/N}(z + N\hbar) - N \phi\left(\frac{w-z}{N}, w\right) R_{12}^{(z-w)/N}(w + N\hbar) + \\ &+ N^2 1 \otimes 1 \phi\left(\frac{z-w}{N}, N\hbar\right) \left(E_1(N\hbar) - E_1\left(N\hbar + \frac{z-w}{N}\right)\right), \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar}(z) R_{21}^{\hbar'}(-z) &= N \phi(\hbar' - \hbar, -z) (r_{12}(z + N\hbar) - r_{12}(z + N\hbar')) - \\ &- N \phi(\hbar' - \hbar, N\hbar) R_{12}^{\hbar - \hbar'}(z + N\hbar) + N \phi(\hbar' - \hbar, N\hbar') R_{12}^{\hbar - \hbar'}(z + N\hbar') + \\ &+ N^2 1 \otimes 1 \phi(\hbar' - \hbar, -z) (E_1(z) - E_1(z + \hbar - \hbar')). \end{aligned} \quad (1.56)$$

• *Геометрическая интерпретация:* в силу квазипериодических свойств, заданных в (1.38)–(1.41), R -матрица имеет следующую геометрическую интерпретацию. Пусть V_1 (V_2) – векторное расслоение ранга N и степени один над эллиптической кривой $\Sigma_{\tau}^{(1)}$ с координатой z_1 (кривой $\Sigma_{\tau}^{(2)}$ с координатой z_2). Рассмотрим расслоение $V_1 \boxtimes V_2$ над $\Sigma_{\tau}^{(1)} \times \Sigma_{\tau}^{(2)}$. Пусть $\text{Aut}_{\text{PGL}(N)}(V_1 \boxtimes V_2)$ – группа автоморфизмов расслоения (калибровочная группа). Сечения $\Gamma(\text{Aut}_{\text{PGL}(N)}(V_1 \boxtimes V_2))$ зависят только от антидиагональной части $\tilde{\Sigma}_{\tau}$ произведения $\Sigma_{\tau}^{(1)} \times \Sigma_{\tau}^{(2)}$ с координатой $z = z_1 - z_2$. Пусть $\tilde{\Sigma}'_{\tau}$ – дуальная кривая с координатой $\hbar$, а $\mathcal{P}$ – расслоение Пуанкаре $\mathcal{P}$ над $\tilde{\Sigma}_{\tau} \times \tilde{\Sigma}'_{\tau}$ (1.5). Тогда R -матрица (1.24) является сечением расслоения

$$R_{12}^{\hbar}(z) \in \Gamma((\text{Aut}_{\text{PGL}(N)}(V_1 \boxtimes V_2)) \otimes \mathcal{P}). \quad (1.57)$$

• *Функция Грина:* аналогично (1.19) R -матрицу можно рассматривать как функцию Грина оператора $\bar{\partial}$:

$$\bar{\partial} R_{12}^{\hbar}(z) = N P_{12} \delta^2(z, \bar{z}). \quad (1.58)$$

Свойства (1.30)–(1.48) несложно выводятся из их скалярных аналогов, за исключением равенства (1.33), которое следует из условия унитарности (1.27) в классическом пределе (1.30). Тождества для производных (1.49), (1.50) были получены в работах [6], [7]. Вырожденные тождества (1.53), (1.54) в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 3}$ следуют из невырожденного тождества (1.51) и локальных разложений (1.30), (1.34).

Наибольший интерес (в настоящей работе) представляет тождество Фэя (1.52) в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$ и его вырождения (1.55), (1.56). Мы докажем эти тождества ниже. Доказательство основано на свойстве (1.29) “симметрии аргументов” и использовании скалярных тождеств Фэя (1.15)–(1.17).

Уравнение Пенлеве VI. В качестве приложения полученных формул мы предлагаем конструкцию многомерных пар Лакса для уравнения Пенлеве VI. Обозначим полупериоды эллиптической кривой Σ_τ через Ω_a , $a = 0, 1, 2, 3$:

$$\{\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\} = \{0, 1/2, (1 + \tau)/2, \tau/2\}. \quad (1.59)$$

Уравнение Пенлеве VI в эллиптической форме [13] имеет вид

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = - \sum_{a=0}^3 \nu_a^2 \wp'(u + \Omega_a). \quad (1.60)$$

Пусть N – нечетное натуральное число. Рассмотрим следующую пару блочных матриц⁴⁾:

$$L(\hbar) = \frac{1}{2} \frac{du}{d\tau} \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & 0 \\ 0 & -1 \otimes 1 \end{pmatrix} + \sum_{a=0}^3 \frac{\nu_a}{N\sqrt{-2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{12}^{\hbar,a}(u) \\ \mathcal{R}_{21}^{\hbar,a}(-u) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

$$M(\hbar) = \sum_{a=0}^3 \frac{\nu_a}{N\sqrt{-2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}_{12}^{\hbar,a}(u) \\ \mathcal{F}_{21}^{\hbar,a}(-u) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}^{\hbar,a}(u) &= e^{2\pi i N \hbar \partial_\tau \Omega_a} R_{12}^{\hbar}(u + N\Omega_a), \\ \mathcal{R}_{21}^{\hbar,a}(-u) &= e^{-2\pi i N \hbar \partial_\tau \Omega_a} R_{21}^{\hbar}(-u - N\Omega_a), \end{aligned} \quad (1.63)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12}^{\hbar,a}(u) &= e^{2\pi i N \hbar \partial_\tau \Omega_a} F_{12}^{\hbar}(u + N\Omega_a), \\ \mathcal{F}_{21}^{\hbar,a}(-u) &= e^{-2\pi i N \hbar \partial_\tau \Omega_a} F_{21}^{\hbar}(-u - N\Omega_a); \end{aligned} \quad (1.64)$$

здесь

$$F_{ab}^{\hbar}(u) = \partial_u R_{ab}^{\hbar}(u). \quad (1.65)$$

Матрицы $L(\hbar), M(\hbar) \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \otimes \text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$. Их размер равен $2N^2 \times 2N^2$.

Уравнение Пенлеве VI (1.60) эквивалентно уравнению, сохраняющему монодромию:

$$\frac{d}{d\tau} L(\hbar) - \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\hbar} M(\hbar) = [L(\hbar), M(\hbar)], \quad (1.66)$$

где постоянная Планка $\hbar$ играет роль спектрального параметра (см. работу [1]).

Для $N = 1$ ответ (1.61), (1.62) воспроизводит эллиптическую (2×2) -пару Лакса, предложенную в работе [14]. Пара Лакса (1.61), (1.62) работает и для четных N . Но в этом случае уравнение Пенлеве содержит только одну константу:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} = -\nu^2 \wp'(u), \quad \nu^2 = \sum_{a=0}^3 \nu_a^2. \quad (1.67)$$

⁴⁾ Коэффициент $1/\sqrt{-2}$ дает нормировку константы связи, как в (1.60).

2. ДВОЙНОЙ РЯД КРОНЕКЕРА И R -МАТРИЦА БАКСТЕРА–БЕЛАВИНА

Следуя идее работы [2], получим R -матрицу Бакстера–Белавина в виде обобщения ряда Кронекера.

(. \$R\$матрица в переменных Якоби) R -матрица в переменных Якоби Представим эллипти Σ_τ (1.4) в форме Якоби:

$$C_q = \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}, \quad q = e(\tau) = e^{2\pi i \tau}.$$

Рассмотрим произведение $C_q \times C_q$ с координатами $s = e(u)$, $t = e(z)$. Вместо функции Кронекера $\phi(z, u)$ будем рассматривать распределение $g(s, t)$ на пространстве полиномов Лорана $\mathbb{C}[[s^{-1}, t^{-1}, s, t]]$. Для $|q| < |t| < 1$ оно представляется в виде ряда

$$g(s, t|q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{t^n}{q^n s - 1}. \quad (2.1)$$

Если при этом также $|q| < |s| < 1$, то

$$\begin{aligned} g(s, t|q) &= -g^+(s, t|q) + g^-(s, t|q), \\ g^+(s, t|q) &= \sum_{i, n \geq 0} s^i q^{in} t^n, \quad g^-(s, t|q) = \sum_{i, n < 0} s^i q^{in} t^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

или, эквивалентно,

$$g(s, t|q) = 1 - \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-s} + g^-(s, t) - \sum_{i, n > 0} s^i q^{in} t^n. \quad (2.3)$$

В области $|q| < |t| < 1$ и $|q| < |s| < 1$ имеем

$$g(s, t|q)|_{s=\frac{\ln u}{2\pi i}, t=\frac{\ln z}{2\pi i}} = \phi(z, u). \quad (2.4)$$

Распределение $g(s, t|q)$ обладает свойствами, аналогичными (1.6)–(1.9). В частности,

$$g(s, t|q) = g(t, s|q). \quad (2.5)$$

Из (2.2) следует, что

$$g(s^{-1}, t^{-1}|q) = -g(s, t|q) + \delta(t) + \delta(s) - 2, \quad (2.6)$$

где $\delta(s)$ – распределение на пространстве $\mathbb{C}[t, t^{-1}] = \{\psi(t) = \sum_i c_i t^i\}$, заданное функционалом $\langle \delta, \psi \rangle = \text{Res}_{t=0} \psi(t)$ и представимое в виде формального ряда

$$\delta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n. \quad (2.7)$$

Аналог квазипериодических свойств (1.11) появляется следующим образом. Распределение $g(s, t)$ есть решение следующего разностного уравнения по t (функция Грина):

$$sg(s, tq|q) - g(s, t|q) = \delta(t) - 1. \quad (2.8)$$

Оно задает продолжение распределения $g(s, t|q)$ из области $|q| < |t| < 1$ на $\mathbb{C}^*$. В силу (2.5) аналогичное уравнение имеет место и по переменной s .

Пусть $\eta = \mathbf{e}(\hbar)$. R -матрица (1.24) в переменных (s, t, η) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar}(s) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} s^{\alpha_2/N} g(s, \omega_{\alpha} + \hbar) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} s^{\alpha_2/N} \left(\sum_{m,n} \mathbf{e}\left(\frac{n\alpha_1}{N}\right) q^{n(m+\alpha_2/N)} \eta^n s^m \right) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Она играет роль функции Грина разностного оператора:

$$\eta \Lambda \otimes 1 R_{12}^{\hbar}(sq) \Lambda^{-1} \otimes 1 - R_{12}^{\hbar}(s) = (\delta(s) - 1) P_{12}. \quad (2.10)$$

Двойной ряд Кронекера [8]. Распределение $g(s, t|q)$ (и $\phi(z, u)$) представляется в виде двойного ряда Кронекера. Рассмотрим решетку на комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$W = \{\gamma = m + n\tau, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Запишем аргумент u функции $\phi(z, u)$ в виде $u = u_1 + u_2\tau$ (здесь u_1, u_2 вещественные), и пусть $\chi_u(\gamma) = \mathbf{e}(-mu_2 + nu_1)$ есть характер решетки W ($\chi_u(\gamma) : W \rightarrow S^1$), зависящий от $u \in \Sigma_{\tau}$. Двойной ряд Кронекера задается как

$$S(z, u|\tau) = \sum_{\gamma \in W} \frac{\chi_u(\gamma)}{z + \gamma}. \quad (2.11)$$

Из определения следует, что

$$\begin{aligned} S(z + 1, u|\tau) &= \mathbf{e}(u_2) S(z, u|\tau), \\ S(z + \tau, u|\tau) &= \mathbf{e}(-u_1) S(z, u|\tau). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В монографии [8] доказано, что $S(z, u|\tau)$ выражается через функцию Кронекера следующим образом:

$$S(z, u|\tau) = \mathbf{e}(u_2 z) \phi(z, u) \quad (2.13)$$

или, в координатах Якоби,

$$S(t, s|q) = t^{u_2} g(s, t|q). \quad (2.14)$$

Перейдем теперь к R -матрице и опишем ее тоже в виде двойного ряда Кронекера $S(z, u|\tau)$ (2.11). Зададим решетку W двумя генераторами $(\alpha_1/N + \hbar_1, (\alpha_2/N + \hbar_2)\tau)$, где $\hbar = \hbar_1 + \hbar_2\tau$, $\hbar_{1,2} \in \mathbb{R}$. Соответствующий характер решетки W имеет вид

$$\chi_{(m,n)}(\alpha, \hbar) = \mathbf{e}\left(-m\left(\frac{\alpha_2}{N} + \hbar_2\right) + n\left(\frac{\alpha_1}{N} + \hbar_1\right)\right). \quad (2.15)$$

Тогда R -матрица (1.24) записывается через (2.11):

$$R_{12}^{\hbar}(z) = \mathbf{e}(-\hbar_2 z) \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}} \frac{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} \chi_{(m,n)}(\alpha, \hbar) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}}{z + m + n\tau}. \quad (2.16)$$

Квазипериодические свойства (1.40), (1.41) становятся очевидными. Из формулы (2.13) следует, что особенность при $z, \hbar \rightarrow 0$ удовлетворяет равенствам (1.36).

Перейдем от $R_{12}^{\hbar}(z)$ к

$$\tilde{R}_{12}^{\hbar}(z) = \mathbf{e}(\hbar_2 z) R_{12}^{\hbar}(z).$$

Это выражение тоже удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера, а квазипериодические свойства приобретают вид (ср. с (1.40))

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{12}^{\hbar}(z+1) &= \mathbf{e}(\hbar_2) Q^{-1} \otimes 1 \tilde{R}_{12}^{\hbar}(z) Q \otimes 1, \\ \tilde{R}_{12}^{\hbar}(z+\tau) &= \mathbf{e}(\hbar_1) \Lambda^{-1} \otimes 1 \tilde{R}_{12}^{\hbar}(z) \Lambda \otimes 1. \end{aligned}$$

В отличие от свойств (1.41), матрица $\tilde{R}$ не является голоморфной по $\hbar$, но является двоякопериодической.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Представление (2.16) означает, что эллиптическая $\tilde{R}$ -матрица представляется в виде усреднения матрицы Янга $z^{-1}P_{12}$ по решетке W , подкрученной на характер (2.15).

Из (1.30) следует представление и для классической r -матрицы:

$$\begin{aligned} r_{12}(z) &= E_1(z) 1 \otimes 1 + \sum_{(m,n) \in (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \setminus (0,0)} \frac{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} \chi(m,n)(\alpha, 0) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}}{z + m + n\tau}, \\ m_{12}(z) &= \frac{E_1^2(z) - \wp(z)}{2} 1 \otimes 1 + \\ &+ \sum_{(m,n) \in (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \setminus (0,0)} \frac{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N} (z + m + n\bar{\tau}) \chi(m,n)(\alpha, 0) T_{\alpha} \otimes T_{-\alpha}}{(z + m + n\tau)(\bar{\tau} - \tau)}. \end{aligned}$$

3. ВЫВОД ТОЖДЕСТВ

Имеют место следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. R -матрица (1.24) удовлетворяет свойству симметрии аргументов (1.29).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определения (1.28) и (1.23), имеем

$$\begin{aligned} R_{12}^{z/N}(N\hbar)P_{12} &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha} T_{\beta} \otimes T_{-\alpha} T_{-\beta} \varphi_{\alpha} \left(N\hbar, \omega_{\alpha} + \frac{z}{N} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha, \beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha+\beta} \otimes T_{-\alpha-\beta} \varphi_{\alpha} \left(N\hbar, \omega_{\alpha} + \frac{z}{N} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как $\kappa_{\alpha, \beta} = \kappa_{\alpha, \alpha+\beta}$, свойство (1.29) эквивалентно набору N^2 скалярных тождеств

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha, \gamma}^2 \varphi_{\alpha} \left(N\hbar, \omega_{\alpha} + \frac{z}{N} \right) = \varphi_{\gamma} \left(z, \omega_{\gamma} + \hbar \right), \quad \gamma \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

или

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha, \gamma}^2 \varphi_{\alpha} \left(z, \omega_{\alpha} + \hbar \right) = \varphi_{\gamma} \left(N\hbar, \omega_{\gamma} + \frac{z}{N} \right), \quad \gamma \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Проверка этих тождеств производится путем сравнения полюсов и вычетов. Нам также потребуется выражение для суммы корней N -й степени из единицы (оно следует в том числе из $P_{12}^2 = 1$):

$$\sum_{\alpha} \kappa_{\alpha, \gamma}^2 = N^2 \delta_{\gamma, 0}. \quad (3.4)$$

Вычислим вычет обеих частей равенства (3.2) в точке $\hbar = -\omega_{\mu}$. В правой части получим $\delta_{\mu, \gamma} e^{2\pi i \partial_{\tau} \omega_{\gamma} z}$ в силу (1.8). В левой части имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\hbar = -\omega_{\mu}} \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha, \gamma}^2 \varphi_{\alpha} \left(N\hbar, \omega_{\alpha} + \frac{z}{N} \right) &= \\ &= \operatorname{Res}_{\hbar = 0} \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha, \gamma}^2 \varphi_{\alpha} \left(N\hbar - N\omega_{\mu}, \omega_{\alpha} + \frac{z}{N} \right) \stackrel{(1.10), (1.11)}{=} \\ &\stackrel{(1.10), (1.11)}{=} \operatorname{Res}_{\hbar = 0} \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha, \gamma}^2 \kappa_{\alpha, -\mu}^2 e^{2\pi i \partial_{\tau} \omega_{\mu} z} \varphi_{\alpha} \left(N\hbar, \omega_{\alpha} + \frac{z}{N} \right) \stackrel{(1.8)}{=} \\ &\stackrel{(1.8)}{=} \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha, \gamma - \mu}^2 e^{2\pi i \partial_{\tau} \omega_{\mu} z} \frac{1}{N} \stackrel{(3.4)}{=} \delta_{\mu, \gamma} e^{2\pi i \partial_{\tau} \omega_{\mu} z}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. R -матрица (1.24) удовлетворяет (1.52) – тождеству Фэя в пространстве $\operatorname{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выражение

$$R_{12}^{\hbar}(z) R_{21}^{\hbar'}(-w) = - \sum_{\alpha, \beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha + \beta} \otimes T_{-\alpha - \beta} \varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha} + \hbar) \varphi_{\beta}(w, \omega_{\beta} - \hbar'). \quad (3.6)$$

Здесь уже использовано свойство $R_{21}^{\hbar'}(-w) = -R_{12}^{-\hbar'}(w)$. Применим поочередно тождество Фэя (1.15), затем (3.3), а затем снова (1.15):

$$\begin{aligned} R_{12}^{\hbar}(z) R_{21}^{\hbar'}(-w) &= \\ &= - \sum_{\alpha, \beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha + \beta} \otimes T_{-\alpha - \beta} \varphi_{\alpha}(z - w, \omega_{\alpha} + \hbar) \varphi_{\alpha + \beta}(w, \omega_{\alpha + \beta} + \hbar - \hbar') - \\ &\quad - \sum_{\alpha, \beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha + \beta} \otimes T_{-\alpha - \beta} \varphi_{\beta}(w - z, \omega_{\beta} - \hbar') \varphi_{\alpha + \beta}(z, \omega_{\alpha + \beta} + \hbar - \hbar') = \\ &= -N \sum_{\gamma} T_{\gamma} \otimes T_{-\gamma} \varphi_{\gamma} \left(N\hbar, \omega_{\gamma} + \frac{z - w}{N} \right) \varphi_{\gamma}(w, \omega_{\gamma} + \hbar - \hbar') + \\ &\quad + N \sum_{\gamma} T_{\gamma} \otimes T_{-\gamma} \varphi_{\gamma} \left(N\hbar', \omega_{\gamma} + \frac{z - w}{N} \right) \varphi_{\gamma}(z, \omega_{\gamma} + \hbar - \hbar') = \\ &= N \sum_{\gamma} T_{\gamma} \otimes T_{-\gamma} \left(-\phi \left(N\hbar, \frac{z - w}{N} + \hbar' - \hbar \right) \varphi_{\gamma}(w + N\hbar, \omega_{\gamma} + \hbar - \hbar') - \right. \\ &\quad \left. - \phi \left(w, \hbar - \hbar' - \frac{z - w}{N} \right) \varphi_{\gamma} \left(w + N\hbar, \omega_{\gamma} + \frac{z - w}{N} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \phi \left(N\hbar', \frac{z - w}{N} + \hbar' - \hbar \right) \varphi_{\gamma}(z + N\hbar', \omega_{\gamma} + \hbar - \hbar') + \right. \\ &\quad \left. + \phi \left(z, \hbar - \hbar' - \frac{z - w}{N} \right) \varphi_{\gamma} \left(z + N\hbar', \omega_{\gamma} + \frac{z - w}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. R -матрицы (1.24) и (1.31) удовлетворяют вырожденным тождествам Фэя (1.55), (1.56) в пространстве $\text{Mat}(N, \mathbb{C})^{\otimes 2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с тождества (1.55). Рассмотрим выражение

$$R_{12}^h(z)R_{21}^h(-w) = - \sum_{\alpha, \beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha+\beta} \otimes T_{-\alpha-\beta} \varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha} + \hbar) \varphi_{\beta}(w, \omega_{\beta} - \hbar). \quad (3.8)$$

Разобьем его на две части в соответствии с $\sum_{\alpha, \beta} = \sum_{\alpha \neq -\beta} + \sum_{\alpha = -\beta}$. Первую часть преобразуем, как в предложении 3.2 (с использованием (1.15), затем (3.3) и снова (1.15)):

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha \neq -\beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha+\beta} \otimes T_{-\alpha-\beta} \varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha} + \hbar) \varphi_{\beta}(w, \omega_{\beta} - \hbar) = \\ & = - \sum_{\alpha \neq -\beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha+\beta} \otimes T_{-\alpha-\beta} \varphi_{\alpha}(z - w, \omega_{\alpha} + \hbar) \varphi_{\alpha+\beta}(w, \omega_{\alpha+\beta} - \hbar) - \\ & - \sum_{\alpha \neq -\beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha+\beta} \otimes T_{-\alpha-\beta} \varphi_{\beta}(w - z, \omega_{\beta} - \hbar) \varphi_{\alpha+\beta}(z, \omega_{\alpha+\beta} - \hbar) = \\ & = \dots = -N\phi\left(\frac{z-w}{N}, N\hbar\right) \sum_{\gamma \neq 0} T_{\gamma} \otimes T_{-\gamma} \varphi_{\gamma}(w + N\hbar, \omega_{\gamma} - \hbar) - \\ & - N\phi\left(\frac{w-z}{N}, w\right) \sum_{\gamma \neq 0} T_{\gamma} \otimes T_{-\gamma} \varphi_{\gamma}\left(w + N\hbar, \omega_{\gamma} + \frac{z-w}{N}\right) + \\ & + N\phi\left(\frac{z-w}{N}, N\hbar\right) \sum_{\gamma \neq 0} T_{\gamma} \otimes T_{-\gamma} \varphi_{\gamma}(z + N\hbar, \omega_{\gamma} - \hbar) + \\ & + N\phi\left(\frac{w-z}{N}, z\right) \sum_{\gamma \neq 0} T_{\gamma} \otimes T_{-\gamma} \varphi_{\gamma}\left(z + N\hbar, \omega_{\gamma} + \frac{z-w}{N}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Добавляя (и вычитая) скалярные члены $1 \otimes 1$ в каждой строке, получим первую и вторую строки тождества (1.55). К скалярным частям добавляется также выражение

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha = -\beta} \kappa_{\alpha, \beta}^2 T_{\alpha+\beta} \otimes T_{-\alpha-\beta} \varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha} + \hbar) \varphi_{\beta}(w, \omega_{\beta} - \hbar) = \\ & = 1 \otimes 1 \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(z, \omega_{\alpha} + \hbar) \varphi_{\alpha}(-w, \omega_{\alpha} + \hbar) \stackrel{(1.17)}{=} \\ & \stackrel{(1.17)}{=} 1 \otimes 1 \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(z - w, \omega_{\alpha} + \hbar) (E_1(z) - E_1(w) + E_1(\hbar + \omega_{\alpha}) - E_1(z - w + \hbar + \omega_{\alpha})). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Оно преобразуется с помощью равенства (3.3) для $\gamma = 0$,

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(z - w, \omega_{\alpha} + \hbar) = N\phi\left(N\hbar, \frac{z-w}{N}\right),$$

и производной (1.13), (1.14) от него же по $\hbar$:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(z-w, \omega_{\alpha} + \hbar) (E_1(z-w + \hbar + \omega_{\alpha}) - E_1(\hbar + \omega_{\alpha})) = \\ = N^2 \phi\left(N\hbar, \frac{z-w}{N}\right) \left(E_1\left(N\hbar + \frac{z-w}{N}\right) - E_1(N\hbar)\right). \end{aligned}$$

Таким образом завершается доказательство тождества (1.55). Тождество (1.56) доказывается аналогично. Кроме того, (1.56) выводится из (1.55) с использованием (1.29) и (1.37).

4. МНОГОМЕРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ VI

Для уравнений Пенлеве известны матричные пары Лакса разного типа и размера (см., например, работы [15]–[17]). В этом разделе мы построим R -матричнозначное обобщение эллиптической (2×2) -пары Лакса, предложенной в статье [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Уравнение Пенлеве VI в эллиптической форме (1.60) эквивалентно изомонодромным уравнениям (1.66) с парой Лакса (1.61)–(1.65) и эллиптической R -матрицей (1.24) для нечетных N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично предложенному в [14] для скалярного ($N = 1$) случая.

Во-первых, заметим, что

$$\frac{d}{d\tau} L(\hbar) = \frac{du}{d\tau} \partial_u L(\hbar) + \partial_{\tau} L(\hbar),$$

где последнее слагаемое есть производная по явной зависимости от τ . Это слагаемое сокращается с величиной $\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\hbar} M(\hbar)$ в силу уравнения теплопроводности (1.48) $2\pi i \partial_{\tau} \mathcal{R}_{bc}^{\hbar,a}(u) = \partial_{\hbar} \mathcal{F}_{bc}^{\hbar,a}(u)$.

Положим

$$L^a = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R}_{12}^{\hbar,a}(u) \\ \mathcal{R}_{21}^{\hbar,a}(-u) & 0 \end{pmatrix}, \quad M^a = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}_{12}^{\hbar,a}(u) \\ \mathcal{F}_{21}^{\hbar,a}(-u) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Основное утверждение, необходимое нам для проверки, состоит в том, что для $a \neq b$

$$[L^a, M^b] + [L^b, M^a] = 0, \quad (4.2)$$

т. е. вклад в $[L(\hbar), M(\hbar)]$ дают только члены вида $[L^a, M^a]$. Действительно, из унитарности (1.27) следует, что

$$\mathcal{R}_{12}^{\hbar,a}(u) \mathcal{R}_{21}^{\hbar,a}(-u) = R_{12}^{\hbar}(u + N\Omega_a) R_{21}^{\hbar}(-u - N\Omega_a) = N^2 (\wp(N\hbar) - \wp(u + N\Omega_a)). \quad (4.3)$$

Беря производную (4.3) по u , получим

$$\mathcal{F}_{12}^{\hbar,a}(u) \mathcal{R}_{21}^{\hbar,a}(-u) - \mathcal{R}_{12}^{\hbar,a}(u) \mathcal{F}_{21}^{\hbar,a}(-u) = -N^2 \wp'(u + N\Omega_a). \quad (4.4)$$

Это тождество дает уравнение движения. Заметим, что для наличия четырех произвольных констант число N должно быть нечетным, так как в этом случае мы

имеем $\wp'(u + N\Omega_a) = \wp'(u + \Omega_a)$. Если же N – четное число, то $\wp'(u + N\Omega_a) = \wp'(u)$, и остается только одна константа, как в (1.67).

Для доказательства равенства (4.2) напомним, что в скалярном случае оно следует из соотношения

$$\begin{aligned} & \varphi_a(\hbar, u + \Omega_a) f_b(\hbar, -u - \Omega_b) - f_b(\hbar, u + \Omega_b) \varphi_a(\hbar, -u - \Omega_a) + \\ & + \varphi_b(\hbar, u + \Omega_b) f_a(\hbar, -u - \Omega_a) - f_a(\hbar, u + \Omega_a) \varphi_b(\hbar, -u - \Omega_b) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где функция

$$f_a(z, u + \Omega_a) = e^{2\pi i \partial_\tau \Omega_a \hbar} \partial_w \phi(\hbar, w) \Big|_{w=u+\Omega_a}$$

есть скалярный аналог $\mathcal{F}_{12}^{\hbar,a}(u)$. Тождество (4.5) выводится из (1.16) и (1.10), (1.11) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \varphi_a(\hbar, u + \Omega_a) \varphi_b(\hbar, -u - \Omega_b) + \varphi_b(\hbar, u + \Omega_b) \varphi_a(\hbar, -u - \Omega_a) = \\ & = \varphi_{a+b}(\hbar, \Omega_a + \Omega_b) (2E_1(\hbar) - E_1(\hbar + \Omega_a - \Omega_b) - E_1(\hbar + \Omega_b - \Omega_a)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Правая часть этого равенства не зависит от u . Производная соотношения (4.6) по u дает (4.5).

Аналогично (4.6) из вырожденного тождества Фэя (1.55) следует равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{12}^{\hbar,a}(u) \mathcal{R}_{21}^{\hbar,b}(-u) + \mathcal{R}_{12}^{\hbar,b}(u) \mathcal{R}_{21}^{\hbar,a}(-u) = \\ & = N^2 1 \otimes 1 \varphi_{a+b}(N\hbar, \Omega_a + \Omega_b) (2E_1(N\hbar) - E_1(N\hbar + \Omega_a - \Omega_b) - E_1(N\hbar + \Omega_b - \Omega_a)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Его можно непосредственно проверить, используя соотношения (1.10), (1.11), которые переписываются в виде

$$\phi(z, w + \Omega_a) = e^{-2\pi i z \partial_\tau \Omega_a} \phi(z, w - \Omega_a).$$

Правая часть равенства (4.7) является скалярной величиной и не зависит от u . Производная от (4.7) по u дает

$$\mathcal{F}_{12}^{\hbar,a}(u) \mathcal{R}_{21}^{\hbar,b}(-u) - \mathcal{R}_{12}^{\hbar,a}(u) \mathcal{F}_{21}^{\hbar,b}(-u) + \mathcal{F}_{12}^{\hbar,b}(u) \mathcal{R}_{21}^{\hbar,a}(-u) - \mathcal{R}_{12}^{\hbar,b}(u) \mathcal{F}_{21}^{\hbar,a}(-u) = 0. \quad (4.8)$$

Это тождество лежит в основе (4.2).

Благодарности. Мы выражаем благодарность Н. Славнову и А. Забродину за ценные замечания. Исследование А.В. Зотова (результаты разделов 3, 4) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005) в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

Список литературы

- [1] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *JHEP*, **10** (2014), 109, 29 pp., arXiv: 1408.6246.
- [2] A. Polischuk, *Adv. Math.*, **168**:1 (2002), 56–95.
- [3] R. J. Baxter, *Ann. Phys.*, **70** (1972), 193–228.
- [4] A. A. Belavin, *Nucl. Phys. B*, **180**:2 (1981), 189–200; А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:3 (1982), 1–29.

- [5] M. P. Richey, C. A. Tracy, *J. Statist. Phys.*, **42**:3–4 (1986), 311–348; K. Hasegawa, *J. Math. Phys.*, **35**:11 (1994), 6158–6171.
- [6] V. V. Bazhanov, Y. G. Stroganov, “On connection between the solutions of the quantum and classical triangle equations”, *Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля*, **1**, Ин-т физики высоких энергий, Протвино, 1983, 52–54.
- [7] Л. А. Тахтаджян, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **133** (1984), 258–276.
- [8] A. Weil, *Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, **88**, Springer, Berlin, New York, 1976.
- [9] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.
- [10] J. D. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, *Lecture Notes in Mathematics*, **352**, Springer, Berlin, 1973.
- [11] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *JHEP*, **07** (2014), 012, 38 pp., arXiv:1405.7523; *Nucl. Phys. B*, **887** (2014), 400–422, arXiv:1406.2995.
- [12] M. Aguiar, “Infinitesimal Hopf algebras”, *New Trends in Hopf Algebra Theory* (La Falda, Sierras de Córdoba, Argentina, August 9–13, 1999), *Contemporary Mathematics*, **267**, eds. N. Andruskiewitsch, W. R. Ferrer Santos, H.-J. Schneider, AMS, Providence, RI, 2000, 1–29.
- [13] P. Painlevé, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **143** (1906), 1111–1117; Yu. Manin, “Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbb{P}^2$ ”, *Geometry of Differential Equations*, *Translations American Mathematical Society. Ser. 2*, **186**, Advances in the Mathematical Sciences, **39**, eds. A. Khovanskij, A. Varchenko, V. Vassiliev, AMS, Providence, RI, 1998, 131–151.
- [14] A. Zotov, *Lett. Math. Phys.*, **67**:2 (2004), 153–165, arXiv:hep-th/0310260.
- [15] M. Jimbo, T. Miwa, *Phys. D*, **2**:3 (1981), 407–448; N. Joshi, A. Kitaev, P. Treharne, *J. Math. Phys.*, **48**:10 (2007), 103512, 42 pp., arXiv:0706.1750; M. Noumi, Y. Yamada, “A new Lax pair for the sixth Painlevé equation associated with $\widehat{\mathfrak{so}}(8)$ ”, *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis*, eds. T. Kawai, K. Fujita, World Sci., Singapore, 2002, 238–252, arXiv:math-ph/0203029; G. Aminov, S. Arthamonov, *New 2 × 2-matrix linear problems for Painlevé equations*, arXiv:1112.4688.
- [16] B. Dubrovin, M. Mazzocco, *Invent. Math.*, **141**:1 (2000), 55–147, arXiv:math/9806056; P. Boalch, *Proc. London Math. Soc.* (3), **90**:1 (2005), 167–208.
- [17] A. Levin, M. Olshanetsky, “Painlevé–Calogero correspondence”, *Calogero–Moser–Sutherland Models* (Montréal, QC, 1997), CRM Series in Mathematical Physics, eds. J. F. van Diejen, L. Vinet, Springer, New York, 2000, 313–332, arXiv:alg-geom/9706010; A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Commun. Math. Phys.*, **268**:1 (2006), 67–103, arXiv:math/0508058; A. Levin, A. Zotov, “On rational and elliptic forms of Painlevé VI equation”, *Moscow Seminar on Mathematical Physics. II*, *Translations American Mathematical Society. Ser. 2*, **221**, Advances in the Mathematical Sciences, **60**, eds. Yu. Neretin, M. A. Olshanetsky, A. Rosly, AMS, Providence, RI, 2007, 173–184; A. Zabrodin, A. Zotov, *J. Math. Phys.*, **53**:7 (2012), 073507, 19 pp., arXiv:1107.5672; 073508, 19 pp.; *Construct. Approx.*, **41**:3 (2015), 325–423, arXiv:1212.5813; А. М. Левин, М. А. Ольшанецкий, А. В. Зотов, *УМН*, **69**:1(415) (2014), 39–124, arXiv:1311.4498.

Поступила в редакцию 26.02.2014