Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, К. Д. Кулиев, Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 272–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8878>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 05:11:09

© 2016 г.

Ж. И. Абдуллаев*, К. Д. Кулиев*

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ БОЗОНОВ НА ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассматривается гамильтониан системы двух бозонов на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$. Оператор Шредингера $H(k_1, k_2)$ (где $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ – полный квазиимпульс) данной системы при $k_1 = k_2 = \pi$ имеет бесконечное число собственных значений. В случае потенциала определенного вида одно собственное значение является простым, другое – двукратным, а остальные собственные значения являются трехкратными. Доказано, что при малых $\beta > 0$ для оператора $H(\pi, \pi - 2\beta)$ двукратное собственное значение оператора $H(\pi, \pi)$ расщепляется на два невырожденных собственных значения, а трехкратные собственные значения расщепляются на три различных невырожденных собственных значения. Для этих собственных значений получены асимптотические формулы с точностью до β^2 , а также явный вид собственных функций оператора $H(\pi, \pi - 2\beta)$.

Ключевые слова: гамильтониан, связанное состояние, оператор Шредингера, полный квазиимпульс, собственное значение, теория возмущений, принцип Бирмана–Швингера.

DOI: 10.4213/tmf8878

1. ВВЕДЕНИЕ

Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра впервые подробно исследовалась Минлосом и Маматовым [1], а потом в более общей ситуации – Минлосом и Могильнером [2]. В статье [3] Хауленд показал, что теорема Реллиха о возмущении собственных значений не распространяется на теорию резонансов. Исследование связанных состояний гамильтониана H системы двух частиц на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ сводится к изучению собственных значений семейства операторов Шредингера $H(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ – полный квазиимпульс системы, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$. При этом собственные функции оператора $H(\mathbf{k})$ трактуются как связанные состояния гамильтониана H , а собственные значения – как энергии связанных состояний. Связанные состояния гамильтониана H системы двух фермионов на одномерной решетке изучались в работе [4], а возмущения собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке исследовались в работе [5].

*Механико-математический факультет, Самаркандский государственный университет им. Алишера Навои, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: jabdullaev@mail.ru, komilkuliev@gmail.com

Дискретный спектр двухчастичного непрерывного оператора Шредингера

$$h_\lambda = -\Delta + \lambda V$$

исследовался многими авторами, причем условия на потенциал V формулировались в его координатном представлении. Условия конечности множества отрицательных точек спектра и отсутствия положительных собственных значений оператора h_λ приведены в монографии [6]. Если $V \leq 0$, то число отрицательных собственных значений $N(\lambda)$ есть неубывающая функция от $\lambda \in (0, \infty)$, и каждое собственное значение $z_n(\lambda)$ убывает на полуоси $(0, \infty)$. Известно, что с уменьшением константы связи λ значения энергий связанных состояний оператора h_λ приближаются к краю непрерывного спектра [6] и при некотором конечном значении λ попадают на край. При этом возникают два вопроса: соответствуют ли такому пороговому состоянию связанное или виртуальное состояние (т. е. квадратично-интегрируема ли соответствующая волновая функция) и куда “пропадают” связанные состояния при дальнейшем уменьшении λ ? Изучению первого вопроса посвящены работы [7]–[9]. Что касается второго вопроса, оказывается, что связанное состояние исчезает, поглощаясь непрерывным спектром, и превращается в резонанс.

В настоящей работе рассматриваются связанные состояния гамильтониана $\hat{H}$ системы двух бозонов на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$, другими словами, изучается дискретный спектр семейства операторов Шредингера $H(k_1, k_2)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{T}^2$, соответствующих гамильтониану $\hat{H}$. Поскольку мы полагаем, что $H(k_1, k_2) = H(-k_1, k_2) = H(k_1, -k_2)$, можно считать, что $k_1, k_2 \in [0, \pi]$.

В случае $\mathbf{k} = (\pi, \pi)$ оператор $H(\pi, \pi)$ имеет бесконечное число собственных значений вида $4 - \hat{v}(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$, а существенный спектр состоит из одной точки 4. Здесь функция $\hat{v}$ определяет потенциал взаимодействия. Мы в основном будем рассматривать потенциал $\hat{v}$ вида

$$\hat{v}(n, m) = \begin{cases} \bar{v}(n), & \text{если } m = 0, \\ \bar{v}(|n| + 1), & \text{если } |m| = 1, \\ 0, & \text{если } |m| \geq 2, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\bar{v}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ – четная, убывающая на $\mathbb{Z}_+$ функция из пространства $\ell_2(\mathbb{Z})$, тогда эти собственные значения $z_n(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, располагаются в порядке возрастания,

$$z_0(\pi, \pi) < z_1(\pi, \pi) < \dots < z_n(\pi, \pi) < \dots,$$

при этом наименьшее собственное значение $z_0(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(0)$ является простым, собственное значение $z_1(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(1)$ – двукратным, а остальные собственные значения $z_n(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(n)$, $n \geq 2$, являются трехкратными. В этом случае точка существенного спектра $z_\infty(\pi, \pi) = 4$ представляет собой бесконечнократное собственное значение.

Пусть $H(\pi, \pi - 2\beta) = H(\pi, \pi) - \sin \beta W_2$. Применяв теорему Като–Реллиха, для невырожденного собственного значения $z_0(\pi, \pi)$ мы выводим асимптотическую формулу с точностью до β^2 (см. теоремы 4.2 и 7.1). Далее рассматриваются подпространства, инвариантные относительно оператора $H(\pi, k_2)$, и доказывается, что этот оператор имеет бесконечно много инвариантных подпространств $\mathfrak{R}_n^-$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{R}_n^+$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Доказано, что при малых $\beta > 0$ двукратное собственное значение $z_1(\pi, \pi)$ оператора $H(\pi, \pi)$ расщепляется на два невырожденных собственных

значения $z_{1(1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ и $z_{1(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ (см. теорему 7.2), а трехкратные собственные значения $z_n(\pi, \pi)$, $n \geq 2$, распадаются на три различных невырожденных собственных значения $z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$, $z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta)$ и $z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$. Для этих собственных значений получены асимптотические формулы с точностью до β^2 (см. теорему 7.3). Во всех случаях выписан явный вид собственных функций оператора Шредингера $H(\pi, \pi - 2\beta)$ (теоремы 7.1–7.3).

Что касается существенного спектра $\{4\}$ оператора $H(\pi, \pi)$, т. е. бесконечнократного собственного значения $z_\infty(\pi, \pi) = 4$, то он при любом возмущении $\beta > 0$ превращается в существенный спектр (возмущение W_2 некомпактно)

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\pi, \pi - 2\beta)) = [4 - 2 \sin \beta, 4 + 2 \sin \beta].$$

Если потенциал $\hat{v}$ имеет вид (1.1), то уравнение Шредингера $H(\pi, \pi - 2\beta)f = zf$, $f \in \mathfrak{R}_n^-$, приобретает достаточно простой вид (см. формулу (6.9)). Благодаря этому мы получаем явный вид собственного значения $z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta)$ (см. формулу (6.8)) и собственной функции $f_{n(n-1)}^-$ (см. теорему 7.3). С возрастанием малого параметра $\beta > 0$ собственное значение $z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta)$ и левый край $m(\pi, \pi - 2\beta) = 4 - 2 \sin \beta$ непрерывного спектра оператора $H(\pi, \pi - 2\beta)$ сдвигаются налево с разными скоростями и совпадают при $\beta = \beta_n = \arcsin \bar{v}(n)$. При этом $m(\pi, \pi - 2\beta_n) = 4 - 2 \sin \beta_n$ оказывается виртуальным уровнем (т. е. соответствующая волновая функция не является квадратично-интегрируемой). При дальнейшем возрастании $\beta \in (\beta_n, \pi/2]$ это собственное значение исчезает, поглощаясь непрерывным спектром, и превращается в (нефизический) резонанс.

Уравнение Шредингера $H(\pi, \pi - 2\beta)f = zf$ с малым параметром β решается с помощью трех различных методов и в трех разных формах. Первый метод – теория возмущений, разработанная Реллихом и Като [10] (см. теорему 4.1). Второй метод принадлежит Фредгольму и связан с определителем Фредгольма оператора Фридрихса. В этом методе мы опираемся на асимптотические формулы. Третий метод аналитический, в нем применяются свойства аналитических функций.

2. ОПИСАНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Свободному гамильтониану $\hat{H}_0$ системы двух бозонов на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$ обычно соответствует ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве

$$\ell_2^{\text{sym}}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) := \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) : f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$$

по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Здесь m – масса бозона, которую далее мы считаем равной единице, $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ и $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, где I – единичный оператор, а решетчатый лапласиан Δ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел,

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^2 [\hat{\psi}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2),$$

где $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ – единичные орты в $\mathbb{Z}^2$. Полный гамильтониан $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{\text{sym}}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2)$ и представляет собой разность свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ и потенциала взаимодействия $\hat{V}_2$ двух частиц [5], [11]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2, \quad (2.1)$$

где

$$(\hat{V}_2 \hat{\psi})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{v}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{\text{sym}}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2), \quad \hat{v}(\mathbf{x}) = \hat{v}(-\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2. \quad (2.2)$$

При этом условии гамильтониан $\hat{H}$ является ограниченным и самосопряженным оператором в пространстве $\ell_2^{\text{sym}}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2)$.

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$F: \ell_2^{\text{sym}}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) \rightarrow L_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2).$$

Гамильтониан $H = H_0 - V = F\hat{H}F^{-1}$ в импульсном представлении коммутирует с унитарными операторами $U_{\mathbf{s}}$, $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$, заданными как

$$(U_{\mathbf{s}} f)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = e^{-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)} f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad f \in L_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2).$$

Отсюда следует, что существуют разложения пространства $L_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)$ и операторов $U_{\mathbf{s}}$, H в прямые интегралы [6], [12]:

$$L_2^{\text{sym}}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2) = \int_{\mathbb{T}^2} \bigoplus L_2(F_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k}, \quad U_{\mathbf{s}} = \int_{\mathbb{T}^2} \bigoplus U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad H = \int_{\mathbb{T}^2} \bigoplus \tilde{H}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Здесь

$$F_{\mathbf{k}} = \{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2: \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}\}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{T}^2,$$

а $U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k})$ – оператор умножения на функцию $e^{-i(\mathbf{s}, \mathbf{k})}$ в $L_2(F_{\mathbf{k}})$. Слой $\tilde{H}(\mathbf{k})$ оператора H также действует в $L_2(F_{\mathbf{k}})$ и унитарно эквивалентен оператору $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) - V$, который называется оператором Шредингера. Этот оператор действует в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathbf{s}}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2): f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})\}$ по формуле

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{q} - \mathbf{s})f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (2.3)$$

Невозмущенный оператор $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}\right) + \varepsilon\left(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}\right) = 4 - 2 \cos \frac{k_1}{2} \cos q_1 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos q_2. \quad (2.4)$$

Оператор возмущения V является интегральным оператором в $L_2^{\mathbf{s}}(\mathbb{T}^2)$ с ядром

$$\frac{1}{2\pi} v(\mathbf{q} - \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} (F\hat{v})(\mathbf{q} - \mathbf{s})$$

и принадлежит классу операторов Гильберта–Шмидта.

Начиная с раздела 4 мы будем рассматривать оператор $H(\mathbf{k})$ с потенциалом $\hat{v}$ вида

$$\hat{v}(n, m) = \begin{cases} \bar{v}(n), & \text{если } m = 0, \\ \bar{v}(|n| + 1), & \text{если } |m| = 1, \\ 0, & \text{если } |m| \geq 2, \end{cases} \quad (2.5)$$

с носителем в полосе $D = \{\mathbf{x} = (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : n \in \mathbb{Z}, |m| \leq 1\}$:

Функция $\bar{v}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ в (2.5) является четной и убывающей на $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (т.е. $\bar{v}(0) > \bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \dots$) и принадлежит пространству $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$. Тогда ядро v интегрального оператора V , т.е. фурье-образ потенциала $\hat{v}$, имеет вид

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}) &:= (F\hat{v})(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \hat{v}(\mathbf{n}) e^{i(\mathbf{n}, \mathbf{p})} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1) \cos p_2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{v}(n) \cos np_1 + 2\bar{v}(n+1) \cos p_2 \cos np_1) \right]. \end{aligned}$$

Пусть $f \in L_2^e(\mathbb{T}^2)$. Пользуясь формулой $\cos(p-q) = \cos p \cos q + \sin p \sin q$ и равенством

$$\int_{\mathbb{T}^2} \sin nq_1 \cos mq_2 f(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_{\mathbb{T}^2} \cos nq_1 \sin mq_2 f(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0 \quad m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

получим следующий вид оператора V :

$$\begin{aligned} (Vf)(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{p} - \mathbf{q}) f(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \left[\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1) \cos p_2 \cos q_2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n) \cos np_1 \cos nq_1 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+1) (\cos np_1 \cos nq_1 \cos p_2 \cos q_2 + \sin np_1 \sin nq_1 \sin p_2 \sin q_2) \right] f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. СПЕКТР ОПЕРАТОРА $H(\mathbf{k})$

Заметим, что спектры операторов $H_0(\mathbf{k})$ и V известны. Оператор $H_0(\mathbf{k})$ не имеет собственных значений, его спектр чисто непрерывный и совпадает с областью значений функции $\varepsilon_{\mathbf{k}}$:

$$\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})],$$

где

$$m(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^2} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \quad M(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^2} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}).$$

Спектр оператора V представляет собой множество $\{0, \hat{v}(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2\}$, при этом $\hat{v}(\mathbf{n})$ есть собственное значение оператора V , а соответствующей ему собственной функцией является $\phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{q}) = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{q})$. При условии (2.2) оператор V является оператором Гильберта–Шмидта и, следовательно, компактным оператором. Поэтому в силу

теоремы Вейля существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\mathbf{k})$:

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})].$$

Длину $\omega(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) - m(\mathbf{k})$ этого отрезка назовем шириной непрерывного спектра оператора $H(\mathbf{k})$,

$$\omega(\mathbf{k}) = 4 \cos \frac{k_1}{2} + 4 \cos \frac{k_2}{2}. \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что

$$\min_{\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2} \omega(\mathbf{k}) = \omega(\pi, \pi) = 0, \quad \max_{\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2} \omega(\mathbf{k}) = \omega(0, 0) = 8.$$

Из формулы (3.1) видно, что ширина непрерывного спектра $\omega(\mathbf{k})$ уменьшается при возрастании координаты $k_j \in [0, \pi]$, $j = 1, 2$, полного квазиимпульса $\mathbf{k}$ системы двух частиц. Ширину непрерывного спектра оператора $H(\mathbf{k})$ по направлению $\mathbf{e}_j$ определим по формуле

$$\omega_j(\mathbf{k}) = \max_{p_j \in [-\pi, \pi]} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) - \min_{p_j \in [-\pi, \pi]} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 4 \cos \frac{k_j}{2}, \quad j = 1, 2.$$

Имеет место равенство $\omega(\mathbf{k}) = \omega_1(\mathbf{k}) + \omega_2(\mathbf{k})$.

Если $\mathbf{k} = (\pi, \pi)$, то ширина непрерывного спектра обращается в нуль, $\omega(\pi, \pi) = 0$, и спектр оператора $H(\pi, \pi) = 4I - V$ состоит из собственных значений вида $4 - \hat{v}(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$, и существенного спектра $\{4\}$. С уменьшением ширины непрерывного спектра число собственных значений оператора Шредингера $H(\mathbf{k})$ возрастает (см. работы [4], [12]). Если $k_j = \pi$ (для какого-либо $j \in \{1, 2\}$), то $\omega_j(\mathbf{k}) = 0$ и существует потенциал $\hat{v}$ такой, что оператор $H(\mathbf{k})$ имеет бесконечное число собственных значений вне непрерывного спектра.

Приведем некоторые известные факты и обозначения из теории операторов и теории возмущений. Для любого самосопряженного оператора B , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и не имеющего существенного спектра правее точки $\mu \in \mathbb{R}$, обозначим через $n(\mu, B)$ число его собственных значений, лежащих правее μ . Через $N(\mathbf{k}, z)$ обозначается число собственных значений оператора $H(\mathbf{k})$, лежащих левее точки $z \leq m(\mathbf{k})$, т.е. $N(\mathbf{k}, z) = n(-z, -H(\mathbf{k}))$. Число $N(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))$ фактически совпадает с числом собственных значений вне непрерывного спектра оператора $H(\mathbf{k})$. Для любого $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ и $z < m(\mathbf{k})$ мы определим интегральный оператор

$$G(\mathbf{k}, z) = V^{1/2} r_0(\mathbf{k}, z) V^{1/2},$$

где $r_0(\mathbf{k}, z)$ – резольвента невозмущенного оператора $H_0(\mathbf{k})$. При условии (2.2) оператор V положителен, через $V^{1/2}$ обозначается положительный квадратный корень из положительного оператора V . Из самосопряженности оператора $H(\mathbf{k})$ и положительности V вытекает, что

$$\sigma(H(\mathbf{k})) \cap (M(\mathbf{k}), \infty) = \emptyset,$$

отсюда имеем $\sigma_{\text{disc}}(H(\mathbf{k})) \subset (-\infty, m(\mathbf{k}))$. Поэтому мы ищем только собственные значения z , меньшие $m(\mathbf{k})$.

Решение f уравнения Шредингера $H(\mathbf{k})f = zf$ и неподвижные точки φ оператора $G(\mathbf{k}, z)$ связаны соотношениями

$$f = r_0(\mathbf{k}, z) V^{1/2} \varphi, \quad \varphi = V^{1/2} f.$$

Имеет место следующее утверждение (принцип Бирмана–Швингера) [13], [14].

ЛЕММА 3.1. Число собственных значений оператора $H(\mathbf{k})$, лежащих левее точки $z < m(\mathbf{k})$, совпадает с числом собственных значений оператора $G(\mathbf{k}, z)$, больших единицы, т. е. имеет место равенство $N(\mathbf{k}, z) = n(1, G(\mathbf{k}, z))$.

ЛЕММА 3.2. Если предельный оператор $\lim_{z \rightarrow m(\mathbf{k})-0} G(\mathbf{k}, z) = G(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))$ существует и компактен, то имеет место равенство

$$N(\mathbf{k}, m(\mathbf{k})) = n(1, G(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))). \quad (3.2)$$

Равенство (3.2) означает, что число собственных значений оператора $H(\mathbf{k})$, лежащих левее $m(\mathbf{k})$, совпадает с числом собственных значений оператора $G(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))$, больших единицы. Если потенциал $\hat{v}$ имеет вид (2.5) и $k_1 = k_2 = \pi$, то спектр оператора $H(\pi, \pi) = 4I - V$ состоит только из собственных значений $4, 4 - \bar{v}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и существенного спектра $\{4\}$. При этом $z_0(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(0)$ есть невырожденное собственное значение оператора $H(\pi, \pi)$ с соответствующей нормированной собственной функцией $\phi_0(\mathbf{p}) = 1/2\pi$. Число $z_1(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(1)$ является двукратным собственным значением с соответствующими нормированными собственными функциями

$$\phi_{(1,0)}^{++}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cos p_1, \quad \phi_{(0,1)}^{++}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cos p_2. \quad (3.3)$$

При каждом $n \geq 2$ число $z_n(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(n)$ является трехкратным собственным значением, ему соответствуют нормированные собственные функции

$$\begin{aligned} \phi_{(n,0)}^{++}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cos np_1, & \phi_{(n-1,1)}^{++}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\pi} \cos(n-1)p_1 \cos p_2, \\ \phi_{(n-1,1)}^{--}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\pi} \sin(n-1)p_1 \sin p_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Число $z_\infty(\pi, \pi) = 4$ является бесконечнократным собственным значением, ему соответствуют собственные функции

$$\phi_{(n,m)}^{++}(\mathbf{p}) = \cos np_1 \cos mp_2, \quad \phi_{(n,m)}^{--}(\mathbf{p}) = \sin np_1 \sin mp_2, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad |m| \geq 2.$$

4. ВОЗМУЩЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

Наша основная цель – изучить поведение невырожденного (простого) собственного значения $z_0(\pi, \pi)$ оператора $H(\pi, \pi)$. Приведем некоторые факты из теории возмущений, которые нам понадобятся в дальнейшем (см. монографию [6]). Справедлива следующая теорема (Като–Реллиха).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть z_0 – изолированное невырожденное собственное значение оператора A и B – ограниченный оператор. Тогда при малых $\beta \in \mathbb{R}$ оператор $T(\beta) = A - \beta B$ имеет единственное невырожденное собственное значение $z_0(\beta)$, лежащее в некоторой окрестности $U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0 , причем функция $z_0(\beta)$ аналитична по β в окрестности точки $\beta = 0$.

Кроме того, для $z_0(\beta)$ имеет место представление [6]

$$z_0(\beta) = z_0 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta^n} = z_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n. \quad (4.1)$$

Если A и B – самосопряженные операторы, то коэффициенты Рэля–Шредингера a_n и b_n определяются по формулам

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, [B(A-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz, \quad (4.2)$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} (\varphi_0, (A-zI)^{-1} [B(A-zI)^{-1}]^n \varphi_0) dz. \quad (4.3)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ выбирается так, что в круг $|z - z_0| < \varepsilon$ попадает ровно одно простое собственное значение оператора $T(\beta)$, а φ_0 – нормированная собственная функция оператора A , соответствующая собственному значению z_0 . Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n$ в соотношении (4.1) называется рядом Рэля–Шредингера для $z_0(\beta)$ и имеет ненулевой радиус сходимости.

Введя операторы

$$(W_1 f)(\mathbf{p}) = 2 \cos p_1 f(\mathbf{p}), \quad (W_2 f)(\mathbf{p}) = 2 \cos p_2 f(\mathbf{p}), \quad f \in L_2^s(\mathbb{T}^2), \quad (4.4)$$

и пользуясь равенством (2.3), запишем $H(k_1, k_2)$ в виде

$$H(k_1, k_2) = H(\pi, \pi) - \cos \frac{k_1}{2} W_1 - \cos \frac{k_2}{2} W_2.$$

В частности, пользуясь тождеством $\cos(\pi/2 - \beta) = \sin \beta$, получим

$$H(\pi, \pi - 2\beta) = H(\pi, \pi) - \sin \beta W_2. \quad (4.5)$$

Так как $z_0(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(0)$ является изолированным невырожденным собственным значением оператора $H(\pi, \pi)$, к оператору $H(\pi, \pi - 2\beta) = H(\pi, \pi) - \sin \beta W_2$ можно применить теорему 4.1.

Нашим первым результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. *Существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\beta \in (0, \delta)$ оператор $H(\pi, \pi - 2\beta)$ имеет единственное невырожденное собственное значение $z_0(\pi, \pi - 2\beta)$, лежащее в малой окрестности точки $z_0(\pi, \pi)$, причем справедлива асимптотическая формула*

$$z_0(\pi, \pi - 2\beta) = 4 - \bar{v}(0) - \frac{2}{\bar{v}(0) - \bar{v}(1)} \beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Для $\phi_0(\mathbf{p}) = 1/2\pi$ и $\phi_m(\mathbf{p}) = (1/\sqrt{2\pi}) \cos mp_2$, $m \in \mathbb{N}$, справедливы равенства*

$$(H(\pi, \pi) - zI)^{-1} \phi_m = \begin{cases} \frac{\phi_m}{4 - \bar{v}(m) - z}, & \text{если } m = 0, 1, \\ \frac{\phi_m}{4 - z}, & \text{если } m \geq 2, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$W_2 \phi_m = \begin{cases} \sqrt{2} \phi_1, & \text{если } m = 0, \\ \sqrt{2} \phi_0 + \phi_2, & \text{если } m = 1, \\ \phi_{m-1} + \phi_{m+1}, & \text{если } m \geq 2. \end{cases} \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$(H(\pi, \pi) - zI)\phi_m = \begin{cases} (4 - \bar{v}(m) - z)\phi_m, & \text{если } m = 0, 1, \\ (4 - z)\phi_m, & \text{если } m \geq 2, \end{cases}$$

мы получаем соотношение (4.6). Формула (4.7) непосредственно следует из определения оператора W_2 и равенства $2 \cos p_2 \cos mp_2 = \cos(m-1)p_2 + \cos(m+1)p_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Пользуясь теоремой 4.1 Като–Реллиха (в случае $A = H(\pi, \pi)$, $B = W_2$, $\varphi_0 = \phi_0$ с заменой β на $\sin \beta$) для $z_0(\pi, \pi - 2\beta)$ получаем представление

$$z_0(\pi, \pi - 2\beta) = z_0(\pi, \pi) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n.$$

Чтобы вычислить собственное значение $z_0(\pi, \pi - 2\beta)$ с точностью до β^2 , достаточно найти коэффициенты a_1 , a_2 и b_1 ряда Рэлея–Шредингера (4.1). Рассмотрим скалярное произведение $(\phi_0, [W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^n \phi_0)$, которое требуется для вычисления коэффициентов a_n и b_n . Пользуясь формулами (4.6) и (4.7), получим

$$[W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \phi_0 = d_1(z)\phi_1 + d_3(z)\phi_3 + \dots + d_{2n-1}(z)\phi_{2n-1},$$

где коэффициенты $d_1(z), d_3(z), \dots, d_{2n-1}(z)$ зависят только от z . Отсюда и из ортогональности системы $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{Z}_+}$ следует, что

$$(\phi_0, [W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \phi_0) = 0 \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Отсюда с учетом (4.2) мы получаем, что $a_{2n-1} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из соотношения

$$\begin{aligned} (\phi_0, (H(\pi, \pi) - zI)^{-1} [W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \phi_0) &= \\ &= ((H(\pi, \pi) - zI)^{-1})^* \phi_0, [W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \phi_0) = \\ &= \frac{1}{z_0(\pi, \pi) - z} (\phi_0, [W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^{2n-1} \phi_0) = 0 \end{aligned}$$

и выражения (4.3) вытекает, что $b_{2n-1} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $c_{2n-1} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Несложные вычисления показывают, что

$$[W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^2 \phi_0 = \frac{2\phi_0 + \sqrt{2}\phi_2}{(4 - \bar{v}(0) - z)(4 - \bar{v}(1) - z)}.$$

Отсюда имеем

$$(\phi_0, [W_2(H(\pi, \pi) - zI)^{-1}]^2 \phi_0) = \frac{2}{(z_0(\pi, \pi) - z)(z_1(\pi, \pi) - z)}.$$

Умножая это равенство на $(-2\pi i)^{-1}$ и интегрируя по окружности $|z - z_0(\pi, \pi)| = \varepsilon$, получим

$$a_2 = \frac{2}{z_1(\pi, \pi) - z_0(\pi, \pi)} = \frac{2}{\bar{v}(0) - \bar{v}(1)}.$$

Так как $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2 - a_1 b_1$, заключаем, что $c_1 = 0$, $c_2 = a_2$. Учитывая, что $\sin \beta \sim \beta$ при $\beta \rightarrow 0$, мы получаем утверждение теоремы.

5. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА $H(k_1, k_2)$

Для вырожденных собственных значений $z_n(\pi, \pi)$, $n \geq 1$, оператора $H(\pi, \pi)$ теорема Като–Реллиха неприменима. В этом случае наш метод состоит в следующем. Разложим пространство $L_2^e(\mathbb{T}^2)$ на счетное число подпространств $\mathfrak{R}_n^-$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{R}_n^+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, инвариантных относительно оператора $H(\pi, k_2)$. При этом двукратное собственное значение $z_1(\pi, \pi)$ является невырожденным собственным значением сужений $H^+(\pi, \pi)|_0$ и $H^+(\pi, \pi)|_1$ оператора $H(\pi, \pi)$ на инвариантные подпространства $\mathfrak{R}_0^+$ и $\mathfrak{R}_1^+$, а трехкратное собственное значение $z_n(\pi, \pi)$ при $n \geq 2$ есть невырожденное собственное значение сужений $H^+(\pi, \pi)|_{n-1}$, $H^-(\pi, \pi)|_{n-1}$ и $H^+(\pi, \pi)|_n$ оператора $H(\pi, \pi)$ на инвариантные подпространства $\mathfrak{R}_{n-1}^+$, $\mathfrak{R}_{n-1}^-$ и $\mathfrak{R}_n^+$.

Известно, что $L_2^e(\mathbb{T}^2) = L_2^{++}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{-}(\mathbb{T}^2)$, где

$$L_2^{++}(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2^e(\mathbb{T}^2) : f(p_1, p_2) = f(-p_1, p_2) = f(-p_1, -p_2)\},$$

$$L_2^{-}(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2^e(\mathbb{T}^2) : f(p_1, p_2) = -f(-p_1, p_2) = f(-p_1, -p_2)\}$$

суть соответственно подпространства функций, четных и нечетных по каждому аргументу.

ЛЕММА 5.1. Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (2.5). Подпространства $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{-}(\mathbb{T}^2)$ являются инвариантными относительно оператора $H(\mathbf{k})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем инвариантность этих подпространств относительно оператора $H_0(\mathbf{k})$, потом относительно V . Из представления (2.4) следует, что функция $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ принадлежит подпространству $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$, поэтому из включения $f \in L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ следует, что $\varepsilon_{\mathbf{k}}f \in L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$. Это показывает инвариантность подпространства $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ относительно оператора $H_0(\mathbf{k})$.

Несложные вычисления показывают, что функция (см. формулу (2.6), а также работу [15])

$$(Vf)(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} v(p_1 - s_1, p_2 - s_2) f(s_1, s_2) ds_1 ds_2$$

принадлежит подпространству $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ при $f \in L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$. Тем самым доказана инвариантность подпространства $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ относительно оператора V и, следовательно, инвариантность $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ относительно оператора $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$.

Так как $H(\mathbf{k})$ – самосопряженный оператор в $L_2^e(\mathbb{T}^2)$, ортогональное дополнение $L_2^{-}(\mathbb{T}^2) = (L_2^{++}(\mathbb{T}^2))^{\perp}$ также является инвариантным подпространством оператора $H(\mathbf{k})$. Лемма доказана.

Обозначим через $H^+(\mathbf{k})$ и $H^-(\mathbf{k})$ сужения оператора $H(\mathbf{k})$ соответственно на подпространства $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{-}(\mathbb{T}^2)$. Действие оператора $H_0(\mathbf{k})$ остается неизменным, поэтому мы приведем формулы для операторов $V^+ = V|_{L_2^{++}(\mathbb{T}^2)}$ и $V^- = V|_{L_2^{-}(\mathbb{T}^2)}$:

$$(V^+f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \left[\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1) \cos p_2 \cos q_2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n) \cos np_1 \cos nq_1 + \right. \\ \left. + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+1) \cos np_1 \cos nq_1 \cos p_2 \cos q_2 \right] f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad f \in L_2^{++}(\mathbb{T}^2),$$

$$(V^-f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+1) \sin np_1 \sin nq_1 \sin p_2 \sin q_2 f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad f \in L_2^{-}(\mathbb{T}^2).$$

Можно показать, что верны равенства

$$L_2^{++}(\mathbb{T}^2) = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}), \quad L_2^{--}(\mathbb{T}^2) = L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}),$$

где

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = f(q)\}, \quad L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = -f(q)\}$$

суть соответственно подпространства функций, четных и нечетных на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Разложение пространства $L_2^{--}(\mathbb{T}^2)$. Система функций $\varphi_n(q) = (1/\sqrt{\pi}) \sin nq$, $n \in \mathbb{N}$, образует ортонормированный базис в $L_2^-(\mathbb{T})$. Обозначим через $L^-(n)$ одномерное подпространство, натянутое на вектор φ_n , $n \in \mathbb{N}$. При этом пространство $L_2^-(\mathbb{T})$ разлагается в прямую сумму:

$$L_2^-(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^-(n). \quad (5.1)$$

Это разложение порождает разложение

$$L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \{L^-(n) \otimes L_2^-(\mathbb{T})\} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n^-,$$

где $\mathfrak{R}_n^- := L^-(n) \otimes L_2^-(\mathbb{T})$.

ЛЕММА 5.2. Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (2.5). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ подпространство $\mathfrak{R}_n^-$ является инвариантным относительно оператора $H(\pi, k_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$(\varphi_n f)(p_1, p_2) := \varphi_n(p_1) f(p_2), \quad \varphi_n \in L^-(n),$$

где $f \in L_2^-(\mathbb{T})$ – произвольный элемент из $\mathfrak{R}_n^-$. Рассмотрим действие оператора $H(\pi, k_2) = H_0(\pi, k_2) - V^-$ на $\varphi_n f$:

$$(H_0(\pi, k_2) \varphi_n f)(p_1, p_2) = \varphi_n(p_1) \left(4 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos p_2 \right) f(p_2), \quad (5.2)$$

$$(V^- \varphi_n f)(p_1, p_2) = \varphi_n(p_1) \frac{\bar{v}(n+1)}{\pi} \sin p_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin q_2 f(q_2) dq_2. \quad (5.3)$$

При получении последней формулы использована ортогональность системы функций $\varphi_n(p_1) = (1/\sqrt{\pi}) \sin np_1$, $n \in \mathbb{N}$, в $L_2^-(\mathbb{T})$. Из соотношений (5.2) и (5.3) вытекает равенство

$$\begin{aligned} H(\pi, k_2) \varphi_n f(p_1, p_2) &= (H_0(\pi, k_2) \varphi_n f)(p_1, p_2) - (V^- \varphi_n f)(p_1, p_2) = \\ &= \varphi_n(p_1) \left[\left(4 - 2 \cos \frac{k_2}{2} \cos p_2 \right) f(p_2) - \frac{\bar{v}(n+1)}{\pi} \sin p_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin q_2 f(q_2) dq_2 \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

которое и завершает доказательство леммы.

Формула (5.4) показывает, что сужение $H^-(\pi, k_2)|_n$ оператора $H(\pi, k_2)$ на подпространство $\mathfrak{R}_n^- = L^-(n) \otimes L_2^-(\mathbb{T})$ имеет вид

$$H^-(\pi, k_2)|_n = I \otimes [2I + H_0(k_2) - V_n^-], \quad (5.5)$$

где I – единичный оператор в $L^-(n)$, а $H^{-n}(k_2) := 2I + H_0(k_2) - V_n^-$ есть одномерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^-(\mathbb{T})$ по формуле

$$(H^{-n}(k_2)f)(p) = (2 + \varepsilon_{k_2}(p))f(p) - \frac{\bar{v}(n+1)}{\pi} \sin p \int_{-\pi}^{\pi} \sin s f(s) ds, \quad f \in L_2^-(\mathbb{T}),$$

где $\varepsilon_{k_2}(p) = 2 - 2 \cos(k_2/2) \cos p$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор V_n^- является одномерным и пропорциональным оператору V_1 ,

$$V_n^- = \frac{\bar{v}(n+1)}{\bar{v}(2)} V_1^-.$$

Поэтому достаточно проанализировать собственные значения оператора $H^-(\pi, k_2)|_1$.

Разложение пространства $L_2^{++}(\mathbb{T}^2)$. Система функций

$$\psi_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nq, \quad n \in \mathbb{N},$$

образует ортонормированный базис в пространстве $L_2^+(\mathbb{T})$. Обозначим через $L^+(n)$ одномерное подпространство, натянутое на вектор ψ_n , $n \in \mathbb{Z}_+$. При этом пространство $L_2^+(\mathbb{T})$ разлагается в прямую сумму

$$L_2^+(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^+(n). \quad (5.6)$$

Это разложение порождает разложение

$$L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \{L^+(n) \otimes L_2^+(\mathbb{T})\} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{R}_n^+,$$

где $\mathfrak{R}_n^+ := L^+(n) \otimes L_2^+(\mathbb{T})$.

ЛЕММА 5.3. Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (2.5). Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ подпространство $\mathfrak{R}_n^+$ является инвариантным относительно оператора $H(\pi, k_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 5.2. Рассмотрим сужение $H^+(\pi, k_2)|_n$ оператора $H(\pi, k_2)$ на подпространство $\mathfrak{R}_n^+ = L^+(n) \otimes L_2^+(\mathbb{T})$:

$$H^+(\pi, k_2)|_n = I \otimes [2I + H_0(k_2) - V_n^+], \quad (5.7)$$

где I – единичный оператор в $L^+(n)$, а $H^{+n}(k_2) := 2I + H_0(k_2) - V_n^+$ есть одномерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^+(\mathbb{T})$ по формуле

$$(H^{+n}(k_2)f)(p) = (2 + \varepsilon_{k_2}(p))f(p) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1) \cos p \cos s] f(s) ds. \quad (5.8)$$

Заметим, что действие оператора $V_n^+ := V|_{\mathfrak{R}_n^+}$ на элемент $f \in L_2^+(\mathbb{T})$ имеет вид

$$(V_n^+ f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1) \cos p \cos s] f(s) ds,$$

поэтому операторы V_n^+ , $n \in \mathbb{Z}_+$, двумерны.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Утверждения лемм 5.1–5.3 остаются в силе, если потенциал $\hat{v}$ является четным по каждому аргументу и $\hat{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Если $k_1 \neq \pi$, то подпространства $\mathfrak{R}_n^-$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{R}_n^+$, $n \in \mathbb{Z}_+$, не являются инвариантными относительно оператора $H(k_1, k_2)$.

Исследование собственных значений операторов $H^+(\pi, k_2)|_n$ и $H^-(\pi, k_2)|_n$ в силу представлений (5.7) и (5.5) сводится к изучению собственных значений операторов $H^{+n}(k_2)$ и $H^{-n}(k_2)$, т. е. двумерная задача сводится к одномерной. Заметим, что собственная функция $\phi_0(\mathbf{p}) = 1/2\pi$, отвечающая невырожденному собственному значению $z_0(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(0)$ оператора $H(\pi, \pi)$, принадлежит подпространству $\mathfrak{R}_0^+$, а для собственных функций $\phi_{(1,0)}^{++}$ и $\phi_{(0,1)}^{++}$ (см. формулу (3.3)), отвечающих двукратному собственному значению $z_1(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(1)$ оператора $H(\pi, \pi)$, имеют место включения $\phi_{(0,1)}^{++} \in \mathfrak{R}_0^+$ и $\phi_{(1,0)}^{++} \in \mathfrak{R}_1^+$. Для собственных функций $\phi_{(n,0)}^{++}$, $\phi_{(n-1,1)}^{++}$ и $\phi_{(n-1,1)}^{--}$ при $n \geq 2$ (см. формулу (3.4)), отвечающих трехкратному собственному значению $z_n(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(n)$ оператора $H(\pi, \pi)$, имеют место включения $\phi_{(n,0)}^{++} \in \mathfrak{R}_n^+$, $\phi_{(n-1,1)}^{++} \in \mathfrak{R}_{n-1}^+$ и $\phi_{(n-1,1)}^{--} \in \mathfrak{R}_{n-1}^-$. Отсюда вытекает, что для $n \geq 2$ число $z_n(\pi, \pi)$ является невырожденным собственным значением операторов $H^+(\pi, \pi)|_n$, $H^+(\pi, \pi)|_{n-1}$ и $H^-(\pi, \pi)|_{n-1}$.

6. ВОЗМУЩЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Собственные функции оператора $H(\mathbf{k})$ интерпретируются как связанные состояния гамильтониана H , а собственные значения – как энергии связанных состояний. Поэтому мы ищем собственные функции оператора $H(\mathbf{k})$, а исследование собственных функций оператора $H(k_1, k_2)$ сводим к изучению собственных значений оператора $H(k_1, k_2)$. Исследование собственных значений оператора $H(\pi, k_2)$ мы проведем путем анализа собственных значений (относительно простых) операторов $H^-(\pi, k_2)|_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $H^+(\pi, k_2)|_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. В силу представлений (5.5) и (5.7) достаточно рассмотреть собственные значения одномерных операторов Шредингера $H^{-n}(k_2)$, $n \in \mathbb{N}$, и $H^{+n}(k_2)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Мы начнем с изучения собственных значений оператора $H^{+n}(\pi - 2\beta)$ при малых β . Из выражения (5.8) вытекает, что при фиксированном $n \in \mathbb{Z}_+$ оператор $H^{+n}(\pi)$ имеет два простых собственных значения

$$z_n^1(0) = 4 - \bar{v}(n) = z_n(\pi, \pi), \quad z_n^2(0) = 4 - \bar{v}(n+1) = z_{n+1}(\pi, \pi).$$

ТЕОРЕМА 6.1. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует $\delta_n > 0$ такое, что для каждого $\beta \in (0, \delta_n)$ оператор $H^{+n}(\pi - 2\beta)$ имеет два различных невырожденных собственных значения $z_n^1(\beta)$ и $z_n^2(\beta)$ со следующими асимптотиками при $\beta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} z_n^1(\beta) &= z_n(\pi, \pi) - \frac{2}{\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1)} \beta^2 + O(\beta^4), \\ z_n^2(\beta) &= z_{n+1}(\pi, \pi) - \frac{\bar{v}(n) - 3\bar{v}(n+1)}{\bar{v}(n+1)(\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1))} \beta^2 + O(\beta^4). \end{aligned} \tag{6.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение $H^{+n}(\pi - 2\beta)f = zf$ для собственных значений. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$(4 - 2 \sin \beta \cos p - z)f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\bar{v}(n) + 2\bar{v}(n+1) \cos p \cos s] f(s) ds.$$

Введя обозначения

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds, \quad c_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos s f(s) ds, \quad (6.2)$$

получим следующее выражение для собственной функции $f(p)$:

$$f(p) = \frac{\bar{v}(n)}{4 - 2 \sin \beta \cos p - z} c_1 + \frac{\bar{v}(n+1) \cos p}{4 - 2 \sin \beta \cos p - z} c_2. \quad (6.3)$$

Подставляя его в (6.2), получим однородную систему уравнений относительно коэффициентов c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1 \frac{\bar{v}(n)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{4 - 2 \sin \beta \cos p - z} + c_2 \frac{2\bar{v}(n+1)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos p dp}{4 - 2 \sin \beta \cos p - z}, \\ c_2 &= c_1 \frac{\bar{v}(n)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos p dp}{4 - 2 \sin \beta \cos p - z} + c_2 \frac{2\bar{v}(n+1)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 p dp}{4 - 2 \sin \beta \cos p - z}. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{aligned} \Delta(\beta, z) &= \begin{vmatrix} 1 - \bar{v}(n)\Delta_{11}(\beta, z) & -2\bar{v}(n+1)\Delta_{12}(\beta, z) \\ -\bar{v}(n)\Delta_{12}(\beta, z) & 1 - 2\bar{v}(n+1)\Delta_{22}(\beta, z) \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \bar{v}(n)\Delta_{11}(\beta, z))(1 - 2\bar{v}(n+1)\Delta_{22}(\beta, z)) - 2\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)\Delta_{12}^2(\beta, z) \end{aligned} \quad (6.4)$$

равен нулю. Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{11}(\beta, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{4 - z - 2 \sin \beta \cos p}, \\ \Delta_{12}(\beta, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos p dp}{4 - z - 2 \sin \beta \cos p}, \\ \Delta_{22}(\beta, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 p dp}{4 - z - 2 \sin \beta \cos p}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

При малых β функцию $1/(4 - z - 2 \sin \beta \cos p)$ можно разложить в ряд:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(4 - z)(1 - 2 \sin \beta \cos p/(4 - z))} = \\ &= \frac{1}{4 - z} \left(1 + \frac{2 \sin \beta \cos p}{4 - z} + \frac{4 \sin^2 \beta \cos^2 p}{(4 - z)^2} + \dots + \frac{(2 \sin \beta \cos p)^n}{(4 - z)^n} + \dots \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Подставляя в формулы (6.5) вместо функции $1/(4 - z - 2 \sin \beta \cos p)$ выражение из правой части (6.6) и пользуясь тем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n-1} p dp = 0,$$

получим, что $\Delta_{11}(\beta, z)$ и $\Delta_{22}(\beta, z)$ – четные функции, а $\Delta_{12}(\beta, z)$ – нечетная функция от β . Следовательно, $\Delta(\beta, z)$ есть четная функция от β (см. формулу (6.4)), поэтому решение $z = z(\beta)$ уравнения $\Delta(\beta, z) = 0$ является четной функцией от β .

Теперь найдем нули функции $\Delta(\beta, z)$ с точностью до β^2 . Из формул (6.5) вытекает, что

$$\Delta_{11}(0, z) = \frac{1}{4 - z}, \quad \Delta_{12}(0, z) = 0, \quad \Delta_{22}(0, z) = \frac{1}{2(4 - z)}.$$

Подставляя эти равенства в (6.4), получим

$$\Delta(0, z) = \left(1 - \frac{\bar{v}(n)}{4 - z}\right) \left(1 - \frac{\bar{v}(n+1)}{4 - z}\right).$$

Отсюда видно, что уравнение $\Delta(0, z) = 0$ имеет два простых нуля $z_n^1(0) = 4 - \bar{v}(n)$ и $z_n^2(0) = 4 - \bar{v}(n+1)$. Пользуясь представлением (6.6), найдем функции Δ_{11} , Δ_{12} и Δ_{22} с точностью до величин порядка β^2 и после этого получим

$$\begin{aligned} \Delta(\beta, z) = & 1 - \frac{\bar{v}(n) + \bar{v}(n+1)}{4 - z} + \frac{\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)}{(4 - z)^2} + \frac{2\bar{v}(n) + 3\bar{v}(n+1)}{(4 - z)^3} \sin^2 \beta + \\ & + \frac{3\bar{v}(n)\bar{v}(n+1)}{(4 - z)^4} \sin^2 \beta + O(\beta^4). \end{aligned}$$

Несложные вычисления показывают, что нули функции $\Delta(\beta, z)$ с точностью до β^2 имеют вид

$$\begin{aligned} z_n^1(\beta) &= 4 - \bar{v}(n) - \frac{2}{\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1)} \sin^2 \beta, \\ z_n^2(\beta) &= 4 - \bar{v}(n+1) - \frac{\bar{v}(n) - 3\bar{v}(n+1)}{\bar{v}(n+1)(\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1))} \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\sin \beta \sim \beta$ при $\beta \rightarrow 0$, получим искомое утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из доказательства теоремы следует что собственным значениям $z_n^1(\beta)$ и $z_n^2(\beta)$ отвечают собственные функции (см. формулу (6.3))

$$\begin{aligned} f_n^1(p_1, p_2) &= \frac{c_n^1(1 + \alpha_n^1 \cos p_2)}{4 - 2 \sin \beta \cos p_2 - z_n^1(\beta)}, \\ f_n^2(p_1, p_2) &= \frac{c_n^2(1 + \alpha_n^2 \cos p_2)}{4 - 2 \sin \beta \cos p_2 - z_n^2(\beta)}, \end{aligned}$$

где α_n^1 и α_n^2 зависят только от β , а c_n^1 и c_n^2 – произвольные постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Если в (6.1) $n = 0$, то мы имеем асимптотическую формулу

$$z_0^1(\beta) = 4 - \bar{v}(0) - \frac{2}{\bar{v}(0) - \bar{v}(1)} \beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0,$$

которая совпадает с асимптотической формулой для невырожденного собственного значения $z_0(\pi, \pi - 2\beta)$ в теореме 4.1.

ТЕОРЕМА 6.2. Для любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $k_2 \in \mathbb{T}$ оператор $H^{+n}(k_2)$ имеет хотя бы одно собственное значение ниже непрерывного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если мы покажем, что оператор $G_n^+(k_2, z)$ Бирмана–Швингера при некотором $z < m(\pi, k_2)$ (отвечающий оператору Шредингера $H^{+n}(k_2)$) имеет собственное значение больше единицы, тогда в силу леммы 3.1 оператор $H^{+n}(k_2)$ будет иметь собственное значение, лежащее ниже z .

Из положительности и компактности оператора $G_n^+(k_2, z)$ следует, что число

$$\lambda^+(k_2, z) = \sup_{\|\psi\|=1} (G_n^+(k_2, z)\psi, \psi) = \|G_n^+(k_2, z)\|$$

является наибольшим собственным значением оператора $G_n^+(k_2, z)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(G_n^+(k_2, z)\psi, \psi) = (r_0(k_2, z)(V_n^+)^{1/2}\psi, (V_n^+)^{1/2}\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|(V_n^+)^{1/2}\psi(p)|^2}{4 - 2\cos(k_2/2)\cos p - z} dp.$$

Если в качестве $\psi(p)$ взять собственную функцию $\psi_0(p) = 1/\sqrt{2\pi}$ оператора $(V_n^+)^{1/2}$, отвечающую собственному значению $\sqrt{\bar{v}(n)}$, то получим

$$(G_n^+(k_2, z)\psi_0, \psi_0) = \frac{\bar{v}(n)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{4 - 2\cos(k_2/2)\cos p - z}. \quad (6.7)$$

Можно показать, что

$$\lim_{z \rightarrow m(k_2) - 0} (G_n^+(k_2, z)\psi_0, \psi_0) = +\infty.$$

Отсюда следует существование числа $z_n \in (m(k_2) - \delta, m(k_2))$ такого, что

$$(G_n^+(k_2, z_n)\psi_0, \psi_0) > 1.$$

Это означает, что оператор $G_n^+(k_2, z_n)$ Бирмана–Швингера имеет собственное значение, большее единицы.

ТЕОРЕМА 6.3. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и любого $\beta \in (0, \beta_{n+1})$, где $\beta_{n+1} = \arcsin \bar{v}(n+1)$, оператор $H^{-n}(\pi - 2\beta)$ имеет единственное невырожденное собственное значение

$$z_n^-(\beta) = z_{n+1}(\pi, \pi) - \frac{1}{\bar{v}(n+1)} \sin^2 \beta. \quad (6.8)$$

Для $\beta \in [\beta_{n+1}, \pi/2]$ оператор $H^{-n}(\pi - 2\beta)$ не имеет собственных значений, лежащих ниже непрерывного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение $H^{-n}(\pi - 2\beta)f(q) = zf(q)$ для собственных значений равносильно уравнению

$$(4 - 2\sin \beta \cos q)f(q) - \frac{\bar{v}(n+1)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin q \sin s f(s) ds = zf(q), \quad (6.9)$$

которое имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда число $z < 4 - 2\sin \beta$ является решением уравнения

$$1 - \frac{\bar{v}(n+1)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 s ds}{4 - 2\sin \beta \cos s - z} = 0. \quad (6.10)$$

Пользуясь тождеством $\sin^2 s = -(\cos^2 s - 1)$ и формулой деления с остатком

$$\frac{\cos^2 s - 1}{4 - 2\sin \beta \cos s - z} = -\frac{\cos s}{2\sin \beta} - \frac{4 - z}{4\sin^2 \beta} + \left[\frac{(4 - z)^2}{4\sin^2 \beta} - 1 \right] \frac{1}{4 - 2\sin \beta \cos s - z},$$

запишем уравнение (6.10) в виде

$$1 + \frac{\bar{v}(n+1)(4-z)}{2\sin^2\beta} - \left[\frac{(4-z)^2}{4\sin^2\beta} - 1 \right] \frac{\bar{v}(n+1)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{4 - 2\sin\beta \cos s - z} = 0. \quad (6.11)$$

Интеграл в этом уравнении с помощью замены переменной $\xi = e^{iq}$ представим как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{4 - 2\sin\beta \cos s - z} &= -\frac{1}{\sin\beta} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi^2 - \xi(4-z)/\sin\beta + 1} = \\ &= -\frac{1}{\sin\beta} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}, \end{aligned}$$

где

$$\xi_1 = \frac{4-z - \sqrt{(4-z)^2 - 4\sin^2\beta}}{2\sin\beta}, \quad \xi_2 = \frac{4-z + \sqrt{(4-z)^2 - 4\sin^2\beta}}{2\sin\beta}$$

суть нули квадратного трехчлена $\xi^2 - \xi(4-z)/\sin\beta + 1$. Из равенства $\xi_1\xi_2 = 1$ следует, что если один из корней ξ_1, ξ_2 лежит внутри круга с центром в начале координат, то другой лежит вне круга. Если $z < 4 - 2\sin\beta$, то выполняется неравенство $|\xi_1| < 1$. Поэтому по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)} = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} = -\frac{\sin\beta}{\sqrt{(4-z)^2 - 4\sin^2\beta}}.$$

Отсюда и из (6.11) получаем

$$z = 4 - \bar{v}(n+1) - \frac{1}{\bar{v}(n+1)} \sin^2\beta,$$

что доказывает формулу (6.8).

Покажем, что данное собственное значение существует только при $\beta \in (0, \beta_{n+1})$. Оператор Бирмана–Швингера $G_n^-(k_2, m(k_2)) = (V_n^-)^{1/2} r_0(k_2, m(k_2)) (V_n^-)^{1/2}$, отвечающий оператору Шредингера $H^{-n}(k_2)$, имеет вид

$$G_n^-(k_2, m(k_2)) = \frac{1}{\cos(k_2/2)} V_n^-.$$

Отсюда вытекает, что $G_n^-(k_2, m(k_2))$ и V_n^- имеют одинаковые собственные функции. Оператор V_n^- имеет единственное ненулевое собственное значение $\bar{v}(n+1)$, которому соответствует нормированная собственная функция $\varphi_1(p) = (1/\sqrt{\pi}) \sin p$. Поэтому оператор $G_n^-(\pi - 2\beta, m(\pi - 2\beta))$ при любом $\beta \in (0, \pi/2]$ имеет единственное ненулевое простое собственное значение

$$\lambda_n^-(\beta) = \frac{\bar{v}(n+1)}{\sin\beta}, \quad (6.12)$$

соответствующее нормированной собственной функции $\varphi_1(p)$. Это собственное значение больше единицы при всех $\beta \in (0, \beta_{n+1})$, поэтому в силу леммы 3.2 оператор $H^{-n}(\pi - 2\beta)$ имеет единственное собственное значение $z_n^-(\beta)$ вида (6.8). Если $\beta \in (\beta_{n+1}, \pi/2]$, то оператор $G_n^-(\pi - 2\beta, m(\pi - 2\beta))$ не имеет собственных значений, больших единицы (см. равенство (6.12)), и в силу леммы 3.2 оператор $H^{-n}(\pi - 2\beta)$ не имеет собственных значений, лежащих ниже $m(\pi - 2\beta) = 4 - 2\sin\beta$. В случае $\beta = \beta_{n+1} = \arcsin \bar{v}(n+1)$ уравнение Шредингера

$$H^{-n}(\pi - 2\beta_{n+1})f = m(\pi - 2\beta_{n+1})f$$

имеет нетривиальное решение $f(p) = \sin p(1 - \cos p)^{-1}$, которое не принадлежит пространству $L_2^-(\mathbb{T})$. Это означает, что край $m(\pi - 2\beta_{n+1}) = 4 - 2\sin \beta_{n+1}$ непрерывного спектра оператора $H^{-n}(\pi - 2\beta_{n+1})$ является виртуальным уровнем.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заметим, что существенные спектры операторов $H^+(\pi, k_2)|_n$ и $H^-(\pi, k_2)|_n$ не зависят от n и совпадают со спектром невозмущенного оператора $H_0(\pi, k_2)$,

$$\sigma_{\text{ess}}(H^+(\pi, k_2)|_n) = \sigma_{\text{ess}}(H^-(\pi, k_2)|_n) = \sigma(H_0(\pi, k_2)) = \left[4 - 2\cos \frac{k_2}{2}, 4 + 2\cos \frac{k_2}{2}\right].$$

Бесконечнократное собственное значение $z_\infty(\pi, \pi) = 4$ при любом возмущении $\beta > 0$ распадается, и вокруг него возникают точки существенного спектра, заполняющие отрезок $[4 - 2\sin \beta, 4 + 2\sin \beta]$. В разделах 4–6 мы изучили собственные значения оператора $H(\pi, \pi - 2\beta)$ с потенциалом $\hat{v}$ вида (2.5) при малых значениях параметра β . Мы вычислили первый и второй коэффициенты асимптотического разложения невырожденного собственного значения $z_0(\pi, \pi)$, двукратного собственного значения $z_1(\pi, \pi)$ и трехкратных собственных значений $z_n(\pi, \pi)$, $n \geq 2$, при малых $\beta > 0$. Все собственные значения являются четными функциями от β , поэтому можно считать, что $\beta \geq 0$. Из теорем 4.2, 6.1–6.3 мы получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 7.1. *Существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\beta \in (0, \delta)$ оператор $H(\pi, \pi - 2\beta)$ имеет единственное невырожденное собственное значение*

$$z_{0(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta) = z_0(\pi, \pi) - \frac{2}{\bar{v}(0) - \bar{v}(1)}\beta^2 + O(\beta^4), \quad \beta \rightarrow 0, \quad (7.1)$$

лежащее в малой окрестности значения $z_0(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(0)$; собственное значение (7.1) отвечает собственной функции

$$f_{0(0)}^+(p_1, p_2) = \frac{c_{0(0)}^+(1 + \alpha_{0(0)}^+ \cos p_2)}{4 - 2\sin \beta \cos p_2 - z_{0(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta)} \in \mathfrak{R}_0^+,$$

где $\alpha_{0(0)}^+$ зависит только от β , а $c_{0(0)}^+$ – произвольная постоянная.

ТЕОРЕМА 7.2. *Существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\beta \in (0, \delta)$ оператор $H(\pi, \pi - 2\beta)$ имеет два различных невырожденных собственных значения*

$$\begin{aligned} z_{1(1)}^+(\pi, \pi - 2\beta) &= z_1(\pi, \pi) - \frac{2}{\bar{v}(1) - \bar{v}(2)}\beta^2 + O(\beta^4), \\ z_{1(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta) &= z_1(\pi, \pi) - \frac{\bar{v}(0) - 3\bar{v}(1)}{\bar{v}(1)(\bar{v}(0) - \bar{v}(1))}\beta^2 + O(\beta^4), \end{aligned} \quad \beta \rightarrow 0, \quad (7.2)$$

лежащих в малой окрестности значения $z_1(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(1)$; собственным значениям (7.2) отвечают собственные функции

$$\begin{aligned} f_{1(1)}^+(p_1, p_2) &= \frac{\cos p_1}{\sqrt{\pi}} \frac{c_{1(1)}^+(1 + \alpha_{1(1)}^+ \cos p_2)}{4 - 2\sin \beta \cos p_2 - z_{1(1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)} \in \mathfrak{R}_1^+, \\ f_{1(0)}^+(p_1, p_2) &= \frac{c_{1(0)}^+(1 + \alpha_{1(0)}^+ \cos p_2)}{4 - 2\sin \beta \cos p_2 - z_{1(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta)} \in \mathfrak{R}_0^+, \end{aligned}$$

где $\alpha_{1(1)}^+$ и $\alpha_{1(0)}^+$ зависят только от β , а $c_{1(1)}^+$ и $c_{1(0)}^+$ – произвольные постоянные.

ТЕОРЕМА 7.3. Для каждого натурального $n \geq 2$ существует $\delta_n > 0$ такое, что для любого $\beta \in (0, \delta_n)$ оператор $H(\pi, \pi - 2\beta)$ имеет три различных невырожденных собственных значения

$$\begin{aligned} z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta) &= z_n(\pi, \pi) - \frac{2}{\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1)} \beta^2 + O(\beta^4), & \beta \rightarrow 0, \\ z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta) &= z_n(\pi, \pi) - \frac{1}{\bar{v}(n)} \sin^2 \beta, & \beta \in [0, \beta_n), \\ z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta) &= z_n(\pi, \pi) - \frac{\bar{v}(n-1) - 3\bar{v}(n)}{\bar{v}(n)(\bar{v}(n-1) - \bar{v}(n))} \beta^2 + O(\beta^4), & \beta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $\beta_n = \arcsin \bar{v}(n)$, лежащих в малой окрестности значения $z_n(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(n)$; собственным значениям (7.3) отвечают собственные функции

$$\begin{aligned} f_{n(n)}^+(p_1, p_2) &= \frac{\cos np_1}{\sqrt{\pi}} \frac{c_{n(n)}^+(1 + \alpha_{n(n)}^+ \cos p_2)}{4 - 2 \sin \beta \cos p_2 - z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta)} \in \mathfrak{R}_n^+, \\ f_{n(n-1)}^-(p_1, p_2) &= \frac{\sin(n-1)p_1}{\sqrt{\pi}} \frac{c_{n(n-1)}^- \sin p_2}{4 - 2 \sin \beta \cos p_2 - z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta)} \in \mathfrak{R}_{n-1}^-, \\ f_{n(n-1)}^+(p_1, p_2) &= \frac{\cos(n-1)p_1}{\sqrt{\pi}} \frac{c_{n(n-1)}^+(1 + \alpha_{n(n-1)}^+ \cos p_2)}{4 - 2 \sin \beta \cos p_2 - z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)} \in \mathfrak{R}_{n-1}^+, \end{aligned}$$

где $\alpha_{n(n)}^+$ и $\alpha_{n(n-1)}^+$ зависят только от β , а $c_{n(n)}^+$, $c_{n(n-1)}^-$ и $c_{n(n-1)}^+$ — произвольные постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. При обозначении собственных значений оператора $H(\pi, \pi - 2\beta)$ мы добавили в индексы (n) , это означает, что соответствующая собственная функция принадлежит подпространству $\mathfrak{R}_n^+$. Если мы предположим, что собственные функции нормированы, то коэффициенты $c_{n(n)}^+$, $c_{n(n-1)}^-$ и $c_{n(n-1)}^+$ определяются однозначно.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Связь с собственными значениями из раздела 6 дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} z_n^1(\beta) &= z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta), & n \in \mathbb{Z}_+, \\ z_{n-1}^2(\beta) &= z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta), & n \in \mathbb{N}, \\ z_{n-1}^-(\beta) &= z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta), & n \geq 2. \end{aligned}$$

Расположение собственных значений. Ниже мы будем предполагать, что $\bar{v}(2) \leq 1$. Если $\bar{v}(2) > 1$, то из $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{v}(n) = 0$ следует, что существует $n_0 > 2$ такое, что $\bar{v}(n_0) \leq 1$ и для всех $n = 2, \dots, n_0 - 1$ выполняется неравенство $\bar{v}(n) > 1$. В этом случае собственные значения $z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta)$, $n = 2, \dots, n_0 - 1$, оператора $H(\pi, \pi - 2\beta)$ существуют при всех $\beta \in [0, \pi/2]$.

Невырожденное собственное значение. Так как $\bar{v}(0) > \bar{v}(1)$, при всех $\beta \in (0, \delta)$ выполняется неравенство (см. выражение (7.1))

$$z_{0(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta) < z_0(\pi, \pi).$$

Двукратное собственное значение. Собственное значение $z_{1(1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ при всех малых β лежит левее $z_1(\pi, \pi)$. Если $3\bar{v}(1) < \bar{v}(0)$, собственное значение $z_{1(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ лежит левее $z_1(\pi, \pi)$, а если $\bar{v}(1) \in (\bar{v}(0)/3, 1)$, то оно лежит правее $z_1(\pi, \pi)$. Для собственных значений $z_{1(1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ и $z_{1(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ выполняется неравенство (при достаточно малых β)

$$z_{1(1)}^+(\pi, \pi - 2\beta) < z_{1(0)}^+(\pi, \pi - 2\beta),$$

которое вытекает из неравенств $\bar{v}(0) > \bar{v}(1) > \bar{v}(2)$ и асимптотических формул (7.2).

Трехкратное собственное значение. Собственные значения

$$z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta), \quad z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta), \quad n \geq 2,$$

для всех малых β лежат левее $z_n(\pi, \pi)$. При условии $0 < \bar{v}(n+1) < \bar{v}(n) < \bar{v}(n-1)$ имеют место неравенства

$$\frac{2}{\bar{v}(n) - \bar{v}(n+1)} > \frac{1}{\bar{v}(n)} > \frac{\bar{v}(n-1) - 3\bar{v}(n)}{\bar{v}(n)(\bar{v}(n-1) - \bar{v}(n))},$$

и для собственных значений $z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$, $z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ и $z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta)$ при малых β выполняются неравенства

$$z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta) < z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta) < z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta).$$

Если $\bar{v}(n) < \bar{v}(n-1)/3$, то собственное значение $z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ при малых β тоже лежит левее $z_n(\pi, \pi)$. Если $\bar{v}(n) \in (\bar{v}(n-1)/3, \bar{v}(n-1))$, то собственное значение $z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ лежит правее $z_n(\pi, \pi)$. Если $3\bar{v}(n) = \bar{v}(n-1)$, то в третьей из асимптотических формул (7.3) коэффициент при β^2 ,

$$c_2(n) = -\frac{\bar{v}(n-1) - 3\bar{v}(n)}{\bar{v}(n)(\bar{v}(n-1) - \bar{v}(n))},$$

обращается в ноль. Следовательно, разность $z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta) - z_n(\pi, \pi)$ имеет порядок β^4 , если $3\bar{v}(n) = \bar{v}(n-1)$. Поэтому найдем коэффициент $c_4(n)$ при β^4 в асимптотическом разложении значения $z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$. Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta) &= z_n(\pi, \pi) - c_2(n) \sin^2 \beta - \\ &\quad - \frac{2(\bar{v}^2(n-1) - 3\bar{v}(n-1)\bar{v}(n) + 4\bar{v}^2(n))}{\bar{v}^2(n)(\bar{v}(n-1) - \bar{v}(n))^3} \sin^4 \beta + O(\beta^6), \quad \beta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В частности, при $3\bar{v}(n) = \bar{v}(n-1)$ имеем

$$z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta) = z_n(\pi, \pi) - \frac{1}{\bar{v}^3(n)} \sin^4 \beta + O(\beta^6), \quad \beta \rightarrow 0.$$

Теперь ответим на вопрос, существуют ли эти собственные значения при больших β ? Собственное значение $z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta)$ (см. теорему 6.3) существует только при малых значениях $\beta \in (0, \beta_n)$, где $\beta_n = \arcsin \bar{v}(n)$. При “больших” $\beta \in [\beta_n, \pi/2]$ это собственное значение исчезает, поглощаясь непрерывным спектром, и превращается в резонанс. Из неравенства $z_{n(n-1)}^-(\pi, \pi - 2\beta) < z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ вытекает, что собственное значение $z_{n(n-1)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ тоже исчезает, поглощаясь непрерывным спектром, при $\beta \in [\beta_n, \pi/2]$. Из утверждения теоремы 6.2 вытекает, что собственное значение $z_{n(n)}^+(\pi, \pi - 2\beta)$ существует при всех значениях $\beta \in [0, \pi/2]$.

Список литературы

- [1] Ш. С. Маматов, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **79**:2 (1989), 163–179.
- [2] R. A. Minlos, A. I. Mogilner, “Some problems concerning spectra of lattice models”, *Schrödinger Operators: Standard and Nonstandard* (Dubna, 6–10 September, 1988), eds. P. Exner, P. Seba, World Sci., Singapore, 1989, 243–257.
- [3] J. S. Howland, *Pacific J. Math.*, **55** (1974), 157–176.
- [4] Ж. И. Абдуллаев, *ТМФ*, **147**:1, 47–57.
- [5] Ж. И. Абдуллаев, *ТМФ*, **145**:2, 212–220.
- [6] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. IV: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [7] J. Rauch, *J. Funct. Anal.*, **35**:3 (1980), 304–315.
- [8] B. Simon, *Ann. Phys.*, **97**:2 (1976), 279–288.
- [9] M. Klaus, *Ann. Phys.*, **108**:2 (1977), 288–300.
- [10] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [11] P. A. Faria da Viegа, L. Ioriatti, M. O’Carroll, *Phys. Rev. E*, **66**:1 (2002), 016130, 9 pp.
- [12] Ж. И. Абдуллаев, *Узбек. матем. журн.*, 2005, № 1, 3–11.
- [13] A. Sobolev, *Commun. Math. Phys.*, **156**:1 (1993), 101–126.
- [14] Ж. И. Абдуллаев, *Вестн. СамГУ*, 2014, № 5, 6–15.
- [15] Ж. И. Абдуллаев, М. Ш. Файзиев, Й. С. Шотемиров, *Узбек. матем. журн.*, 2009, № 3, 3–10.

Поступила в редакцию 25.02.2015