Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Х. Эшкабилов, О спектре одного модельного трехчастичного оператора Шредингера, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 311–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:49:59

© 2016 г.

Ю. Х. Эшкабилов*

О СПЕКТРЕ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Изучается спектр некоторого модельного трехчастичного оператора Шредингера $H(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Доказано, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ у этого оператора отсутствуют связанные состояния и двухчастичные ветви спектра. Получена оценка для малого параметра ε .

Ключевые слова: операторы Шредингера, спектр, существенный спектр, дискретный спектр.

DOI: 10.4213/tmf8879

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega_1 = [a, b]^{\nu_1} \subset \mathbb{R}^{\nu_1}$ и $\Omega_2 = [c, d]^{\nu_2} \subset \mathbb{R}^{\nu_2}$ (где $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$). Пусть $k_1(x, s, y)$ и $k_2(x, t, y)$ – непрерывные функции на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$ и на $\Omega_1 \times \Omega_2^2$ соответственно, причем $k_1(x, s, y) = k_1(s, x, y)$, $k_2(x, t, y) = k_2(x, y, t)$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим линейные ограниченные операторы T_1 и T_2 формулами

$$T_1 f(x, y) = \int_{\Omega_1} k_1(x, s, y) f(s, y) d\mu_1(s),$$

$$T_2 f(x, y) = \int_{\Omega_2} k_2(x, t, y) f(x, t) d\mu_2(t),$$

где μ_j – мера Лебега на σ -алгебре измеримых по Лебегу подмножеств множества Ω_j , $j = 1, 2$, т. е. здесь интеграл понимается в смысле Лебега. Операторы T_1 и T_2 называются частично интегральными операторами (ЧИО) в $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Пусть $k_0(x, y)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$ и $k(x, y; s, t)$ – непрерывная функция на $(\Omega_1 \times \Omega_2)^2$, причем $k(x, y; s, t) = \overline{k(s, t; x, y)}$. Обозначим через H_0 оператор умножения на функцию $k_0(x, y)$:

$$H_0 f(x, y) = k_0(x, y) f(x, y), \quad f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

*Механико-математический факультет, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: yusup62@mail.ru

а через K обозначим компактный интегральный оператор, заданный на $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ равенством

$$Kf(x, y) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} k(x, y; s, t) f(s, t) ds dt.$$

Здесь и в дальнейшем $ds = d\mu_1(s)$, $dt = d\mu_2(t)$, и мы предполагаем, что меры $\mu_1(\cdot)$ и $\mu_2(\cdot)$ нормированы, т. е. $\mu_1(\Omega_1) = \mu_2(\Omega_2) = 1$.

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$H = H(\varepsilon): L_2(\Omega_1 \times \Omega_2) \rightarrow L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

заданный равенством

$$H(\varepsilon) = H_0 - \varepsilon(T_1 + T_2) - \varepsilon K. \quad (1.1)$$

Оператор H является самосопряженным на $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Операторы такого вида возникают, например, при изучении двухчастичных ветвей спектра гамильтонианов, описывающих квантовые системы с большим (или бесконечным) числом частиц [1]–[3], в генераторах сложных марковских процессов, в теории упругости, гидродинамике и других разделах механики [4], [5], а также в теории дискретных трехчастичных операторов Шредингера [6]–[10].

В работе [6] была исследована структура спектра гамильтониана H^t (оператора триплета) системы, состоящей из двух свободно движущихся электронов (из двух электронов с разным спином) и одной примеси на решетке. Гамильтониан H^t имел вид $H^t = H_0 - (T_1 + T_2)$, где оператор H_0 соответствует свободному движению двух электронов и одной примеси (т. е. H_0 – оператор кинетической энергии), интегральный оператор T_1 описывает взаимодействие первого электрона с примесью, а интегральный оператор T_2 – взаимодействие второго электрона с примесью, т. е. оператор $T = T_1 + T_2$ задает потенциал. Гамильтониан H^t в работе [6] был назван трехчастичным оператором триплета (два электрона и одна примесь). В указанной работе изучалась общая модель

$$\hat{H} = H_0 - (T_1 + T_2) \quad (1.2)$$

трехчастичного дискретного оператора H^t и была доказана теорема о существенном спектре гамильтониана $\hat{H}$.

Дискретный спектр гамильтониана $\hat{H}$ для произвольных непрерывных ядер изучался в статье [11]. Конечность и бесконечность дискретных спектров трехчастичных операторов, описывающихся моделью $\hat{H}$ (1.2), были исследованы в работах [7]–[10].

Спектральные свойства гамильтониана $H(\varepsilon)$ (1.2) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ исследованы в работе Минлоса и Акчурина [12], где изучалась теория рассеяния для оператора H . Пусть $\nu_1 = \nu_2 = d \geq 3$ и $k_0(x, y) = \omega(x) + \omega(y)$, где ω – вещественнозначная бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственную критическую точку q_0 , являющуюся точкой невырожденного минимума, а ядра k_1 , k_2 , k – гладкие функции. При этих предположениях доказано что при достаточно малом ε спектр гамильтониана H совпадает со спектром мультипликатора H_0 , т. е. $\sigma(H) = \sigma(H_0)$, следовательно, отсутствуют двухчастичные ветви спектра гамильтониана H и связанные состояния.

В настоящей работе исследуется спектр гамильтониана $H(\varepsilon)$ (1.1) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для произвольных непрерывных функций $k_0(x, y)$, $k_1(x, s, y)$ и $k_2(x, t, y)$ в случае $K = \theta$, где θ – нулевой оператор. Таким образом, интегральный оператор K отсутствует в модели $H(\varepsilon)$ (1.1). Следовательно, гамильтониан $H(\varepsilon)$ соответствует трехчастичному оператору $\hat{H}$ (1.2). Получена оценка (2.6) для значений параметра $\varepsilon > 0$, при которых спектр гамильтониана $H(\varepsilon)$ совпадает со спектром мультипликатора H_0 (теорема 2.3), и тем самым отсутствуют двухчастичные ветви спектра трехчастичного оператора H и связанные состояния. Эта оценка важна для проведения экспериментальных исследований и изучения энергии трехчастичных гамильтонианов.

2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Определим операторы $H_k(\varepsilon) = H_0 - \varepsilon T_k$, $k = 1, 2$. Пусть $R_\lambda(H_0)$ – резольвента мультипликатора H_0 ,

$$R_\lambda(H_0) = (H_0 - \lambda E)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(H_0),$$

где E – тождественный оператор, $\rho(H_0)$ – множество регулярных точек оператора H_0 . Рассмотрим ЧИО

$$W_k(\lambda) = T_k R_\lambda(H_0), \quad \lambda \in \rho(H_0), \quad k = 1, 2.$$

Обозначим через $D_1(y; z, \varepsilon)$ и $D_2(x; z, \varepsilon)$ детерминанты ЧИО $E - \varepsilon W_1(z)$ и $E - \varepsilon W_2(z)$, где $z \in \rho(H_0)$ [13], [14]. Пусть множества $\sigma_k(\varepsilon) \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$, заданы равенствами

$$\sigma_1(\varepsilon) = \{\lambda \in \rho(H_0) : D_1(y_0; \lambda, \varepsilon) = 0 \text{ для некоторого } y_0 \in \Omega_2\}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_2(\varepsilon) = \{\lambda \in \rho(H_0) : D_2(x_0; \lambda, \varepsilon) = 0 \text{ для некоторого } x_0 \in \Omega_1\}. \quad (2.2)$$

Тогда в силу теоремы 6 из работы [15]

$$\sigma(H_k(\varepsilon)) = \sigma(H_0) \cup \sigma_k(\varepsilon), \quad k = 1, 2. \quad (2.3)$$

Согласно теореме 3.3 из работы [4] о существенном спектре ЧИО для трехчастичного оператора $H = H(\varepsilon) = H_0 - \varepsilon(T_1 + T_2)$ имеем

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\varepsilon)) = \sigma(H_0) \cup \sigma(H_1(\varepsilon)) \cup \sigma(H_2(\varepsilon)) = \sigma_0 \cup \sigma_1(\varepsilon) \cup \sigma_2(\varepsilon), \quad (2.4)$$

где $\sigma_0 = \sigma(H_0)$, а $\sigma(H_1(\varepsilon))$, $\sigma(H_2(\varepsilon))$ соответствуют двухчастичной ветви.

Пусть $\lambda \in \rho(H_0)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим непрерывную функцию на $\Omega_1^n \times \Omega_2^n \times \Omega_2$ формулой

$$K_n^{(1)} \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n; y \\ s_1, \dots, s_n; \lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} h_1(x_1, s_1, y; \lambda) & \dots & h_1(x_1, s_n, y; \lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(x_n, s_1, y; \lambda) & \dots & h_1(x_n, s_n, y; \lambda) \end{vmatrix},$$

где

$$h_1(x, s, y; \lambda) = \frac{k_1(x, s, y)}{k_0(s, y) - \lambda}, \quad \lambda \in \rho(H_0).$$

На $\Omega_1^n \times \Omega_2^n \times \Omega_1$ аналогично определим функцию

$$K_n^{(2)}\left(\begin{matrix} y_1, \dots, y_n; x \\ t_1, \dots, t_n; \lambda \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} h_2(x, t_1, y_1; \lambda) & \dots & h_2(x, t_n, y_1; \lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_2(x, t_1, y_n; \lambda) & \dots & h_2(x, t_n, y_n; \lambda) \end{vmatrix},$$

где

$$h_2(x, t, y; \lambda) = \frac{k_2(x, t, y)}{k_0(x, t) - \lambda}, \quad \lambda \in \rho(H_0).$$

Для каждого значения $\lambda \in \rho(H_0)$ определим последовательности непрерывных функций $d_n^{(1)}(y; \lambda)$ на Ω_2 и $d_n^{(2)}(x; \lambda)$ на Ω_1 ($n \in \mathbb{N}$) следующим образом:

$$d_n^{(k)}(\xi; \lambda) = \int_{\Omega_k} \dots \int_{\Omega_k} K^{(k)}\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n; \xi \\ \xi_1, \dots, \xi_n; \lambda \end{matrix}\right) d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad k = 1, 2.$$

Детерминанты $D_1(y; z, \varepsilon)$ и $D_2(x; z, \varepsilon)$ имеют следующие формы [13], [14]:

$$D_1(y; \lambda, \varepsilon) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} d_n^{(1)}(y; \lambda), \quad D_2(x; \lambda, \varepsilon) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} d_n^{(2)}(x; \lambda).$$

Обозначим через $M_1(x, s, y; z, \varepsilon)$ и $M_2(x, t, y; z, \varepsilon)$ соответственно миноры операторов $E - \varepsilon W_1(z)$ и $E - \varepsilon W_2(z)$, $z \in \rho(H_0)$. Тогда [13], [14]

$$\begin{aligned} M_1(x, s, y; \lambda, \varepsilon) &= h_1(x, s, y; \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} q_n^{(1)}(x, s, y; \lambda), \\ M_2(x, t, y; \lambda, \varepsilon) &= h_2(x, t, y; \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} q_n^{(2)}(x, t, y; \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_n^{(1)}(x, s, y; \lambda) &= \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_1} K_{n+1}^{(1)}\left(\begin{matrix} x, s_1, \dots, s_n; y \\ s, s_1, \dots, s_n; \lambda \end{matrix}\right) ds_1 \dots ds_n, \\ q_n^{(2)}(x, t, y; \lambda) &= \int_{\Omega_2} \dots \int_{\Omega_2} K_{n+1}^{(2)}\left(\begin{matrix} y, t_1, \dots, t_n; x \\ t, t_1, \dots, t_n; \lambda \end{matrix}\right) dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_1(\varepsilon))$. Тогда оператор $E - \varepsilon W_1(\lambda)$ обратим и обратный оператор $(E - \varepsilon W_1(\lambda))^{-1}$ является ограниченным, при этом $(E - \varepsilon W_1(\lambda))^{-1} = E + \varepsilon P_1(\lambda, \varepsilon)$, где $P_1(\lambda, \varepsilon)$ – ЧИО, заданный равенством

$$P_1(\lambda, \varepsilon) f(x, y) = \int_{\Omega_1} \frac{M_1(x, s, y; \lambda, \varepsilon)}{D_1(y; \lambda, \varepsilon)} f(s, y) ds.$$

Аналогично, если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_2(\varepsilon))$, то $E - \varepsilon W_2(\lambda)$ обратим и обратный оператор $(E - \varepsilon W_2(\lambda))^{-1}$ является ограниченным, при этом $(E - \varepsilon W_2(\lambda))^{-1} = E + \varepsilon P_2(\lambda, \varepsilon)$, где $P_2(\lambda, \varepsilon)$ – ЧИО, заданный равенством

$$P_2(\lambda, \varepsilon) f(x, y) = \int_{\Omega_2} \frac{M_2(x, t, y; \lambda, \varepsilon)}{D_2(x; \lambda, \varepsilon)} f(x, t) dt.$$

Для каждого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\sigma(H_1(\varepsilon)) \cup \sigma(H_2(\varepsilon))\}$ в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим компактный оператор $K(\lambda, \varepsilon)$ следующим образом:

$$K(\lambda, \varepsilon) = (E - \varepsilon W_2(\lambda))^{-1} P_1(\lambda, \varepsilon) W_2(\lambda).$$

Обозначим через $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ определитель Фредгольма оператора $E - \varepsilon K(\lambda, \varepsilon)$. Для дискретного спектра трехчастичного оператора $H(\varepsilon)$ имеет место следующее равенство [7]:

$$\sigma_{\text{disc}}(H(\varepsilon)) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\sigma(H_1(\varepsilon)) \cup \sigma(H_2(\varepsilon))\} : \Delta(\lambda, \varepsilon) = 0\}. \quad (2.5)$$

Положим

$$m = \inf_{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2} k_0(x, y), \quad M = \sup_{(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2} k_0(x, y).$$

Допустим, что

$$m = k_0(x_{\min}, y_{\min}), \quad M = k_0(x_{\max}, y_{\max}), \quad (x_{\min}, y_{\min}), (x_{\max}, y_{\max}) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

На множестве Ω_2 определим следующие функции:

$$F_1(y) = \lim_{\lambda \rightarrow m-0} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{k_0(s, y) - \lambda}, \quad F_2(y) = \lim_{\lambda \rightarrow M+0} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{\lambda - k_0(s, y)}.$$

Аналогично на множестве Ω_1 определим следующие функции

$$G_1(x) = \lim_{\lambda \rightarrow m-0} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{k_0(x, t) - \lambda}, \quad G_2(x) = \lim_{\lambda \rightarrow M+0} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{\lambda - k_0(x, t)}.$$

Пусть значения $F_1(y_{\min})$, $F_2(y_{\max})$, $G_1(x_{\min})$ и $G_2(x_{\max})$ являются конечными. Тогда функции $F_1(y)$, $F_2(y)$, $G_1(x)$ и $G_2(x)$ непрерывны и имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_1} \frac{ds}{k_0(s, y) - \lambda} \leq F_1(y) \quad \text{при } \lambda \leq m, \\ 0 &\leq \int_{\Omega_1} \frac{ds}{\lambda - k_0(s, y)} \leq F_2(y) \quad \text{при } \lambda \geq M, \end{aligned}$$

где $y \in \Omega_2$;

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_2} \frac{dt}{k_0(x, t) - \lambda} \leq G_1(x) \quad \text{при } \lambda \leq m, \\ 0 &\leq \int_{\Omega_2} \frac{dt}{\lambda - k_0(x, t)} \leq G_2(x) \quad \text{при } \lambda \geq M, \end{aligned}$$

где $x \in \Omega_1$.

Положим

$$J_k = \max_{y \in \Omega_2} F_k(y), \quad I_k = \max_{x \in \Omega_1} G_k(x), \quad k = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнено неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{2k_1^{\max}} \frac{1}{\max\{J_1, J_2\}} \quad \left(\varepsilon < \frac{1}{2k_2^{\max}} \frac{1}{\max\{I_1, I_2\}} \right),$$

где

$$k_1^{\max} = \sup_{(x,s,y) \in \Omega_1^2 \times \Omega_2} |k_1(x,s,y)|, \quad k_2^{\max} = \sup_{(x,t,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2^2} |k_2(x,t,y)|.$$

Тогда для спектра оператора $H_1(\varepsilon) = H_0 - \varepsilon T_1$ (оператора $H_2(\varepsilon) = H_0 - \varepsilon T_2$) имеет место равенство $\sigma(H_1(\varepsilon)) = \sigma(H_0)$ (равенство $\sigma(H_2(\varepsilon)) = \sigma(H_0)$), т.е. в спектре оператора $H_1(\varepsilon)$ (оператора $H_2(\varepsilon)$) отсутствует дополнительная часть $\sigma_1(\varepsilon)$ (дополнительная часть $\sigma_2(\varepsilon)$).

ТЕОРЕМА 2.2. Если выполнено неравенство

$$\varepsilon < \mu_0 = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{k_1^{\max} J_0}, \frac{1}{k_2^{\max} I_0} \right\},$$

где $J_0 = \max\{J_1, J_2\}$, $I_0 = \max\{I_1, I_2\}$, то для существенного спектра трехчастичного оператора $H(\varepsilon)$ имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\varepsilon)) = \sigma_{\text{ess}}(H(0)) = \sigma(H(0)),$$

т.е. в спектре оператора $H(\varepsilon)$ отсутствует двухчастичная ветвь.

На множестве Ω_1 определим следующие функции:

$$\psi_1(x) = \lim_{\lambda \rightarrow m-0} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{(k_0(x,t) - \lambda)^4}, \quad \psi_2(x) = \lim_{\lambda \rightarrow M+0} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{(k_0(x,t) - \lambda)^4}.$$

Допустим, что $\psi_1(x_{\min})$ и $\psi_2(x_{\max})$ конечны. Тогда функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются непрерывными на Ω_1 и справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_2} \frac{dt}{(k_0(x,t) - \lambda)^4} \leq \psi_1(x) \quad \text{при } \lambda \leq m, \\ 0 &\leq \int_{\Omega_2} \frac{dt}{(k_0(x,t) - \lambda)^4} \leq \psi_2(x) \quad \text{при } \lambda \geq M, \end{aligned}$$

где $x \in \Omega_1$.

Положим

$$\Lambda_k = \sup_{x \in \Omega_1} \psi_k(x), \quad k = 1, 2, \quad \Lambda_0 = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}.$$

Пусть $a \in (0, \mu_0)$. Определим величину

$$\gamma(a) = \frac{\varphi_1(a)\varphi_2(a)}{3k_1^{\max}k_2^{\max}(2 + 3\sqrt[4]{\Lambda_0}k_2^{\max})\sqrt{\Lambda_0}},$$

где

$$\varphi_1(a) = 1 - \frac{aJ_0k_1^{\max}}{1 - aJ_0k_1^{\max}}, \quad \varphi_2(a) = 1 - \frac{aI_0k_2^{\max}}{1 - aI_0k_2^{\max}}.$$

Для каждого $a \in (0, \mu_0)$ определим также положительное число $\gamma_0(a)$:

$$\gamma_0(a) = \begin{cases} a, & \text{если } \mu_0 \leq \gamma(a), \\ \gamma(a), & \text{если } \mu_0 > \gamma(a). \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $a \in (0, \mu_0)$. При всех

$$\varepsilon \in (0, \gamma_0(a)] \tag{2.6}$$

в спектре трехчастичного оператора $H(\varepsilon)$ отсутствуют двухчастичная ветвь и связанные состояния, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H(\varepsilon)) = \sigma(H(0))$ и $\sigma_{\text{disc}}(H(\varepsilon)) = \emptyset$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

ЛЕММА 3.1. Если выполнено неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{2k_1^{\max}} \frac{1}{J_0} \quad \text{или} \quad \varepsilon < \frac{1}{2k_2^{\max}} \frac{1}{I_0}, \quad (3.1)$$

то $\sigma_1(\varepsilon) = \emptyset$ или $\sigma_2(\varepsilon) = \emptyset$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму для множества $\sigma_1(\varepsilon)$, доказательство для множества $\sigma_2(\varepsilon)$ можно провести аналогично. Как известно, спектр самосопряженных операторов лежит на вещественной оси. Отсюда и из определения (2.1) следует, что нам достаточно проанализировать функцию $D_1(y; \lambda, \varepsilon)$ при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$. В этом случае для детерминанта $D_1(y; \lambda, \varepsilon)$ имеем

$$D_1(y; \lambda, \varepsilon) = 1 - \varepsilon \Delta_1(y; \lambda, \varepsilon), \quad (3.2)$$

где

$$\Delta_1(y; \lambda, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^{n-1}}{n!} d_n^{(1)}(y; \lambda).$$

Для функции $K_n^{(1)}$ справедливо равенство

$$K_n^{(1)} \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n; y \\ s_1, \dots, s_n; \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (k_0(s_j; y) - \lambda)} \Pi_n^{(1)} \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n; y \\ s_1, \dots, s_n; y \end{pmatrix},$$

где

$$\Pi_n^{(1)} \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n; y \\ s_1, \dots, s_n; y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} k_1(x_1, s_1, y) & \dots & k_1(x_1, s_n, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1(x_n, s_1, y) & \dots & k_1(x_n, s_n, y) \end{vmatrix}.$$

Пользуясь неравенством Адамара, получим

$$\left| \Pi_n^{(1)} \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n; y \\ s_1, \dots, s_n; y \end{pmatrix} \right| \leq (k_1^{\max})^n n^{n/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$ имеем

$$|d_n^{(1)}(y; \lambda)| \leq \left(k_1^{\max} n^{1/2} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{|k_0(s, y) - \lambda|} \right)^n \leq \left(J_0 k_1^{\max} n^{1/2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^{n/2}}{n!} = 1,$$

получим, что

$$|\Delta_1(y; \lambda, \varepsilon)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n-1}}{n!} (J_0 k_1^{\max})^n n^{n/2} < \sum_{n=1}^{\infty} (J_0 k_1^{\max})^n \varepsilon^{n-1} = \frac{J_0 k_1^{\max}}{1 - \varepsilon J_0 k_1^{\max}},$$

так как $\varepsilon J_0 k_1^{\max} < 1$ в силу неравенства (3.1).

Таким образом,

$$\varepsilon |\Delta_1(y; \lambda, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon J_0 k_1^{\max}}{1 - \varepsilon J_0 k_1^{\max}} < 1 \quad \text{при всех } y \in \Omega_2 \text{ и } \lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M].$$

Из последнего неравенства и из формулы (3.2) вытекает, что $D_1(y; \lambda, \varepsilon) > 0$ при всех $y \in \Omega_2$ и любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$. Отсюда и из (2.1) следует, то $\sigma_1(\varepsilon) = \emptyset$. Лемма доказана.

Пусть $a_0 \in (0, 1/(2k_1^{\max} J_0))$ – фиксированное число и

$$\Gamma_1 = \Omega_2 \times (-\infty, m) \times (0, a_0], \quad \Gamma_2 = \Omega_2 \times (M, +\infty) \times (0, a_0].$$

ЛЕММА 3.2. *Справедливы неравенства*

$$\inf_{(y, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} D_1(y; \lambda, \varepsilon) = D_1^{\min} > 0, \quad \sup_{(y, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} D_1(y; \lambda, \varepsilon) = D_1^{\max} \leq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $D_1(y; \lambda, \varepsilon) = 1 - \varepsilon \Delta_1(y; \lambda, \varepsilon)$ при всех $(y, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и в силу неравенства (3.2) получим, что $0 < D_1(y; \lambda, \varepsilon) < 2$ при всех $(y, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Отсюда

$$D_1^{\max} = \sup_{(y, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} D_1(y; \lambda, \varepsilon) \leq 2$$

и

$$\begin{aligned} \inf_{(y, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} D_1(y; \lambda, \varepsilon) &\geq 1 - \sup_{(y, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \varepsilon |\Delta_1(y; \lambda, \varepsilon)| \geq \\ &\geq 1 - \sup_{\varepsilon \in (0, a]} \frac{\varepsilon J_0 k_1^{\max}}{1 - \varepsilon J_0 k_1^{\max}} = 1 - \frac{a J_0 k_1^{\max}}{1 - a J_0 k_1^{\max}} > 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим

$$\Gamma'_1 = \Omega_1 \times (-\infty, m) \times (0, b_0], \quad \Gamma'_2 = \Omega_1 \times (M, +\infty) \times (0, b_0],$$

где $b_0 \in (0, 1/(2k_2^{\max} I_0))$ – фиксированное число. Аналогично лемме 3.2 доказыва-
ется следующее утверждение.

ЛЕММА 3.3. *Справедливы неравенства*

$$\inf_{(x, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2} D_2(x; \lambda, \varepsilon) = D_2^{\min} > 0, \quad \sup_{(x, \lambda, \varepsilon) \in \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2} D_2(x; \lambda, \varepsilon) = D_2^{\max} \leq 2.$$

ЛЕММА 3.4. *Если $\varepsilon < 1/J_0 k_1^{\max}$, то для каждого $\lambda \in \rho(H_0)$*

$$|M_1(x, s, y; \lambda, \varepsilon)| \leq \Phi_1(\varepsilon) \frac{k_1^{\max}}{|k_0(s, y) - \lambda|}, \quad (x, s, y) \in \Omega_1^2 \times \Omega_2,$$

где

$$\Phi_1(\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon J_0 k_1^{\max})^k \frac{(k+1)^{(k+1)/2}}{k!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\lambda \in \rho(H_0)$ имеем

$$K_{n+1}^{(1)} \left(\begin{matrix} x, s_1, \dots, s_n; y \\ s, s_1, \dots, s_n; \lambda \end{matrix} \right) = \frac{1}{(k_0(s, y) - \lambda) \prod_{j=1}^n (k_0(s_j, y) - \lambda)} \begin{vmatrix} k_1(x, s, y) & \dots & k_1(x, s_n, y) \\ k_1(s_1, s, y) & \dots & k_1(s_1, s_n, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1(s_n, s, y) & \dots & k_1(s_n, s_n, y) \end{vmatrix}.$$

Отсюда и в силу неравенства Адамара получим

$$\left| K_{n+1}^{(1)} \left(\begin{matrix} x, s_1, \dots, s_n; y \\ s, s_1, \dots, s_n; \lambda \end{matrix} \right) \right| = \frac{(k_1^{\max})^{n+1} (n+1)^{(n+1)/2}}{|k_0(s, y) - \lambda| \prod_{j=1}^n |k_0(s_j, y) - \lambda|}.$$

Тогда

$$|q_n^{(1)}(x, s, y; \lambda)| \leq \frac{J_0^n (k_1^{\max})^{n+1} (n+1)^{(n+1)/2}}{|k_0(s, y) - \lambda|}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |M_1(x, s, y; \lambda, \varepsilon)| &\leq \frac{k_1^{\max}}{|k_0(s, y) - \lambda|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n J_0^n (k_1^{\max})^{n+1} (n+1)^{(n+1)/2}}{n! |k_0(s, y) - \lambda|} = \\ &= \frac{k_1^{\max}}{|k_0(s, y) - \lambda|} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon J_0 k_1^{\max})^n \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!} \right) = \\ &= \Phi_1(\varepsilon) \frac{k_1^{\max}}{|k_0(s, y) - \lambda|}. \end{aligned}$$

Аналогично лемме 3.4 доказывается следующее утверждение.

ЛЕММА 3.5. Если $\varepsilon < 1/I_0 k_2^{\max}$, то для каждого $\lambda \in \rho(H_0)$

$$|M_2(x, t, y; \lambda, \varepsilon)| \leq \Phi_2(\varepsilon) \frac{k_2^{\max}}{|k_0(t, x) - \lambda|}, \quad (x, t, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2^2,$$

где

$$\Phi_2(\varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon I_0 k_2^{\max})^n \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}.$$

ЛЕММА 3.6. Пусть $\lambda \in \rho(H_0)$ и $0 < a < \mu_0$. Тогда при $0 < \varepsilon \leq a$ для ядра $q(x, y, s, t; \lambda, \varepsilon)$ интегрального оператора $K(\lambda, \varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|q(x, y, s, t; \lambda, \varepsilon)| \leq A_1(\varepsilon) \left(\frac{1}{(k_0(s, y) - \lambda)^2} + A_2(\varepsilon) \right),$$

где

$$A_1(\varepsilon) = \frac{k_1^{\max} k_2^{\max}}{D_1^{\min}} \Phi_1(\varepsilon), \quad A_2(\varepsilon) = \frac{\Lambda_0^{3/4} k_2^{\max}}{D_2^{\min}} \Phi_2(\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3.1 и 3.2 имеем $\sigma_1(\varepsilon) = \sigma_2(\varepsilon) = \emptyset$ (см. равенства (2.1) и (2.2)). Следовательно, $\sigma_{\text{ess}}(H(\varepsilon)) = \sigma(H_0)$. Пусть $\lambda \in \rho(H_0)$. Ядро $q(x, y; s, t; \lambda, \varepsilon)$ компактного оператора $K(\lambda, \varepsilon)$ записывается как [7]

$$q(x, y; s, t; \lambda, \varepsilon) = \frac{M_1(x, s, y; \lambda, \varepsilon)}{D_1(y; \lambda, \varepsilon)} \frac{k_2(s, t, y)}{k_0(s, y) - \lambda} + \\ + \int_{\Omega_2} \frac{M_2(x, \xi, y; \lambda, \varepsilon)}{D_2(x; \lambda, \varepsilon)} \frac{M_1(x, s, \xi; \lambda, \varepsilon)}{D_1(\xi; \lambda, \varepsilon)} \frac{k_2(s, t, \xi)}{k_0(s, \xi) - \lambda} d\xi.$$

Отсюда вытекает, что

$$|q(x, y; s, t; \lambda, \varepsilon)| \leq \frac{k_1^{\max} k_2^{\max}}{D_1^{\min}} \frac{\Phi_1(\varepsilon)}{(k_0(s, y) - \lambda)^2} + \\ + \frac{k_1^{\max} (k_2^{\max})^2}{D_1^{\min} D_2^{\min}} \Phi_1(\varepsilon) \Phi_2(\varepsilon) \int_{\Omega_2} \frac{1}{|k_0(x, \xi) - \lambda|} \frac{d\xi}{(k_0(s, \xi) - \lambda)^2} = \\ = \frac{k_1^{\max} k_2^{\max}}{D_1^{\min}} \Phi_1(\varepsilon) \left(\frac{1}{(k_0(s, y) - \lambda)^2} + \frac{k_2^{\max}}{D_2^{\min}} \Phi_2(\varepsilon) \int_{\Omega_2} \frac{d\xi}{|k_0(x, \xi) - \lambda| (k_0(s, \xi) - \lambda)^2} \right) \leq \\ \leq \frac{k_1^{\max} k_2^{\max}}{D_1^{\min}} \Phi_1(\varepsilon) \left(\frac{1}{(k_0(s, y) - \lambda)^2} + \frac{k_2^{\max}}{D_2^{\min}} \Phi_2(\varepsilon) \Lambda_0^{3/4} \right),$$

где $\Lambda_0 = \max\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Из равенств (2.1)–(2.3) с учетом лемм 3.1, 3.2 вытекает теорема 2.1. Из теоремы 2.1 с учетом равенства (2.4) вытекает теорема 2.2.

Пусть для $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства теоремы 2.1. Тогда

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\varepsilon)) = \sigma(H(0)) = \sigma(H_0).$$

Для каждого ε и $z \in \rho(H_0)$ определим функцию Π_n на $(\Omega_1 \times \Omega_2)^n \times (\Omega_1 \times \Omega_2)^n$:

$$\Pi_n \left(\begin{matrix} \omega_1, \dots, \omega_n; \varepsilon \\ \omega'_1, \dots, \omega'_n; z \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} q(\omega_1, \omega'_1; z, \varepsilon) & \dots & q(\omega_1, \omega'_n; z, \varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q(\omega_n, \omega'_1; z, \varepsilon) & \dots & q(\omega_n, \omega'_n; z, \varepsilon) \end{vmatrix},$$

где $\omega_k = (x_k, y_k) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $\omega'_k = (s_k, t_k) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Тогда для детерминанта Фредгольма $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ оператора $E - \varepsilon K(\lambda, \varepsilon)$, $\lambda \in \rho(H_0)$, имеет место формула

$$\Delta(\lambda, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^n}{n!} u_n(\lambda, \varepsilon),$$

где

$$u_n(\lambda, \varepsilon) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \dots \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \Pi_n \left(\begin{matrix} \omega'_1, \dots, \omega'_n; \varepsilon \\ \omega'_1, \dots, \omega'_n; \lambda \end{matrix} \right) d\omega'_1 \dots d\omega'_n.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Если при $\varepsilon \in (0, \mu_0)$ выполнено неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{2A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))},$$

то у оператора $H(\varepsilon)$ отсутствует дискретный спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon \in (0, \mu_0)$. Тогда $\sigma_{\text{ess}}(H(\varepsilon)) = \sigma(H_0)$ в силу теоремы 2.2. Положим

$$q_{i,j}(\lambda, \varepsilon) = q(s_i, t_i; s_j, t_j; \lambda, \varepsilon), \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Из определения детерминанта n -го порядка имеем

$$\Pi_n \left(\begin{matrix} \omega_1, \dots, \omega_n; \varepsilon \\ \omega'_1, \dots, \omega'_n; \lambda \end{matrix} \right) = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^k q_{1,j_1}(\lambda, \varepsilon), q_{2,j_2}(\lambda, \varepsilon), \dots, q_{n,j_n}(\lambda, \varepsilon),$$

где сумма состоит из $n!$ членов вида $(-1)^k q_{1,j_1}, \dots, q_{n,j_n}$, каждый из которых соответствует одному из $n!$ различных упорядоченных множеств $\{j_1, \dots, j_n\}$, полученных k попарными перестановками элементов из множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, пользуясь леммой 3.5, получим

$$\begin{aligned} \left| \Pi_n \left(\begin{matrix} \omega_1, \dots, \omega_n; \varepsilon \\ \omega'_1, \dots, \omega'_n; \lambda \end{matrix} \right) \right| &\leq \sum_{(j_1, \dots, j_n)} |q_{1,j_1}(\lambda, \varepsilon)| \dots |q_{n,j_n}(\lambda, \varepsilon)| \leq \\ &\leq \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \varepsilon^n A_1^n(\varepsilon) \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{(k_0(s_{j_i}, t_i) - \lambda)^2} + A_2(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |u_n(\lambda, \varepsilon)| &\leq \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \dots \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \Pi_n \left(\begin{matrix} \omega'_1, \dots, \omega'_n; \varepsilon \\ \omega'_1, \dots, \omega'_n; \lambda \end{matrix} \right) d\omega'_1 \dots d\omega'_n \leq \\ &\leq \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (\varepsilon A_1(\varepsilon))^n \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_1} \prod_{i=1}^n \left(\int_{\Omega_2} \frac{dt_i}{(k_0(s_{j_i}, t_i) - \lambda)^2} + A_2(\varepsilon) \right) ds_1 \dots ds_n \leq \\ &\leq (\varepsilon^n A_1(\varepsilon))^n \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_1} (\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))^n ds_1 \dots ds_n = \\ &= n! [\varepsilon A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))]^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$\Delta_0(z, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^{n-1}}{n!} u_n(z, \varepsilon), \quad z \in \rho(H_0).$$

Имеем

$$|\Delta_0(z, \varepsilon)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} [A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))]^n = \frac{A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))}{1 - \varepsilon A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))},$$

так как по предположению $\varepsilon A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon)) < 1$. Однако для детерминанта Фредгольма $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ имеет место равенство

$$\Delta(\lambda, \varepsilon) = 1 - \varepsilon \Delta_0(\lambda, \varepsilon), \quad \lambda \in \rho(H_0).$$

Отсюда и в силу неравенства $\varepsilon |\Delta_0(\lambda, \varepsilon)| < 1$, справедливого при любых $\lambda \in \rho(H_0)$, получим, что $\Delta(\lambda, \varepsilon) \neq 0$ при всех $\lambda \in \rho(H_0)$. Таким образом, из равенства (2.5) в силу теоремы 2.2 вытекает, что $\sigma_{\text{disc}}(H(\varepsilon)) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Пусть $\varepsilon \in (0, a]$, $a \in (0, \mu_0)$ и $a_0 = b_0 = a$ в множествах Γ_k и Γ'_k . Имеем

$$\frac{1}{A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))} = \frac{D_1^{\min} D_2^{\min}}{k_1^{\max} k_2^{\max} \Phi_1(\varepsilon)} \frac{1}{D_2^{\min} \sqrt{\Lambda_0} + \sqrt[4]{\Lambda_0^3} k_2^{\max} \Phi_1(\varepsilon)}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \mu_0)} \Phi_1(\varepsilon) = \sup_{\varepsilon \in (0, \mu_0)} \Phi_2(\varepsilon) = 3.$$

Следовательно,

$$\gamma(a) = \frac{\varphi_1(a)\varphi_2(a)}{3k_1^{\max} k_2^{\max} (2 + 3\sqrt[4]{\Lambda_0} k_2^{\max}) \sqrt{\Lambda_0}} < \frac{1}{A_1(\varepsilon)(\sqrt{\Lambda_0} + A_2(\varepsilon))},$$

так как $0 < D_2^{\min} < 2$. Таким образом, как легко заметить, при $\varepsilon < \gamma_0(a)$ выполняются условия теоремы 2.2 и теоремы 4.1. Следовательно,

$$\sigma(H(\varepsilon)) = \sigma_{\text{ess}}(H(\varepsilon)) = \sigma(H(0)) = \sigma(H_0).$$

Тем самым доказана теорема 2.3.

Список литературы

- [1] N. Angelescu, R. A. Minlos, V. A. Zagrebnov, *Rev. Math. Phys.*, **17**:10 (2005), 1111–1142.
- [2] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Линейные операторы в бесконечночастичных системах*, Наука, М., 1994.
- [3] Ю. В. Жуков, *ТМФ*, **107**:1 (1996), 75–85.
- [4] S. Albeverio, Sh. Alimov, *Integral Equations Operator Theory*, **55**:2 (2006), 153–168.
- [5] J. Appell, A. S. Kalitvin, M. Z. Nashed, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **79**:10 (1999), 703–713.
- [6] Ю. Х. Эшкабилов, *ТМФ*, **149**:2 (2006), 228–243.
- [7] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:4 (2007), 377–387.
- [8] Т. Х. Расулов, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 34–44.
- [9] Ю. Х. Эшкабилов, *ТМФ*, **164**:1 (2010), 78–87.
- [10] Ю. Х. Эшкабилов, Р. Р. Кучаров, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 409–422.
- [11] Ю. Х. Эшкабилов, *Матем. тр.*, **15**:2 (2012), 194–203.
- [12] Э. Р. Акчурин, Р. А. Минлос, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:6 (2012), 5–38.
- [13] Yu. Kh. Eshkabilov, *Cent. Eur. J. Math.*, **6**:1 (2008), 149–157.
- [14] Ю. Х. Эшкабилов, *Матем. тр.*, **11**:1 (2008), 192–207.
- [15] Ю. Х. Эшкабилов, *Вестн. НУУз*, 2006, № 2, 17–21.

Поступила в редакцию 27.02.2015,
после доработки 5.05.2015