Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, К теории обратной задачи рассеяния для двумерных неубывающих потенциалов, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 1, 3–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:49:58

© 1998 г.

М. Бойти*, Ф. Пемпинелли*,
А. К. Погребков†, Б. Принари*

К ТЕОРИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ НЕУБЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрен метод обратной задачи рассеяния для нестационарного уравнения Шредингера с потенциалом $u(x_1, x_2)$, неубывающим вдоль конечного числа направлений на x -плоскости. Показано, что для исследования данной проблемы особенно удобен так называемый резольвентный подход. Здесь общая схема этого метода проверяется посредством исследования потенциала, задаваемого преобразованием Беклунда произвольного убывающего потенциала, т.е. потенциала, описывающего наложение солитона на произвольный фон. Для этого случая резольвента, решения Йоста и спектральные данные строятся явным образом и исследуются их свойства. Выведены характеристические уравнения для спектральных данных, и доказана однозначная разрешимость обратной задачи. Помимо этого дано детальное описание асимптотического поведения построенного потенциала.

Полученная в работе резольвента использована для проведения процедуры одевания, показывающей, что для неубывающих потенциалов общего вида решения Йоста могут иметь дополнительный разрез в комплексной плоскости спектрального параметра. Сформулировано необходимое и достаточное условие отсутствия такого разреза.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Общая схема резольвентного подхода	7
2.1. Основные определения	7
2.2. Решения Йоста и опережающие–запаздывающие решения для убывающих потенциалов	10
2.3. Решения Йоста и опережающие–запаздывающие решения для неубывающих потенциалов	16
2.4. Спектральные данные для убывающих потенциалов	19
2.5. Спектральные данные для неубывающих потенциалов	21
3. Наложение солитона на убывающий фоновый потенциал	22

*Dipartimento di Fisica dell'Università and Sezione INFN, 73100 Lecce, ITALY.
E-mail:boiti@le.infn.it, pemp@le.infn.it, prinari@le.infn.it

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail:pogreb@mi.ras.ru

3.1. Бинарные преобразования Беклунда	23
3.2. Резольвента	27
3.2.1. Ортогональное разложение $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$	27
3.2.2. Односолитонный случай	29
3.2.3. Солитон над ненулевым фоном	32
3.3. Решения Йоста	33
3.4. Билинейное представление резольвенты и ее свойства	36
3.5. Спектральные данные	41
3.6. Обратная задача	45
3.7. Поведение потенциала на больших расстояниях	47
4. Одевание односолитонного потенциала	49

1. ВВЕДЕНИЕ

С начала семидесятых годов известно [1, 2], что нестационарное уравнение Шредингера

$$(i\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u)\Phi = 0 \quad (1.1)$$

является вспомогательной линейной задачей, ассоциированной с уравнением Кадомцева–Петвиашвили [3], точнее говоря, с его версией, называемой уравнением КП,

$$(u_t - 6uu_{x_1} + u_{x_1x_1x_1})_{x_1} = 3u_{x_2x_2}, \quad (1.2)$$

для вещественной функции $u = u(x_1, x_2, t)$. Уравнение (1.2), будучи естественным обобщением уравнения КдФ, рассматривается как прототип $(2+1)$ -мерных интегрируемых уравнений. Многие авторы использовали уравнение КП (наряду с уравнением КПП) в качестве лаборатории для апробации новых теоретических методов, позволяющих исследовать специфические проблемы многомерных интегрируемых моделей. Общий обзор работ по теории этого уравнения и обширную библиографию см. в [4, 5].

Построение полной теории преобразования рассеяния для потенциала $u(x_1, x_2)$ оказалось весьма сложной задачей. Реальный прорыв состоял в обнаружении, что данная проблема сводится к решению нелокальной задачи Римана–Гильберта [6, 7]. Дополнительные трудности решения задачи Коши для уравнения КП, порождаемые его фактически неинволютивным характером, были последовательно разрешены в работах [8–10].

Характеристические уравнения для спектральных данных потенциала $u(x_1, x_2)$, убывающего на пространственной бесконечности, были предъявлены в [11]. В [12] было рассмотрено обобщение метода обратной задачи рассеяния на случай потенциалов, которые стремятся к нулю во всех направлениях, за исключением конечного числа. Однако там был рассмотрен лишь случай потенциалов, асимптотически симметричных по отношению к началу координат, что, в частности, исключает наличие солитонов. Что касается последних, то чисто N -солитонное решение было дано в [13, 14], где было показано, что солитоны в уравнении КП не локализованы на плоскости, а имеют на больших расстояниях волновой профиль. Проблема построения метода обратной задачи для

случая N солитонов на произвольном убывающем фоне остается нерешенной. К настоящему времени решена (см. [15]) лишь проблема построения спектрального преобразования N -солитонного решения с параметрами, возмущенными посредством процедуры одевания.

Наша задача — описание и исследование спектральных характеристик уравнения (1.1) для потенциалов u , обладающих нетривиальными пределами

$$u_{n,\pm}(x_1, x_2) = \lim_{x'_2 \rightarrow \pm\infty} u(x_1 + 2\mu_n(x_2 - x'_2), x'_2), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.3)$$

для N вещественных констант μ_n и обращающихся во всех других направлениях в ноль на больших расстояниях. В общей ситуации эти одномерные потенциалы должны быть произвольными в том смысле, что их спектральные преобразования (посредством стационарного уравнения Шредингера) могут содержать как дискретную, так и непрерывную части.

Возможность рассмотрения такой спектральной проблемы и соответствующего класса решений уравнения КПП в рамках метода обратной задачи важно с математической точки зрения, поскольку до сих пор в рамках обычного метода функционального анализа (см., например, [16]) данная задача не решена. В то же время подобное расширение класса допустимых потенциалов в (1.1) представляется крайне важным и с прикладной точки зрения, так как в общей ситуации двумерные солитоны не локализованы. В случае же уравнения Деви–Стюартсона, для которого были обнаружены локализованные солитоны, эволюция граничных значений так же определяется на основе обратной задачи рассеяния для уравнения КПП [17, 18] с потенциалом типа (1.3).

Задача построения спектральной теории для проблемы (1.1) в общем случае потенциалов, обладающих свойством (1.3), оказалась весьма сложной. Для преодоления этих трудностей в работах [19–22] был введен новый математический объект, зависящий от двух спектральных параметров, который был назван расширенной резольвентой (далее иногда для краткости будем называть ее просто резольвентой). Из этой резольвенты посредством различных редукций можно получить все необходимые величины метода обратной задачи, а именно: функции Грина, решения Йоста и спектральные данные, а также соотношения между ними. Она может рассматриваться как обобщение обычной резольвенты нестационарного оператора Шредингера. С нашей точки зрения расширенная резольвента представляет собой эффективный инструмент для построения необходимого обобщения метода обратной задачи. Так, в работах [22, 23] некоторые общие результаты для потенциалов типа (1.3) были получены при наложении на эти потенциалы ряда предположений, зачастую неявных. В данной работе общая схема резольвентного подхода представлена в разделе 2, где после обзора теории для быстроубывающих потенциалов мы показываем, как модифицируются интегральные уравнения для решений Йоста, спектральные данные и их характеристические уравнения в неубывающем случае.

В настоящее время мы не можем дать точного описания подкласса потенциалов типа (1.3), которые удовлетворяют предположениям, используемым в разделе 2. Более того, очевидно, что в общем случае структура спектральных данных может быть более

сложной. Соответственно наша работа преследует двоякую цель. С одной стороны, мы показываем, что данный подкласс не пуст и содержит нетривиальные потенциалы, а с другой, мы развиваем технику, необходимую для исследования наиболее общих потенциалов типа (1.3).

Потенциалы этого специального подкласса можно получать посредством преобразований Беклунда убывающих потенциалов. Как известно, простая и прозрачная техника таких преобразований развита в [24]. Однако нам требуется существенная модификация этой техники, ввиду необходимости контролировать аналитические свойства решений Ёоста, преобразование данных рассеяния и их свойства. В случае преобразований Беклунда, затрагивающих лишь непрерывный спектр, такая модификация была проведена в [25]. Подобно этому в разделе 3 мы рассматриваем потенциал $\tilde{u}$, получаемый посредством преобразования Беклунда, накладывающего солитон на гладкий убывающий потенциал u . Используя так называемое бинарное преобразование Беклунда (и соответствующее преобразование Дарбу), мы строим расширенную резольвенту, решения Ёоста и спектральные данные для потенциала $\tilde{u}$ и приводим подробное описание их свойств. Мы показываем, что эти объекты полностью соответствуют схеме, приведенной в разделе 2. В частности, мы доказываем, что решения Ёоста удовлетворяют модифицированным интегральным уравнениям, что они секционны аналитичны по спектральному параметру с разрывом на вещественной оси, и приводим выражение спектральных данных потенциала $\tilde{u}$ в терминах спектральных данных фонового потенциала u и солитонных параметров. Показано, что эти полученные спектральные данные удовлетворяют модифицированным характеристическим уравнениям раздела 2. Показано также, что расширенная резольвента для потенциала $\tilde{u}$ имеет в комплексной области спектрального параметра дополнительный (по сравнению со случаем убывающего потенциала) разрез. В заключение раздела 2 мы описываем асимптотическое поведение потенциала $\tilde{u}$ на больших расстояниях на x -плоскости. Мы доказываем, что этот потенциал действительно удовлетворяет условию (1.3) с $N = 1$ и $u_{1,+}(x_1, x_2) \equiv u_{1,-}(x_1, x_2) \equiv u_1(x_1 + 2\mu x_2)$, где $u_1(x_1)$ – стандартный одномерный солитонный потенциал стационарного уравнения Шредингера, а $\mu = \lambda_{\mathbb{R}}$, где λ – дискретное значение спектра, соответствующее солитону. Мы также показываем, что разность $\tilde{u}(x_1, x_2) - u_1(x_1 + 2\mu x_2)$ в пределе (1.3) при $\mu_n = \mu$ убывает как $1/x_2$. Этот эффект соответствует отмеченному в работе [3] искривлению плоских солитонов. Более того, оказывается, что асимптотическое поведение на больших расстояниях разности $\tilde{u} - u$ асимметрично по отношению к направлению $x_1 + 2\mu x_2 = \text{const}$. Точнее говоря, вдоль направлений в полуплоскости слева от $x_1 + 2\mu x_2 = \text{const}$ эта разность убывает экспоненциально, в то время как в другой полуплоскости она ведет себя как $(1/x_2')^3$ (или наоборот, в соответствии со знаком $\lambda_{\mathbb{S}}$). Мы приводим условия, улучшающие эти асимптотические поведения.

Потенциал $\tilde{u}$, построенный в разделе 3, конечно, не может рассматриваться как общий пример потенциала, удовлетворяющего условию (1.3) даже в случае $N = 1$. Более общий пример можно получить посредством возмущения потенциала $\tilde{u}$, т.е. в результате рассмотрения потенциала $\tilde{u} + u_2$, где u_2 – быстроубывающий двумерный потенци-

ал. набросок такого подхода дан в разделе 4 в рамках специальной версии процедуры одевания, адаптированной к методу расширенной резольвенты [26]. Прежде всего мы показываем, что полученный в разделе 3 дополнительный разрез расширенной резольвенты (и соответствующей функции Грина) характерен для двумерного случая и ведет при u_2 в общем положении к разрыву решений Йоста на прямой, соединяющей точки λ и $\bar{\lambda}$ на плоскости спектрального параметра. Этот дополнительный разрыв был обнаружен в работе [27] в специальном случае двумерного возмущения одномерного солитона. Здесь мы доказываем существование этого разрыва в более общей ситуации. Мы также приводим условие на возмущающий потенциал u_2 , эквивалентное его отсутствию.

Полученные результаты означают, что для общего потенциала, удовлетворяющего (1.3), необходимо вводить новые спектральные данные, описывающие эти дополнительные сингулярности решения Йоста, а также характеристические уравнения для этих спектральных данных. Приведенное в разделе 4 обсуждение показывает, что исследование свойств этих новых величин может быть проведено в два этапа. Во-первых, строится двумерная резольвента некоторого специального потенциала (такого как многосолитонный потенциал или произвольный одномерный убывающий потенциал). Во-вторых, исследуется потенциал, одетый с помощью быстроубывающего двумерного потенциала. Понятно, что уже обобщение со случая $N = 1$ на случай $N = 2$ в (1.3) может оказаться достаточно сложным. Решение этих проблем мы откладываем до следующей работы.

2. ОБЩАЯ СХЕМА РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ПОДХОДА

Развитие метода обратной задачи уже для случая двух пространственных переменных сталкивается с новыми проблемами, которые непосредственно связаны с многомерной природой теории. Для решения этих проблем в серии работ [12, 19–22] был предложен и развит новый подход, названный резольвентным, ввиду того что основным объектом теории является специальное расширение на область комплексных значений резольвенты лапласова оператора. Здесь мы излагаем основные аспекты этого метода и его обобщения на случай неубывающих потенциалов.

2.1. Основные определения

Основные математические объекты теории принадлежат шварцеву пространству обобщенных функций, зависящих от двух вещественных и двух комплексных переменных, соответственно $p = (p_1, p_2)$ и $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$. Для краткости это пространство обозначается $\mathcal{S}'_{p, \mathbf{q}}$. Комплексная переменная $\mathbf{q}$ играет роль спектральной переменной, а чтобы подчеркнуть ее комплексную природу, мы используем полужирный шрифт.

Для любого $A \in \mathcal{S}'_{p, \mathbf{q}}$, т.е. для любой обобщенной функции $A(p; \mathbf{q})$, мы определим в этом пространстве эрмитово сопряженный элемент $A^\dagger$ посредством следующей формулы:

$$A^\dagger(p; \mathbf{q}) = \overline{A(-p; p + \overline{\mathbf{q}})}, \quad (2.1)$$

а также обобщенную функцию $A^{(s)}$ – сдвиг по переменной $\mathbf{q}$,

$$A^{(s)}(p; \mathbf{q}) = A(p; \mathbf{q} + \mathbf{s}). \quad (2.2)$$

Для любых двух элементов A и B мы вводим их композицию AB как “сдвинутую” свертку

$$(AB)(p; \mathbf{q}) = \int dp' A(p - p'; \mathbf{q} + p') B(p'; \mathbf{q}), \quad (2.3)$$

если интеграл существует в смысле обобщенных функций. Эти операции удовлетворяют стандартным свойствам транзитивности и ассоциативности (конечно, в случае, когда определены соответствующие композиции) и, кроме того,

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (AB)^{(s)} = A^{(s)} B^{(s)}. \quad (2.4)$$

В пространство $\mathcal{S}'_{p, \mathbf{q}}$ мы погружаем “образы” всех дифференциальных операторов по следующему правилу. Пусть $\mathcal{A}(x; \partial_x)$ – некоторый дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{A}(x; \partial_x) = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2}(x) \partial_{x_1}^{n_1} \partial_{x_2}^{n_2}, \quad x = (x_1, x_2), \quad (2.5)$$

с ядром $\mathcal{A}(x; y) = \mathcal{A}(x; \partial_x) \delta(x - y)$. Тогда его образ $A(p; \mathbf{q})$ определен как

$$A(p; \mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx \int dy e^{i(p+\mathbf{q})x} \mathcal{A}(x, y) e^{-i\mathbf{q}y}, \quad (2.6)$$

где px и $\mathbf{q}x$ означают скалярные произведения, например $px = p_1 x_1 + p_2 x_2$. Явно мы имеем

$$A(p; \mathbf{q}) = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1, n_2}(p) (-i\mathbf{q}_1)^{n_1} (-i\mathbf{q}_2)^{n_2}, \quad (2.7)$$

где

$$a_{n_1, n_2}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx e^{ipx} a_{n_1, n_2}(x) \quad (2.8)$$

суть преобразования Фурье коэффициентных функций в (2.5).

Легко проверить, что это вложение согласовано с операциями, заданными над дифференциальными операторами. На самом деле образ произведения двух дифференциальных операторов есть композиция (по определению (2.3)) их образов, а эрмитово сопряжение (по определению (2.1)) есть образ эрмитово сопряженного оператора в стандартном смысле, т.е. дифференциального оператора

$$\mathcal{A}^\dagger(x; \partial_x) = \sum_{n_1, n_2} (-1)^{n_1+n_2} \partial_{x_1}^{n_1} \partial_{x_2}^{n_2} \overline{a_{n_1, n_2}(x)}.$$

Мы обозначаем образы $i\partial_{x_j}$ ($j = 1, 2$) как

$$Q_j(p, \mathbf{q}) = \mathbf{q}_j \delta(p), \quad j = 1, 2. \quad (2.9)$$

Тогда образ оператора (1.1) дается соотношением

$$L = L_0 - v, \quad (2.10)$$

где

$$L_0 = Q_2 - Q_1^2 \quad (2.11)$$

— образ дифференциального оператора (1.1) с потенциалом $u = 0$, а v — образ потенциала u , т.е. преобразование Фурье

$$v(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx e^{ipx} u(x). \quad (2.12)$$

Основной объект нашей теории — расширенная резольвента $M(p; \mathbf{q})$, которая есть обращение в смысле композиции (2.3) дифференциального оператора L , т.е.

$$ML = LM = I, \quad (2.13)$$

где

$$I(p; \mathbf{q}) = \delta(p) \quad (2.14)$$

— образ 1.

Чтобы пояснить смысл введенных объектов, выполним обратное фурье-преобразование

$$\mathcal{A}(x, y; \mathbf{q}_{\mathfrak{S}}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int d\mathbf{q}_{\mathfrak{R}} e^{-i(p + \mathbf{q}_{\mathfrak{R}})x} A(p; \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}_{\mathfrak{R}}y} \quad (2.15)$$

равенства (2.6) по переменным p и $\mathbf{q}_{\mathfrak{R}}$. Мы получаем

$$\mathcal{A}(x, y; \mathbf{q}_{\mathfrak{S}}) = \mathcal{A}(x; \partial_x + \mathbf{q}_{\mathfrak{S}}) \delta(x - y). \quad (2.16)$$

Поэтому образ $A(p; \mathbf{q})$ дифференциального оператора $\mathcal{A}(x; \partial_x)$ можно рассматривать как преобразование Фурье ядра дифференциального оператора, полученного из $\mathcal{A}(x; \partial_x)$ добавлением $\mathbf{q}_{\mathfrak{S}}$ к частной производной ∂_x .

Тогда $M(p; \mathbf{q})$ — преобразование Фурье фундаментального решения оператора, полученного из L сдвигом $\partial_x \rightarrow \partial_x + \mathbf{q}_{\mathfrak{S}}$. Такой сдвиг широко используется в литературе как промежуточный шаг для получения в пределе $\mathbf{q}_{\mathfrak{S}} \rightarrow 0$ регуляризованного фундаментального решения. В нашем подходе, напротив, существенно иметь дело с произвольными значениями $\mathbf{q}_{\mathfrak{S}}$, а тогда и $\mathbf{q}$, что позволяет исследовать, например, аналитические свойства $M(p; \mathbf{q})$ по $\mathbf{q}$.

Мы покажем ниже, что эта дополнительная свобода перемещения в комплексной плоскости позволяет получать из одной и той же величины, а именно из расширенной резольвенты $M(p; \mathbf{q})$, посредством специальных редукций все относящиеся к делу величины, включая решения Йоста и спектральные данные. Именно за счет этого факта исследование свойств этих величин и соотношений между ними становится более простым и прозрачным.

Для того чтобы обращение L из (2.13) было хорошо определено и единственно, мы потребуем, чтобы для любого $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ в общем положении резольвента $M(p; \mathbf{q})$ была по p обобщенной функцией умеренного роста, а по $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ — локально интегрируемой функцией. При этих условиях обращение произвольного невырожденного оператора с постоянными коэффициентами существует и единственно. В частности, обращение L_0 (см. (2.11)) есть

$$M_0(p; \mathbf{q}) = \frac{\delta(p)}{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2}. \quad (2.17)$$

Это обращение также и единственно, поскольку возможные дополнительные члены, пропорциональные $\delta(p)\delta(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2)$, исключены условием локальной интегрируемости.

Теперь два уравнения в (2.13), определяющие M как левый и правый обратные к L операторы, эквивалентны двум интегральным уравнениям

$$M = M_0 + M_0 v M, \quad M = M_0 + M v M_0. \quad (2.18)$$

Мы предполагаем, что существование и единственность их решения может быть доказана стандартными методами функционального анализа. Основное преимущество этих уравнений по сравнению со стандартными уравнениями, задающими решение Йоста, состоит в том, что они корректны также и для потенциалов u вида (1.3), а потому, как показано ниже, мы имеем хорошо определенную величину, которая может быть использована для нахождения решений Йоста и в неубывающем случае.

В данной работе мы рассматриваем конкретный оператор, заданный в (2.10), однако все предыдущие определения остаются неизменными для произвольного лаксова оператора L . Условие вещественности потенциала $u(x)$ в (1.1) эквивалентно условию эрмитовости в смысле (2.1) как L , так и M ,

$$L^\dagger = L, \quad M^\dagger = M. \quad (2.19)$$

Основным техническим инструментом для исследования резольвенты, как и в обычной спектральной теории операторов, является тождество Гильберта. Пусть M и M' суть обратные соответственно к L и L' . Тогда мы имеем

$$M' - M = -M'(L' - L)M. \quad (2.20)$$

Это тождество и его различные редуцированные версии играют решающую роль в теории. Например, аналитические свойства решений Йоста и характеристические уравнения для спектральных данных могут быть получены как следствия этого тождества Гильберта.

2.2. Решения Йоста и опережающие—запаздывающие решения для убывающих потенциалов

Рассмотрим сначала $v(p)$, которые являются преобразованиями Фурье гладких потенциалов $u(x)$, достаточно быстро убывающих на бесконечности. Для простоты мы называем такие потенциалы регулярными.

В силу (2.5) и (2.7) образ любого дифференциального оператора – полином по переменным $\mathbf{q}$, а потому все такие образы суть аналитические функции от $\mathbf{q}$. Это означает, что расширенная резольвента $M(p; \mathbf{q})$, определенная по (2.13), в некотором смысле близка к аналитической функции. Дефект аналитичности M описывается $\bar{\partial}$ -производными $\bar{\partial}_j M$,

$$(\bar{\partial}_j M)(p; \mathbf{q}) = \frac{\partial M(p; \mathbf{q})}{\partial \bar{\mathbf{q}}_j}, \quad j = 1, 2. \quad (2.21)$$

Для вычисления этих производных можно воспользоваться тождеством Гильберта (2.20), где в качестве L' следует выбрать сдвинутый (см. (2.2)) оператор $L^{(s)}$. Тогда также и $M' = M^{(s)}$ и вместо (2.20) мы имеем $M^{(s)} - M = -M^{(s)}(L^{(s)} - L)M$. Заметим, что по (2.2), (2.10) и (2.11)

$$L^{(s)} - L = L_0^{(s)} - L_0, \quad (2.22)$$

что обращается в ноль, когда $s \rightarrow 0$. С другой стороны, из (2.18) мы видим, что M имеет множители M_0 слева и справа, а из (2.17) – что произведение $M_0^{(s)} M_0$ не имеет предела в $S'_{p, \mathbf{q}}$ при $s \rightarrow 0$. Чтобы избежать этой неопределенности, мы, используя (2.22), переписываем (2.20) в терминах менее сингулярных (транкированных) величин ML_0 и $L_0 M$ как

$$M^{(s_2)} - M = (ML_0)^{(s_2)}(M_0^{(s_2)} - M_0)(L_0 M). \quad (2.23)$$

Тогда, скажем, для $\bar{\partial}$ -производной по $\mathbf{q}_2$ при $\mathbf{q}_{1\Im} \neq 0$ из формулы (2.17) мы получаем, что

$$\bar{\partial}_2 M = \pi |\nu\rangle \delta(L_0) \langle \omega|, \quad (2.24)$$

где

$$\delta(L_0)(p; \mathbf{q}) = \delta(p) \delta(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2)$$

и мы ввели $|\nu\rangle$, $\langle \omega| \in S'_{p, \mathbf{q}}$ как

$$|\nu\rangle(p; \mathbf{q}) = (ML_0)(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^2), \quad (2.25)$$

$$\langle \omega|(p; \mathbf{q}) = (L_0 M)(p; \mathbf{q}_1, -p_2 + (p_1 + \mathbf{q}_1)^2). \quad (2.26)$$

Таким образом, мы видим, что отклонение $M(p; \mathbf{q})$ от аналитичности полностью определяется специальными редукциями $|\nu\rangle$ и $\langle \omega|$ величин ML_0 и $L_0 M$. Эти редукции зависят лишь от одной спектральной переменной $\mathbf{q}_1$, а их преобразования Фурье по переменной p связаны со стандартными решениями Йоста. Чтобы показать это, введем величины

$$\chi(x, \mathbf{q}_1) = \int dp e^{-ipx} |\nu\rangle(p; \mathbf{q}_1), \quad \xi(x, \mathbf{q}_1) = \int dp e^{-ipx} \langle \omega|(p; \mathbf{q}_1 - p_1), \quad (2.27)$$

и пусть $\ell(\mathbf{k})$ означает специальный двумерный вектор

$$\ell(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}^2). \quad (2.28)$$

Тогда функции

$$\Phi(x, \mathbf{k}) = e^{-i\ell(\mathbf{k})x} \chi(x, \mathbf{k}), \quad \Psi(x, \mathbf{k}) = e^{i\ell(\mathbf{k})x} \xi(x, \mathbf{k}) \quad (2.29)$$

являются соответственно стандартным решением Йоста спектральной задачи (1.1) и решением дуальной задачи. В (2.29) спектральный параметр $\mathbf{q}_1$ был переобозначен как $\mathbf{k}$, что более соответствует стандартным обозначениям. Тот факт, что Φ и Ψ суть решения Йоста, можно проверить либо непосредственно, либо через интегральные уравнения, которым удовлетворяют $|\nu\rangle$ и $\langle\omega|$. В силу редукций (2.25) и (2.26) и интегральных уравнений (2.18) мы имеем

$$|\nu\rangle(p; \mathbf{q}) = \delta(p) + \frac{(v|\nu\rangle)(p; \mathbf{q})}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_1)}, \quad (2.30)$$

$$\langle\omega|(p; \mathbf{q}) = \delta(p) - \frac{(\langle\omega|v)(p; \mathbf{q})}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_1)}, \quad (2.31)$$

где

$$\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_1) = p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1). \quad (2.32)$$

Теперь, выполняя преобразования (2.27), мы выводим интегральные уравнения в x -пространстве,

$$\chi(x, \mathbf{k}) = 1 + \int dx' G_0(x - x', \mathbf{k}) u(x') \chi(x', \mathbf{k}), \quad (2.33)$$

$$\xi(x, \mathbf{k}) = 1 + \int dx' G_0(x' - x, \mathbf{k}) u(x') \xi(x', \mathbf{k}), \quad (2.34)$$

где

$$G_0(x - x', \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int dp' e^{-ipx + ip'x'} M_0(p - p'; p' + \ell(\mathbf{k})). \quad (2.35)$$

Это стандартные интегральные уравнения (см. [6, 7]), задающие решение Йоста и его дуальное. На самом деле

$$G_0(x, \mathbf{k}) = \frac{\text{sgn } x_2}{2\pi i} \int dp_1 \theta(-p_1 \mathbf{k}_{\Im} x_2) e^{-ip_1 x_1 - ip_1(p_1 + 2\mathbf{k})x_2} \quad (2.36)$$

— функция Грина нестационарного уравнения Шредингера с $u = 0$, т.е. она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(i\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - 2i\mathbf{k}\partial_{x_1})G_0(x - x'; \mathbf{k}) = \delta(x - x') \quad (2.37)$$

и аналитична по $\mathbf{k}$, когда $\mathbf{k}_{\Im} \neq 0$.

Подчеркнем, что это общий результат и что функция Грина $G(x, x', \mathbf{k})$ оператора L (2.10) при произвольном потенциале v задается через посредство $M(p; \mathbf{q})$ следующей формулой:

$$G(x, x', \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int dp' e^{-ipx + ip'x'} G(p, p', \mathbf{k}), \quad (2.38)$$

$$G(p, p', \mathbf{k}) = M(p - p'; p' + \ell(\mathbf{k})). \quad (2.39)$$

Отметим, наконец, что при $\mathbf{k}_{\Im} \neq 0$ (2.39) можно использовать для восстановления резольвенты по функции Грина. Действительно, мы имеем

$$M(p; \mathbf{q}) = G(p + \mathbf{q}_{\Re} - \Re \ell(\mathbf{k}), \mathbf{q}_{\Re} - \Re \ell(\mathbf{k}), \mathbf{k}), \quad (2.40)$$

где

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{q}_{2\Im}}{2\mathbf{q}_{1\Im}} + i\mathbf{q}_{1\Im}. \quad (2.41)$$

Однако данное свойство специфично для рассматриваемой спектральной задачи (1.1), а, скажем, для уравнения теплопроводности оно уже не выполняется.

Метод обратной задачи в двух измерениях можно строить исходя лишь из функций Грина, следуя, например, [28]. Однако предыдущее замечание показывает, что в общей ситуации функция Грина содержит меньше информации, чем резольвента, а тождество Гильберта, которое можно написать для функций Грина, является модельно зависимым, в отличие от тождества Гильберта (2.20) для резольвенты M , которое не зависит от рассматриваемого оператора L . Более того, прямое вычисление показывает, что дефект аналитичности функции Грина не выражается непосредственно в терминах решений Йоста подобно (2.24).

Отметим, что из интегральных уравнений для решений Йоста легко вывести следующее асимптотическое поведение при больших $\mathbf{q}_1$:

$$|\nu\rangle(p, \mathbf{q}) = \delta(p) + O(1/\mathbf{q}_1), \quad \langle\omega|(p, \mathbf{q}) = \delta(p) + O(1/\mathbf{q}_1), \quad (2.42)$$

и

$$p_1 |\nu\rangle(p, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2\mathbf{q}_1} v(p) + O(1/\mathbf{q}_1^2), \quad p_1 \langle\omega|(p, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\mathbf{q}_1} v(p) + O(1/\mathbf{q}_1^2), \quad (2.43)$$

что позволяет восстанавливать потенциал по решениям Йоста.

Резольвенту также можно использовать для получения естественным образом так называемых опережающих и запаздывающих решений нестационарного уравнения Шредингера, играющих существенную роль в теории (см. [6, 19–22, 29]). Выше был рассмотрен дефект аналитичности резольвенты $M(p; \mathbf{q})$ по отношению к $\mathbf{q}_2$ в случае, когда $\mathbf{q}_{1\Im} \neq 0$. Положим теперь $\mathbf{q}_{1\Im} = 0$ и вычислим $\bar{\partial}_2$ -производную от M . Оказывается, что она выражается через две другие редукции резольвенты:

$$|\nu_{a/r}\rangle(p; \mathbf{q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (ML_0)(p; \mathbf{q}_{1\Re}, \mathbf{q}_{1\Im}^2 \pm i\varepsilon), \quad (2.44)$$

$$\langle\omega_{a/r}|(p; \mathbf{q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (L_0 M)(p; \mathbf{q}_{1\Re}, -p_2 + (p_1 + \mathbf{q}_{1\Re})^2 \pm i\varepsilon). \quad (2.45)$$

Эти решения зависят лишь от вещественного параметра $\mathbf{q}_{1\Re}$ и не обладают аналитическим продолжением в комплексную плоскость. Их интегральные уравнения получаются соответствующим редуцированием (2.18) и имеют вид

$$|\nu_{a/r}\rangle(p; \mathbf{q}) = \delta(p) + \frac{(v|\nu_{a/r}\rangle)(p; \mathbf{q})}{p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_{1\Re}) \pm i0}, \quad (2.46)$$

$$\langle\omega_{a/r}|(p; \mathbf{q}) = \delta(p) - \frac{(\langle\omega_{a/r}|v)(p; \mathbf{q})}{p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_{1\Re}) \mp i0}. \quad (2.47)$$

В x -пространстве, вводя $\chi_{a/r}$ и $\xi_{a/r}$ (для вещественного k) по аналогии с (2.27), мы получаем интегральные уравнения

$$\chi_{a/r}(x, k) = 1 + \int dx' G_{0,a/r}(x - x', k) u(x') \chi_{a/r}(x', k), \quad (2.48)$$

$$\xi_{a/r}(x, k) = 1 + \int dx' G_{0,a/r}(x' - x, k) u(x') \xi_{a/r}(x', k), \quad (2.49)$$

где функции Грина заданы соотношениями

$$G_{0,a/r}(x, x', k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int dp' e^{-ipx + ip'x'} G_{0,a/r}(p, p', k), \quad (2.50)$$

$$G_{0,a/r}(p, p', k) = M_0(p - p'; p'_1 + k, p'_2 + k^2 \pm i0) \quad (2.51)$$

(ср. (2.38), (2.39) и (2.28)). В явном виде мы имеем

$$G_{0,a/r}(x, k) = -\frac{\theta(\pm x_2)}{2\sqrt{\pi|x_2|}} \exp\left(ix_1 k + ix_2 k^2 + i\frac{x_1^2}{4x_2} \pm i\frac{\pi}{4}\right). \quad (2.52)$$

Итак, мы видим, что опережающая и запаздывающая функции Грина также представляются как специальные значения резольвенты. Поскольку эти функции определены лишь на вещественной оси, то, конечно, резольвента не может быть восстановлена по ним. Кроме того, их нельзя выразить из (2.40) и (2.51) через посредство функции Грина решений Йоста, так как аргументы в правой части равенства (2.40) при указанной в (2.51) редукции обращаются в бесконечность.

Отметим, наконец, что в резольвентном подходе все типы решений естественно появляются в дуальных парах, как выше $|\nu\rangle$ и $\langle\omega|$, отвечающие шредингеровскому спектральному оператору (1.1) и его дуальному, соответственно. Эта дуальность играет существенную роль в дальнейшем, а использование введенных бра- и кет-обозначений помогает в ее правильном использовании. Следует, однако, предупредить, что эта дуальность не имеет ничего общего с дуальностью в теории векторных пространств. Действительно, в нашем контексте решения являются не векторами, а элементами пространства $S'_{p,q}$.

Можно легко показать, что эти дуальные пары решений Йоста и опережающих–запаздывающих решений связаны в силу их определений и соотношений (2.19) следующими условиями сопряжения:

$$|\nu\rangle^\dagger = \langle\omega|, \quad |\nu_{a/r}\rangle^\dagger = \langle\omega_{r/a}|. \quad (2.53)$$

Решения Йоста удовлетворяют дифференциальным уравнениям (их p -пространственной версии)

$$L|\nu\rangle = |\nu\rangle L_0, \quad \langle\omega|L = L_0\langle\omega|. \quad (2.54)$$

Опережающие–запаздывающие решения удовлетворяют тем же самым уравнениям, но лишь на вещественной оси $q_3 = 0$. Используя соотношения (2.27) и (2.29), можно легко проверить, что Φ действительно удовлетворяет (1.1).

Посредством специально редуцированной версии тождества Гильберта (2.20) можно вывести скалярные произведения

$$\langle \omega | \nu \rangle = I, \quad \langle \omega_{a/r} | \nu_{r/a} \rangle = I. \quad (2.55)$$

Отметим, наконец, что уравнения (2.24) для $\bar{\partial}_2$ -производной от M можно проинтегрировать с помощью формулы Коши–Грина. Принимая во внимание, что из (2.10)–(2.13) следует

$$\lim_{\mathbf{q}_2 \rightarrow \infty} \mathbf{q}_2 M(p; \mathbf{q}) = \delta(p), \quad (2.56)$$

мы получаем билинейное представление для резольвенты в терминах решений Йоста:

$$M = |\nu\rangle M_0 \langle \omega|. \quad (2.57)$$

Отсюда, снова используя (2.56), можно получить соотношения полноты

$$|\nu\rangle \langle \omega| = I. \quad (2.58)$$

Аналогичным образом можно получить и билинейное представление резольвенты при $\mathbf{q}_1 \Im = 0$ через посредство опережающих–запаздывающих решений,

$$M = |\nu_{a/r}\rangle M_0 \langle \omega_{r/a}|. \quad (2.59)$$

Несмотря на то что это представление справедливо лишь на вещественной оси $\mathbf{q}_1$, из него выводится соотношение полноты

$$|\nu_{a/r}\rangle \langle \omega_{r/a}| = I \quad (2.60)$$

для опережающих–запаздывающих решений. В силу (2.54) и (2.58) мы получаем билинейное представление для самого оператора Шредингера

$$L = |\nu\rangle L_0 \langle \omega|. \quad (2.61)$$

Билинейные представления (2.57) и (2.61) можно рассматривать как операторную реализацию хорошо известной процедуры одевания [2]. Они играют существенную роль при исследовании аналитических свойств резольвенты $M(p; \mathbf{q})$ по $\mathbf{q}_1$. В дальнейшем будет видно, что таким способом мы естественно приходим к рассмотрению специальных “редукций второго уровня” резольвенты, что дает спектральные данные для задачи (1.1). Но сначала рассмотрим модификацию изложенной выше конструкции, позволяющую иметь дело с потенциалами типа (1.3).

2.3. Решения Йоста и опережающие–запаздывающие решения для неубывающих потенциалов

В дальнейшем, чтобы отличать этот случай от случая убывающего потенциала, основные математические объекты (потенциал, резольвента и спектральные данные) отмечаются тильдой.

Если потенциал $\tilde{u}(x)$ не убывает по некоторым направлениям, как в (1.3), т.е. $\tilde{v}$ – сингулярная обобщенная функция, то (см. также ниже) стандартные интегральные уравнения (2.33) и (2.34) становятся бессмысленными даже в простейшем случае $\tilde{u}(x) = u(x_1)$. С другой стороны, интегральные уравнения (2.18), определяющие резольвенту, остаются хорошо определенными, как это было подробно показано в [22]. В частности, для одномерного потенциала $u(x_1)$ мы имеем

$$\widetilde{M}(p; \mathbf{q}) = \delta(p_2) M_{\mathbf{q}_2}(p_1; \mathbf{q}_1), \quad (2.62)$$

где $M_{\mathbf{z}}(p_1; \mathbf{q}_1)$ – резольвента одномерного оператора Штурма–Лиувилля $\partial_{x_1}^2 - u(x_1) + z$. Однако свойства резольвенты в неубывающем случае по сравнению с убывающим существенно изменяются. Например, редукции, указанные в (2.25) и (2.26), не существуют, поскольку в этом случае функции $(ML_0)(p; \mathbf{q})$ и $(L_0M)(p; \mathbf{q})$ разрывны именно в точках редуцирования. Подробное исследование (см. [22]) показывает, что необходимо выбрать специальный путь подхода к этим предельным точкам, а именно, что решения Йоста в неубывающем случае должны определяться посредством следующих предельных процедур:

$$|\tilde{\nu}\rangle(p; \mathbf{q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\widetilde{M}L_0)(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^2 + \varepsilon), \quad (2.63)$$

$$\langle \tilde{\omega}|(p; \mathbf{q}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (L_0\widetilde{M})(p; \mathbf{q}_1, -p_2 + (p_1 + \mathbf{q}_1)^2 + \varepsilon), \quad (2.64)$$

где ε вещественно и положительно. Посредством редукций, указанных в этих формулах, мы выводим из (2.18) интегральные уравнения

$$|\tilde{\nu}\rangle(p; \mathbf{q}) = \delta(p) + \frac{1}{p_1 + i0\mathbf{q}_1\mathfrak{S}} \left(\frac{p_1 \langle \tilde{\nu}|\tilde{\nu}\rangle(p; \mathbf{q})}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_1)} \right), \quad (2.65)$$

$$\langle \tilde{\omega}|(p; \mathbf{q}) = \delta(p) - \frac{1}{p_1 - i0\mathbf{q}_1\mathfrak{S}} \left(\frac{p_1 \langle \tilde{\omega}|\tilde{\nu}\rangle(p; \mathbf{q})}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_1)} \right). \quad (2.66)$$

Здесь величину

$$\frac{p_1}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_1)} \equiv \frac{p_1}{p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1)}$$

(ср. (2.32)) следует рассматривать как цельный объект. Этот объект допускает хорошо определенные сужения на прямые линии $p_2 = 2\mu_n p_1$, а потому допускает умножение на $\tilde{\nu}|\tilde{\nu}\rangle$ и $\langle \tilde{\omega}|\tilde{\nu}$, для которых объединение таких линий дает сингулярный носитель. Поэтому если произведение обобщенных функций выполняется в указанном порядке, то правые

части этих интегральных уравнений хорошо определены. Отметим, что для регулярных $\tilde{v}$ скобки во втором члене правой части можно открыть, обобщенная функция перед ними и множитель p_1 в числителе сокращаются и мы возвращаемся, как и следовало ожидать, к интегральным уравнениям (2.30) и (2.31). Заметим, однако, что конструкция, основанная на процедуре одевания (см. раздел 4), показывает, что аналитические свойства $|\tilde{\nu}\rangle$ и $\langle\tilde{\omega}|$ в комплексной плоскости $\mathbf{q}_1$ могут быть значительно более сложными, чем в убывающем случае, и что в дополнение к обычному разрезу на вещественной оси может быть другой разрез, порождаемый присутствием солитонов.

Чтобы продемонстрировать явно отличие интегральных уравнений (2.65) и (2.66) от обычного случая потенциалов $u(x)$, исчезающих на больших расстояниях, перепишем их в x -пространстве через посредство величины $\tilde{\chi}(x, \mathbf{k})$ и $\tilde{\xi}(x, \mathbf{k})$, определенных в (2.27). Производя преобразование Фурье уравнений (2.65) и (2.66), получаем

$$\tilde{\chi}(x, \mathbf{k}) = 1 + \int_{-\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}\infty}^{x_1} dy_1 \int dx' \partial_{y_1} G_0(y_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \mathbf{k}) \tilde{u}(x') \tilde{\chi}(x', \mathbf{k}), \quad (2.67)$$

$$\tilde{\xi}(x, \mathbf{k}) = 1 + \int_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}\infty}^{x_1} dy_1 \int dx' \partial_{y_1} G_0(x'_1 - y_1, x'_2 - x_2, \mathbf{k}) \tilde{u}(x') \tilde{\xi}(x', \mathbf{k}), \quad (2.68)$$

где $G_0(x, \mathbf{k})$ дано в (2.36).

В силу (2.36) легко видеть, что

$$G_0(x, \mathbf{k}) = \frac{\text{sgn } \mathbf{k}_{\mathfrak{S}}}{4\pi \mathbf{k} x_2} + o(|x_2|^{-1}), \quad x_2 \rightarrow \infty, \quad (2.69)$$

а потому эти интегральные уравнения в случае потенциалов с нетривиальными пределами в (1.3) имеют хорошо определенные ядра, поскольку интегрирование по x'_2 выполняется после дифференцирования по y_1 . В одномерном случае, т.е. когда $\tilde{u}(x) = u(x_1)$, как $\tilde{\chi}(x, \mathbf{k})$, так и $\tilde{\xi}(x, \mathbf{k})$ не зависят от x_2 . Тогда $\partial_{x_1} G_0$ можно явно проинтегрировать по x'_2 , что дает

$$\int dx'_2 \partial_{x_1} G_0(x - x', \mathbf{k}) = \text{sgn } \mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \theta(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}(x_1 - x'_1)) e^{2i\mathbf{k}(x_1 - x'_1)}. \quad (2.70)$$

Это сводит (2.67) к стандартному интегральному уравнению для решения Йоста стационарного одномерного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом $u(x_1)$.

С другой стороны, пределы (2.44) и (2.45), задающие опережающие и запаздывающие решения, хорошо определены также и в случае неубывающего потенциала и интегральные уравнения (2.46)–(2.49) не требуют никакой регуляризации. Это обусловлено тем фактом, что функции Грина $G_{0,a/r}$ интегрируемы по x_2 . На самом деле по формуле (2.52) мы имеем

$$\int dx_2 G_{0,a/r}(x, k) = \frac{\mp i}{2|k|} e^{i(kx_1 \pm |kx_1|)}, \quad (2.71)$$

что дает хорошо определенную обобщенную функцию от x_1 при всех $k \neq 0$. В этой связи отметим, что в случае общего положения опережающие и запаздывающие решения для потенциала типа (1.3) обращаются в ноль при $k = 0$.

Можно проверить, что свойства (2.53) по отношению к сопряжению, равно как и дифференциальные уравнения (2.54), выполняются для решений обоих типов. Также остается справедливым и асимптотическое поведение решений Ёоста, указанное в (2.42) и (2.43). Сохраняются в виде (2.55) и скалярные произведения опережающих и запаздывающих решений, однако скалярные произведения решений Ёоста модифицируются, и мы получаем

$$\langle \tilde{\omega} | \tilde{\nu} \rangle = \tilde{T}^{-1}, \quad (2.72)$$

где

$$\tilde{T}^{-1}(p; \mathbf{q}) = \delta(p) - 2i\pi \operatorname{sgn} \mathbf{q}_1 \delta(p_1) \left(\frac{p_1 (\tilde{\nu} | \tilde{\nu}) (p; \mathbf{q}_1)}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_1)} \right). \quad (2.73)$$

Здесь снова произведение обобщенных функций следует выполнять в указанном порядке. Если потенциал $\tilde{v}$ регулярен, то скобки в правой части равенства (2.73) можно раскрыть и тогда $\tilde{T} = I$. В сингулярном случае, как показано в [22], этот член в скобках пропорционален $\delta(p_2)$, а потому

$$\tilde{T}(p; \mathbf{q}) = \tilde{t}(\mathbf{q}_1) \delta(p), \quad (2.74)$$

где $\tilde{t}(\mathbf{q}_1)$ можно назвать коэффициентом прохождения. Он аналитичен в верхней и нижней полуплоскостях переменной $\mathbf{q}_1$ и имеет разрыв на вещественной оси. Этот коэффициент представляет собой одно из спектральных данных, которые мы описываем в разделе 2.5, и обобщает на двумерный случай обычный одномерный коэффициент прохождения.

Вместо рассмотрения в (2.63) и (2.64) пределов $(\tilde{M} L_0)(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^2 + \varepsilon)$ и $(L_0 \tilde{M})(p; \mathbf{q}_1, -p_2 + (p_1 + \mathbf{q}_1)^2 + \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, можно рассмотреть и пределы с другой стороны, $\varepsilon \rightarrow -0$. Легко получить, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} (\tilde{M} L_0)(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^2 + \varepsilon) = (|\tilde{\nu}\rangle \tilde{T})(p; \mathbf{q}), \quad (2.75)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} (L_0 \tilde{M})(p; \mathbf{q}_1, -p_2 + (p_1 + \mathbf{q}_1)^2 + \varepsilon) = (\tilde{T} \langle \tilde{\omega} |)(p; \mathbf{q}). \quad (2.76)$$

Интегральные уравнения, которым удовлетворяют $|\tilde{\nu}\rangle \tilde{T}$ и $\tilde{T} \langle \tilde{\omega} |$, отличаются от (2.65) и (2.66) лишь знаком $i0$ -слагаемых в знаменателях, а в x -пространстве — лишь знаком бесконечных пределов интегрирования по y_1 в (2.67) и (2.68). Поскольку $\tilde{T}$ коммутирует в смысле композиции (2.3) с L_0 , такие редуцированные значения подобно $|\tilde{\nu}\rangle$ и $\langle \tilde{\omega} |$ удовлетворяют (2.54) и являются решениями спектральной проблемы (1.1) и соответственно дуальной к ней.

Наконец, подчеркнем, что в случае неубывающего потенциала проблема получения билинейного представления типа (2.57) для резольвенты, равно как и соотношений полноты, оказывается существенно более сложной. В данной работе мы рассматриваем эту проблему в специальном случае солитона на произвольном убывающем фоне. При этом мы рассматриваем как специальную суперпозицию, задаваемую преобразованием Беклунда, так и более общую, получаемую посредством процедуры одевания.

2.4. Спектральные данные для убывающих потенциалов

Рассмотрим сначала случай регулярного потенциала v . Решения Йоста суть аналитические функции $\mathbf{q}_1$ с разрезом по вещественной оси, и мы обозначим их значения по обеим сторонам вещественной оси как $|\nu^\pm\rangle$, $\langle\omega^\pm| \in \mathcal{S}'_{p,\mathbf{q}}$, где

$$|\nu^\pm\rangle(p; \mathbf{q}) = \lim_{\mathbf{q}_{1\Im} \rightarrow \pm 0} |\nu\rangle(p; \mathbf{q}), \quad (2.77)$$

$$\langle\omega^\pm|(p; \mathbf{q}) = \lim_{\mathbf{q}_{1\Im} \rightarrow \pm 0} \langle\omega|(p; \mathbf{q}). \quad (2.78)$$

Обычно спектральные данные связывают эти значения. Однако, как оказывается, удобнее определить спектральные данные как операторы в пространстве $\mathcal{S}'_{p,\mathbf{q}}$, которые переводят решения Йоста в опережающие и запаздывающие решения. Эти операторы могут быть вычислены посредством билинейного представления (2.57) для резольвенты. Умножая (2.57) справа на L_0 , мы в силу (2.54) и (2.58) получаем

$$M L_0 = I + |\nu\rangle M_0 \langle\omega|v.$$

Выполняя специальные редукции (2.25) и (2.44) этого уравнения, определяющие соответственно решения Йоста и опережающие–запаздывающие решения, мы получаем

$$|\nu^\sigma\rangle(p; \mathbf{q}) = \delta(p) + \int dp' \frac{|\nu^\sigma\rangle(p-p'; \mathbf{q}+p') (\langle\omega^\sigma|v)(p'; \mathbf{q})}{\mathcal{P}(p'; \mathbf{q}_{1\Re}) - i\sigma p'_1 0}, \quad (2.79)$$

$$|\nu_{a/r}\rangle(p; \mathbf{q}) = \delta(p) + \int dp' \frac{|\nu^\sigma\rangle(p-p'; \mathbf{q}+p') (\langle\omega^\sigma|v)(p'; \mathbf{q})}{\mathcal{P}(p'; \mathbf{q}_{1\Re}) \pm i0}, \quad (2.80)$$

где $\sigma = +, -$, а $\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})$ дано в (2.32). На самом деле из исходных интегральных уравнений (2.18), определяющих резольвенту, следует, что $M(p; \mathbf{q})$ при $\mathbf{q}_{2\Im} \neq 0$ является непрерывной функцией от $\mathbf{q}_{1\Im}$ в окрестности нуля. Поэтому при вычислении (2.57) при $\mathbf{q}_{1\Im} = 0$ не важно, с какой стороны подходить к вещественной оси – сверху или снизу, а потому в правой части (2.80) можно выбирать и $\sigma = +$, и $\sigma = -$. Аналогичные уравнения имеют место и для $\langle\omega^\sigma|$ и $\langle\omega_{a/r}|$.

Рассматривая разности $|\nu^\sigma\rangle - |\nu_{a/r}\rangle$ и $\langle\omega^\sigma| - \langle\omega_{a/r}|$, мы получаем

$$|\nu_{a/r}\rangle = |\nu^\sigma\rangle (R_\pm^\sigma)^\dagger, \quad \langle\omega_{a/r}| = R_\mp^\sigma \langle\omega^\sigma|, \quad \sigma = +, -, \quad (2.81)$$

где

$$R_\pm^\sigma(p; \mathbf{q}) = \delta(p) + r_\pm^\sigma(p; \mathbf{q}) \quad (2.82)$$

и

$$r_\pm^\sigma(p; \mathbf{q}) = \pm 2i\pi\theta(\pm\sigma p_1)\delta(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}))(v|\nu^\sigma)(p; \mathbf{q}). \quad (2.83)$$

Таким образом, спектральные данные $R_\pm^\sigma$ определяются по резольвенте как специальные редукции второго уровня. В терминах величин в x -пространстве в силу (2.12) и (2.27) мы получаем

$$r_\pm^\sigma(p; \mathbf{q}) = \frac{\mp 1}{2i\pi}\theta(\pm\sigma p_1)\delta(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})) \int dx e^{ipx} u(x) \chi^\sigma(x, \mathbf{q}_{1\Re}), \quad (2.84)$$

т.е. знакомое определение [9–11] спектральных данных в случае убывающего потенциала.

Характеристические уравнения на спектральные данные (2.82) могут быть получены посредством применения указанных редукций к тождеству Гильберта, которому удовлетворяет резольвента, либо на основе билинейного представления резольвенты. Особенно наглядно они записываются с использованием введенного в (2.3) закона композиции, а именно

$$(R_{\pm}^{-\sigma})^{\dagger} R_{\pm}^{\sigma} = I, \quad (2.85)$$

$$R_{\pm}^{\sigma} (R_{\pm}^{-\sigma})^{\dagger} = I, \quad (2.86)$$

$$(R_{+}^{\sigma})^{\dagger} R_{+}^{\sigma} = (R_{-}^{\sigma})^{\dagger} R_{-}^{\sigma}, \quad (2.87)$$

где снова $\sigma = +, -$. Первое равенство позволяет нам обратить (2.81),

$$|\nu^{\sigma}\rangle = |\nu_{a/r}\rangle R_{\pm}^{\sigma}, \quad \langle\omega^{\sigma}| = (R_{\mp}^{-\sigma})^{\dagger} \langle\omega_{a/r}|. \quad (2.88)$$

Следовательно, можно ввести альтернативные спектральные данные

$$F^{\sigma} = (R_{\pm}^{-\sigma})^{\dagger} R_{\pm}^{-\sigma}, \quad (2.89)$$

которые связывают решения Ёоста, вычисленные по разные стороны вещественной оси, следующим образом:

$$|\nu^{\sigma}\rangle = |\nu^{-\sigma}\rangle F^{-\sigma}, \quad \langle\omega^{\sigma}| = F^{\sigma} \langle\omega^{-\sigma}|, \quad \sigma = +, -. \quad (2.90)$$

Эти спектральные данные удовлетворяют характеристическим уравнениям

$$(F^{\pm})^{\dagger} = F^{\pm}, \quad F^{-} = (F^{+})^{-1}, \quad (2.91)$$

к которым следует добавить требование, что $F^{\pm}$ должно быть разложимо в произведение (2.89) двух треугольных операторов (2.82), см. [6, 11, 12].

Наконец, отметим, что величину $v|\nu^{\sigma}\rangle$, входящую в определение спектральных данных, в силу “дифференциального” уравнения (2.54), которому удовлетворяет решение Ёоста, можно записать в виде

$$(v|\nu^{\sigma}\rangle)(p; \mathbf{q}) = \mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})|\nu^{\sigma}\rangle(p; \mathbf{q}), \quad (2.92)$$

явно показывающем, что спектральные данные даются как “вычет” решения Ёоста на поверхности $\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) = 0$. Конечно, благодаря (2.53) спектральные данные могут быть записаны и в терминах дуальных решений Ёоста $\langle\omega|$. Отметим также, что в силу интегрального уравнения (2.30) для решения Ёоста мы имеем

$$R_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) = |\nu^{\sigma}\rangle(p; \mathbf{q}) - \frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})|\nu^{\sigma}\rangle)(p; \mathbf{q})}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) \pm i0}, \quad (2.93)$$

где произведение обобщенных функций следует выполнять в указанном порядке.

В заключение этого раздела отметим, что в случае вещественного потенциала, когда время фиксировано, рассмотренный выше резольвентный подход не дает ничего существенно нового по сравнению со стандартным. Однако при включении времени полезность резольвентного подхода становится очевидной. Фактически только на этой основе (подробнее см. [10]) оказалось возможным исследовать сингулярное поведение при начальном времени $t = 0$ решения u уравнения КПП и решений Йоста, появление при $t \neq 0$ “связей” на u и медленное спадание при $x_1 \rightarrow t\infty$.

2.5. Спектральные данные для неубывающих потенциалов

В предыдущем разделе мы дали детальное описание случая убывающих потенциалов u , чтобы подчеркнуть те изменения, которые необходимы для обобщения этих определений на случай неубывающих потенциалов $\tilde{u}$. Основная проблема здесь в том, что билинейное представление резольвенты типа (2.57) до сих пор не известно в общей ситуации. Так, в [23] были приведены аргументы в пользу того, что альтернативное определение спектральных данных, указанное в (2.93), можно модифицировать следующим образом:

$$\tilde{R}_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) = (|\tilde{\nu}^{\sigma}\rangle \tilde{T}^{\sigma})(p; \mathbf{q}) - \frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\mathbb{R}})(|\tilde{\nu}^{\sigma}\rangle \tilde{T}^{\sigma})(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\mathbb{R}}) \pm i0}. \quad (2.94)$$

Здесь $\tilde{T}^{\pm}$ суть предельные значения $\tilde{T}$ (ср. (2.73)) на двух сторонах вещественной оси комплексной $\mathbf{q}_1$ -плоскости. Они введены для компенсации возможных особенностей при $\mathbf{q}_{1\mathbb{R}} = \mu_n$, возникающих вследствие сингулярностей $\tilde{v}(p)$ вдоль прямых $p_2 - 2\mu_n p_1 = 0$. Используя (2.92), равенство (2.94) можно переписать как

$$\tilde{R}_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) = |\tilde{\nu}^{\sigma}\rangle(p; \mathbf{q}) \tilde{t}^{\sigma}(\mathbf{q}_1) - \frac{(\tilde{v}|\tilde{\nu}^{\sigma}\rangle)(p; \mathbf{q}) \tilde{t}^{\sigma}(\mathbf{q}_1)}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\mathbb{R}}) \pm i0}. \quad (2.95)$$

Теперь для того чтобы получить спектральные данные исходя из тождества Гильберта, следует воспользоваться редукциями (2.63) и (2.64) резольвенты $\tilde{M}$ вместо (2.25) и (2.26). Этот вывод требует точного знания сингулярного поведения решений Йоста и опережающих–запаздывающих решений для случая потенциалов типа (1.3) и еще не закончен. В настоящей работе мы рассмотрим сначала потенциал $\tilde{u}(x)$, получающийся наложением солитона путем преобразования Беклунда на быстроубывающий на бесконечности потенциал $u(x)$. В этом случае мы можем вычислить резольвенту, решения Йоста и спектральные данные для $\tilde{u}(x)$. При этом преобразованные решения Йоста все еще секционны аналитичны с разрезом вдоль вещественной оси комплексной спектральной плоскости. Поэтому спектральные данные $\tilde{R}_{\pm}^{\sigma}$ для $\tilde{u}(x)$ действительно могут быть определены по (2.94), и мы доказываем, что они удовлетворяют модифицированным характеристическим уравнениям

$$(\tilde{R}_{\pm}^{-\sigma})^{\dagger} \tilde{R}_{\pm}^{\sigma} = \tilde{T}^{\sigma}, \quad (2.96)$$

$$\tilde{R}_{\pm}^{\sigma} (\tilde{T}^{\sigma})^{-1} (\tilde{R}_{\pm}^{-\sigma})^{\dagger} = I, \quad (2.97)$$

$$(\tilde{R}_{+}^{\sigma})^{\dagger} \tilde{R}_{+}^{\sigma} = (\tilde{R}_{-}^{\sigma})^{\dagger} \tilde{R}_{-}^{\sigma}. \quad (2.98)$$

В силу определения (2.94) уравнения (2.81) сохраняют свой вид, а соотношения (2.88) превращаются в следующие:

$$|\dot{\nu}^\sigma\rangle\tilde{T}^\sigma = |\dot{\nu}_{a/r}\rangle\tilde{R}_\pm^\sigma, \quad \tilde{T}^\sigma\langle\tilde{\omega}^\sigma| = (\tilde{R}_\mp^\sigma)^\dagger\langle\tilde{\omega}_{a/r}|. \quad (2.99)$$

Подобно убывающему случаю можно ввести альтернативные спектральные данные

$$\tilde{F}^\sigma = (\tilde{R}_\pm^\sigma)^\dagger\tilde{R}_\pm^\sigma. \quad (2.100)$$

При этом соотношения (2.90) и (2.91) модифицируются следующим образом:

$$|\dot{\nu}^\sigma\rangle\tilde{T}^\sigma = |\dot{\nu}^{-\sigma}\rangle\tilde{F}^{-\sigma}, \quad \tilde{T}^\sigma\langle\tilde{\omega}^\sigma| = (\tilde{F}^\sigma)^\dagger\langle\tilde{\omega}^{-\sigma}|, \quad (2.101)$$

$$\tilde{F}^\sigma = \tilde{T}^\sigma(\tilde{F}^{-\sigma})^{-1}\tilde{T}^{-\sigma}, \quad (2.102)$$

в то время как сохраняется самосопряженность $\tilde{F}^\sigma$.

Более того, новые спектральные данные можно выразить через посредство различных элементов, участвующих в композиции конечного потенциала $\tilde{u}$, как

$$\tilde{R}_\pm^\pm = w_\pm R_\pm^\pm \tilde{T}^\pm, \quad \tilde{R}_\pm^\mp = w_\pm R_\pm^\mp, \quad (2.103)$$

где

$$w_\pm(p; \mathbf{q}) = \delta(p) \left(1 - \theta(\pm(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)) \frac{2i\kappa}{\mathbf{q}_{1\Re} - \mu + i\kappa} \right), \quad (2.104)$$

а $R_\pm^\sigma$ суть спектральные данные $u(x)$, которые удовлетворяют характеристическим уравнениям (2.85)–(2.87). Параметр κ выбран положительным, что объясняет асимметрию в формулах (2.103). Следует также ввести дополнительную вещественную константу, соответствующую солитону, по аналогии с нормирующими константами в одномерном случае.

3. НАЛОЖЕНИЕ СОЛИТОНА НА УБЫВАЮЩИЙ ФОНОВЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Как уже отмечалось, анализ свойств решений интегральных уравнений (2.18) и (2.65), (2.66), определяющих резольвенту и решения Йоста в случае потенциалов типа (1.3), представляет собой весьма сложную задачу. Чтобы получить некоторый опыт в достаточно общей ситуации, мы рассматриваем здесь потенциал, описывающий солитон на произвольном фоне, полученный путем преобразования Беклунда произвольного потенциала, исчезающего на больших расстояниях на x -плоскости.

Поскольку нас интересует соответствующее решение Йоста, то естественно использовать процедуру Дарбу, которая одновременно дает преобразование Беклунда для потенциала и преобразование решений уравнения (1.1). Однако преобразование Дарбу решения Йоста в общей ситуации не является решением Йоста и не обязано обладать правильным поведением при больших x . Поэтому формальная схема работы [24], основанная на комбинированном использовании решений спектральной задачи и ее дуальной

(так называемые бинарные преобразования), должна быть дополнена тщательным анализом, позволяющим на каждом шаге контролировать математическую природу рассматриваемых объектов. Для нас удобно следовать подходу, близкому к работе [25], где были исследованы преобразования Дарбу непрерывного спектра убывающего потенциала. На этом пути мы получаем также явную формулу для резольвенты, исследование аналитических свойств которой существенно для дальнейшего обобщения этих результатов на случай возмущенных односолитонных решений.

3.1. Бинарные преобразования Беклунда

Мы проводим построение в пространстве $\mathcal{S}'_{p,\mathbf{q}}$, где произведения и коммутаторы определены исходя из закона композиции (2.3). В частности, $A^{-1}(p; \mathbf{q})$ означает обращение $A(p; \mathbf{q})$ в соответствии с этим законом композиции, а вовсе не $1/A(p; \mathbf{q})$. Если $\mathcal{A}(x)$ – обобщенная функция, для которой $\log \mathcal{A}(x)$ – также хорошо определенная обобщенная функция, то в пространстве $\mathcal{S}'_{p,\mathbf{q}}$ мы вводим LOG-функцию ее образа $A(p; \mathbf{q}) \equiv A(p)$ (т.е. преобразования Фурье) равенством

$$(\text{LOG } A)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx e^{ipx} \log \mathcal{A}(x). \quad (3.1)$$

Приемлемость обозначения LOG вытекает из того, что выполнено характеристическое свойство: $\text{LOG } A_1 + \text{LOG } A_2 = \text{LOG } (A_1 A_2)$. Отметим также, что если оператор A имеет обратный, то

$$[Q_1, \text{LOG } A] = [Q_1, A]A^{-1}. \quad (3.2)$$

Пусть потенциал $v(p)$ нестационарного оператора Шредингера L , введенный в (2.10), (2.11), регулярен, т.е. является преобразованием Фурье потенциала $u(x)$, быстроубывающего на больших расстояниях на x -плоскости. Новый потенциал $v'(p)$ и соответствующий нестационарный оператор Шредингера L' могут быть порождены калибровочным преобразованием B :

$$L'B = BL. \quad (3.3)$$

В частности, простые B вида

$$B = Q_1 + \alpha, \quad \alpha(p; \mathbf{q}) \equiv \alpha(p), \quad (3.4)$$

обычно называются элементарными преобразованиями Беклунда [30]. Любые другие преобразования можно получить посредством итеративного применения преобразований такого типа и им обратных. Без потери общности (подробнее см. в [25]) можно представить α в виде

$$\alpha = -[Q_1, \text{LOG } \beta] - \lambda I, \quad (3.5)$$

где $\beta(p; \mathbf{q}) \equiv \beta(p)$ и спектральный параметр λ выбран в верхней полуплоскости,

$$\lambda = \mu + i\kappa, \quad \kappa > 0. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), мы получаем новый потенциал

$$v' = v + 2[Q_1, [Q_1, \text{LOG } \beta]] \quad (3.7)$$

и уравнение для β

$$L\beta + 2[Q_1, \beta](Q_1 - \lambda I) = \beta L_0. \quad (3.8)$$

Сравнивая это уравнение с дифференциальным уравнением (2.54), видим, что β можно выбрать равным значению решения Йоста исходного потенциала при $\mathbf{q}_1 = \lambda$, т.е.

$$\beta\delta(Q_1 - \lambda I) = |\nu\rangle\delta(Q_1 - \lambda I). \quad (3.9)$$

Здесь мы ввели

$$(\delta(Q_1 - \lambda I))(p; \mathbf{q}) = \delta(p)\delta(\mathbf{q}_1 - \lambda), \quad (3.10)$$

так что

$$\beta(p) = |\nu\rangle(p; \lambda). \quad (3.11)$$

Тогда преобразование Беклунда (3.4) сводится к

$$B = \beta(Q_1 - \lambda I)\beta^{-1}. \quad (3.12)$$

Как было показано в [24], условие, что оба потенциала u и u' вещественны (или, что то же самое, что как v , так и v' самосопряжены), радикальным образом сужает класс потенциалов, к которым применимы элементарные преобразования Беклунда, до фактически лишь одномерных (см. [25]). Для получения действительно двумерных самосопряженных потенциалов необходимо, как предложено в [24], рассмотреть композицию элементарного преобразования Беклунда и его обращения с измененными параметрами, что дает результирующее преобразование Беклунда, называемое бинарным.

Итак, пусть $\tilde{L}$ — другой L -оператор с потенциалом $\tilde{v}$ и пусть по аналогии с (3.3)

$$L'\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{L}, \quad (3.13)$$

где L' тот же, что и выше, а $\tilde{B}$ типа (3.12), т.е.

$$\tilde{B} = Q_1 - [Q_1, \text{LOG } \tilde{\beta}] - \tilde{\lambda}I \quad (3.14)$$

с некоторым другим значением спектрального параметра $\tilde{\lambda}$. Тогда $\tilde{\beta}$ по аналогии с (3.8) удовлетворяет уравнению

$$\tilde{L}\tilde{\beta} + 2[Q_1, \tilde{\beta}](Q_1 - \tilde{\lambda}I) = \tilde{\beta}L_0, \quad (3.15)$$

и

$$v' = \tilde{v} + 2[Q_1, [Q_1, \text{LOG } \tilde{\beta}]]. \quad (3.16)$$

Ниже мы покажем, что $\tilde{\beta}$ не совпадает с решением Йоста при $\mathbf{q}_1 = \tilde{\lambda}$ (в отличие от решения β уравнения (3.8)) и не имеет обратного в пространстве $\mathcal{S}'_{p,\mathbf{q}}$. Это означает, в частности, что для $[Q_1, \text{LOG } \tilde{\beta}]$ нельзя пользоваться формулой (3.2).

Используя (3.7), можно исключить промежуточный потенциал v' и записать непосредственно, что

$$\tilde{v} = v - 2[Q_1, [Q_1, \text{LOG } (\tilde{\beta}\beta^{-1})]]. \quad (3.17)$$

Теперь мы накладываем условие, что оба потенциала v и $\tilde{v}$ самосопряжены,

$$v^\dagger = v, \quad \tilde{v}^\dagger = \tilde{v}. \quad (3.18)$$

Подобно [25] легко показать, что в силу (3.17) без потери общности это требование эквивалентно условиям

$$(\tilde{\beta}\beta^{-1})^\dagger = \tilde{\beta}\beta^{-1}, \quad (3.19)$$

$$\tilde{\lambda} = \bar{\lambda} = \mu - i\kappa. \quad (3.20)$$

Покажем, что данный выбор гарантирует, что окончательное бинарное преобразование Беклунда добавляет к v солитон.

Пусть U означает преобразование Дарбу, порождающее это бинарное преобразование Беклунда v в $\tilde{v}$, т.е.

$$U\tilde{L} = LU. \quad (3.21)$$

Тогда из (3.3) и (3.13)

$$U = B^{-1}\tilde{B}, \quad (3.22)$$

а в силу (3.12) и (3.14) преобразование U дается формулой

$$U = I - \beta(Q_1 - \lambda I)^{-1}A\beta^{-1}, \quad (3.23)$$

где

$$A = [Q_1, \text{LOG } (\tilde{\beta}\beta^{-1})] - 2i\kappa I, \quad A^\dagger = -A. \quad (3.24)$$

Теперь следует найти дифференциальное уравнение (в пространстве $\mathcal{S}'_{p,\mathbf{q}}$) для $\tilde{\beta}\beta^{-1}$ в терминах β . Подставим для этого $\tilde{v}$ из (3.17) в (3.15), а в получившемся уравнении исключим v с помощью (3.8). Тогда получаем

$$[Q_2 - 2\mu Q_1, \text{LOG } (\tilde{\beta}\beta^{-1})] + [Q_1, A] = A^2 + 2i\kappa A + 2A[Q_1, \text{LOG } \beta]. \quad (3.25)$$

Складывая это уравнение с его эрмитово сопряженным, имеем

$$[Q_1, (\tilde{\beta}\beta^\dagger)^{-1}A] = 0. \quad (3.26)$$

Поэтому существует оператор c , коммутирующий с Q_1 , такой что

$$A = ic\tilde{\beta}\beta^\dagger.$$

Ввиду условия самосопряженности (3.19) этот оператор s должен быть эрмитовым. В силу (3.17) и (3.24) как $\tilde{v}$, так и A не зависят от значения s , а потому выберем $s = -I$, т.е.

$$A = -i\tilde{\beta}\beta^\dagger. \quad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в (3.24), получаем уравнение Риккати для $\tilde{\beta}\beta^{-1}$:

$$[Q_1, \tilde{\beta}\beta^{-1}] = 2i\kappa\tilde{\beta}\beta^{-1} - i(\tilde{\beta}\beta^{-1})^2\beta\beta^\dagger. \quad (3.28)$$

Решение этого уравнения можно представить как

$$\tilde{\beta} = \beta s(I + sf)^{-1}. \quad (3.29)$$

Здесь

$$s(p; \mathbf{q}) \equiv s(p) = \frac{ie^{ip_1x_0}\delta(p_2 - 2\mu p_1)}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi(p_1 + i0)}{2\kappa}} = \frac{\kappa}{2\pi^2} \int \frac{dx e^{ipx}}{1 + e^{-2\kappa(x_1 + 2\mu x_2 - x_0)}}, \quad (3.30)$$

где x_0 — константа интегрирования и

$$f(p; \mathbf{q}) = i \frac{(\beta^\dagger \beta)(p) - \delta(p)}{p_1 + 2i\kappa}. \quad (3.31)$$

Отметим, что s , а потому и $\tilde{\beta}$ не имеют обратных в пространстве $\mathcal{S}'_{p, \mathbf{q}}$. Из определений s и f непосредственно следует, что

$$[Q_1, s] = -is(s - 2\kappa I), \quad (3.32)$$

$$[Q_1, f] = i(\beta^\dagger \beta - I - 2\kappa f), \quad (3.33)$$

$$s^\dagger = s, \quad f^\dagger = f. \quad (3.34)$$

Поэтому в силу (3.29)

$$\tilde{\beta}^\dagger = \beta^\dagger s(I + sf)^{-1} \quad (3.35)$$

и выполнено условие (3.19) самосопряженности.

Теперь необходимо проверить, что найденное в (3.29) решение $\tilde{\beta}$ удовлетворяет (3.25), поскольку пока что была использована только вещественная часть этого уравнения. Подставляя (3.26) в (3.25), получаем

$$[Q_2 - 2\mu Q_1, \operatorname{LOG}(\tilde{\beta}\beta^{-1})] = -A[Q_1, \operatorname{LOG}(\beta^\dagger \beta^{-1})]$$

и тогда в силу (3.27)

$$[Q_2 - 2\mu Q_1, \operatorname{LOG}(\tilde{\beta}\beta^{-1})] = -i\tilde{\beta}\beta^{-1}([Q_1, \beta]\beta^\dagger - [Q_1, \beta^\dagger]\beta). \quad (3.36)$$

Это уравнение легко проверяется, если заметить, что из определений (3.30) и (3.31) следует

$$[Q_2 - 2\mu Q_1, s] = 0, \quad (3.37)$$

$$[Q_2 - 2\mu Q_1, f] = i([Q_1, \beta]\beta^\dagger - [Q_1, \beta^\dagger]\beta). \quad (3.38)$$

Наконец, по формуле (3.17), используя (3.29), (3.32) и (3.33), мы получаем новый потенциал в виде

$$\tilde{v} = v - 2[Q_1, [Q_1, \text{LOG}(s(I + sf)^{-1})]] = v + 2i[Q_1, s\beta^\dagger\beta(I + sf)^{-1}], \quad (3.39)$$

что вследствие (3.29) можно записать также как

$$\tilde{v} = v + 2i[Q_1, \beta^\dagger\tilde{\beta}]. \quad (3.40)$$

Отметим, что из соотношений (3.29) и (3.35) вытекает $\beta^\dagger\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^\dagger\beta$ в соответствии со свойством самосопряженности $\tilde{v}$. Легко проверить также, что поскольку в x -пространстве преобразование Фурье от $s(I + sf)^{-1}$ строго положительно, то потенциал

$$\tilde{u}(x) = \int dp e^{-ipx} \tilde{v}(p) \quad (3.41)$$

(обращение (2.12)) не имеет особенностей.

С другой стороны, в силу (3.30) функция $s(p)$ пропорциональна $\delta(p_2 - 2\mu p_1)$ и $\delta(p)$ — ведущая особенность произведения $(I + sf)^{-1}(p)$. Следовательно, $\tilde{v}(p)$ имеет слагаемое, пропорциональное $\delta(p_2 - 2\mu p_1)$. И поэтому действительно потенциал $\tilde{u}(x)$ — это частный случай (1.3). Поведение этого потенциала на больших расстояниях подробно описано в разделе 3.7.

Благодаря самосопряженности v и $\tilde{v}$ мы получаем по аналогии с первым равенством в (2.19), что оператор $\tilde{L}$ также самосопряжен, а следовательно, по (3.21)

$$\tilde{L}U^\dagger = U^\dagger L, \quad (3.42)$$

что потребуются нам в дальнейшем.

3.2. Резольвента

3.2.1. Ортогональное разложение $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$. Наша цель — построить расширенную резольвенту $\tilde{M}$ для полученного в предыдущем разделе потенциала $\tilde{v}$. В данном случае можно избежать решения интегральных уравнений (2.18), воспользовавшись непосредственно определением (2.13) оператора $\tilde{M}$ как обратного к $\tilde{L}$,

$$\tilde{L}\tilde{M} = I, \quad \tilde{M}\tilde{L} = I. \quad (3.43)$$

Используя свойства калибровочного оператора U , осуществляющего бинарное преобразование Дарбу, покажем прежде всего, что операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ естественным образом разлагаются в сумму двух ортогональных слагаемых. В силу (3.20), (3.24), (3.27)

и (3.19) мы получаем из (3.23) следующие явные формулы для оператора U и его сопряженного:

$$U = I + i\beta(Q_1 - \lambda I)^{-1}\tilde{\beta}^\dagger = I + i\beta(Q_1 - \lambda I)^{-1}s(I + sf)^{-1}\beta^\dagger, \quad (3.44)$$

$$U^\dagger = I - i\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger = I - i\beta s(I + sf)^{-1}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger. \quad (3.45)$$

Используя (3.33) и (3.19), легко проверить, что оператор U частично изометричен, а не унитарен. Точнее, $U^\dagger$ — правый обратный к U ,

$$UU^\dagger = I, \quad (3.46)$$

но

$$\Pi = U^\dagger U \quad (3.47)$$

— нетривиальный ортогональный проектор,

$$\Pi^\dagger = \Pi, \quad \Pi^2 = \Pi, \quad (3.48)$$

играющий существенную роль в дальнейшем. С учетом (3.33) мы получаем

$$\Pi - I = \beta(I + sf)^{-1}(\Pi_1 - I)(I + sf)^{-1}\beta^\dagger, \quad (3.49)$$

где

$$\Pi_1 = I + \frac{i}{2\kappa}[s(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}(s - 2\kappa I) - (s - 2\kappa I)(Q_1 - \lambda I)^{-1}s]. \quad (3.50)$$

Умножая (3.21) слева на $U^\dagger$, а (3.42) справа на U , мы получаем, что благодаря (3.47) этот проектор коммутирует с $\tilde{L}$ и

$$\Pi\tilde{L} = \tilde{L}\Pi = U^\dagger LU, \quad (3.51)$$

откуда приходим к следующему разложению:

$$\tilde{L} = U^\dagger LU + \tilde{L}(I - \Pi). \quad (3.52)$$

Поскольку из формул (3.46) и (3.47) вытекает

$$U(I - \Pi) = (I - \Pi)U^\dagger = 0, \quad (3.53)$$

то произведение двух слагаемых в правой части соотношения (3.52) равно нулю, так что это разложение ортогонально.

Теперь из (3.43) следует, что Π коммутирует с $\widetilde{M}$, а потому в силу (2.13) получаем ортогональное разложение и для $\widetilde{M}$,

$$\widetilde{M} = U^\dagger MU + \widetilde{M}(I - \Pi), \quad (3.54)$$

где M и U в первом слагаемом мы считаем заданными по произвольному фоновому потенциалу v . Отметим, что второй член в (3.54)

$$\widehat{M} = \widetilde{M}(I - \Pi) \quad (3.55)$$

однозначно фиксируется требованием ортогональности к Π , т.е.

$$\widehat{M}\Pi = \Pi\widehat{M} = 0, \quad (3.56)$$

и условием

$$\widehat{M}\tilde{L}(I - \Pi) = \tilde{L}(I - \Pi)\widehat{M} = (I - \Pi). \quad (3.57)$$

Поэтому ниже эти уравнения используются для определения $\widehat{M}$. Мы начинаем построение $\widetilde{M}$ со специального случая, когда исходный потенциал равен нулю, т.е. $v \equiv 0$. Тогда $\tilde{v}$ — чисто односолитонный потенциал.

3.2.2. Односолитонный случай. Будем обозначать индексом “1” величины, относящиеся к специальному случаю $v \equiv 0$. Сделаем, в частности, следующие переобозначения:

$$\tilde{v} \longrightarrow v_1$$

и

$$\tilde{L} = L_0 - \tilde{v} \longrightarrow L_1 = L_0 - v_1. \quad (3.58)$$

Величины, относящиеся к чисто односолитонному случаю, получаются из предыдущих формул, если положить в них $\beta = I$ и $f = 0$. Тогда имеем

$$U_1 = I + i(Q_1 - \lambda I)^{-1}s, \quad U_1^\dagger = I - is(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}, \quad (3.59)$$

$$U_1 U_1^\dagger = I, \quad U_1^\dagger U_1 = \Pi_1, \quad (3.60)$$

$$\Pi_1^\dagger = \Pi_1, \quad \Pi_1^2 = \Pi_1, \quad (3.61)$$

где ортогональный проектор Π_1 задан в (3.50).

Ортогональное разложение (3.52) принимает теперь вид

$$L_1 = U_1^\dagger L_0 U_1 + L_1(I - \Pi_1). \quad (3.62)$$

В соответствии с общим обсуждением в п.3.2.1. следует найти выражение для $L_1(I - \Pi_1)$, для которого легко может быть разрешено уравнение (3.57). Рассмотрим разность $L_1 - U_1^\dagger L_0 U_1$. Принимая во внимание, что вследствие (3.40) $v_1 = 2i[Q_1, s]$, мы получаем

$$\begin{aligned} L_1 - U_1^\dagger L_0 U_1 &= -2i[Q_1, s] + is(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}L_0 - iL_0(Q_1 - \lambda I)^{-1}s - \\ &\quad - s(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}L_0(Q_1 - \lambda I)^{-1}s. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Подставляя в правую часть оператор L_0 , записанный в виде

$$L_0 = (Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I) - (Q_1 - \bar{\lambda}I)(Q_1 - \lambda I), \quad (3.64)$$

используя (3.37), (3.32) и вспоминая определение Π_1 в (3.50), мы получаем явное ортогональное разложение чисто односолитонного L -оператора,

$$L_1 = U_1^\dagger L_0 U_1 + (I - \Pi_1)(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I). \quad (3.65)$$

В силу (3.37) и (3.50)

$$[\Pi_1, Q_2 - 2\mu Q_1] = 0, \quad (3.66)$$

что позволяет легко получить следующее ортогональное разложение резольвенты чисто односолитонного потенциала:

$$M_1 = U_1^\dagger M_0 U_1 + (I - \Pi_1)(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I)^{-1}. \quad (3.67)$$

Для исследования аналитических свойств $M_1(p; \mathbf{q})$ по отношению к переменной $\mathbf{q}$ удобно вычислить явно оба члена в правой части последнего равенства. Подставляя s из (3.30) в определение (3.50) проектора Π_1 , находим

$$(I - \Pi_1)(p; \mathbf{q}) = \frac{\delta(p_2 - 2\mu p_1)}{8i\kappa} e^{ip_1 x_0} \int dp'_1 \times \\ \times \left[\frac{1}{(p'_1 - i\kappa + \mathbf{q}_1 - \mu) \operatorname{ch} \frac{\pi(p_1 - (p'_1 - i(\kappa - 0)))}{2\kappa} \operatorname{ch} \frac{\pi(p'_1 - i(\kappa - 0))}{2\kappa}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(p'_1 + i\kappa + \mathbf{q}_1 - \mu) \operatorname{ch} \frac{\pi(p_1 - (p'_1 + i(\kappa - 0)))}{2\kappa} \operatorname{ch} \frac{\pi(p'_1 + i(\kappa - 0))}{2\kappa}} \right],$$

что есть в точности формула Коши, примененная к контуру полосы $|\mathbf{q}_{1\Im}| \leq \kappa$ в комплексной $\mathbf{q}_1$ -плоскости. Итак, мы получаем

$$(I - \Pi_1)(p; \mathbf{q}) = \theta(\kappa - |\mathbf{q}_{1\Im}|) \frac{\pi \delta(p_2 - 2\mu p_1) e^{ip_1 x_0}}{4\kappa \operatorname{ch} \frac{\pi(p_1 + \mathbf{q}_1 - \mu)}{2\kappa} \operatorname{ch} \frac{\pi(\mathbf{q}_1 - \mu)}{2\kappa}}, \quad (3.68)$$

так что функция $(I - \Pi_1)(p; \mathbf{q})$ не зависит от $\mathbf{q}_2$, аналитична по $\mathbf{q}_1$ в полосе $|\mathbf{q}_{1\Im}| \leq \kappa$ и равна нулю вне ее. Помимо этого она является произведением двух аналитических функций, зависящих от $p_1 + \mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_1$, соответственно.

Чтобы вычислить явно первый член $U_1^\dagger M_0 U_1$ ортогонального разложения M_1 в (3.67), нам нужен следующий интеграл:

$$\int dp' \frac{s(p - p')s(p')}{\mathbf{w} + p'_1} = \frac{2\kappa}{\mathbf{w}} s(p) + is(p) \left[\psi \left(\frac{\mathbf{w} + p_1}{2i\kappa} \right) - \psi \left(\frac{\mathbf{w}}{2i\kappa} \right) \right] + \\ + \frac{ie^{ip_1 x_0} \theta(-\mathbf{w}_{\Im}) \delta(p_2 - 2\mu p_1)}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi(p_1 + \mathbf{w})}{2\kappa} \operatorname{sh} \frac{\pi \mathbf{w}}{2\kappa}} \quad (3.69)$$

(здесь $\psi(z)$ — логарифмическая производная Γ -функции). Ввиду обобщенно-значной природы $s(p)$ это равенство можно получить из рекурсионного соотношения, выводимого посредством рассмотрения предела при $R \rightarrow \infty$ интеграла $\int_{C_R} dp'_1 \frac{s(p - p')s(p')}{\mathbf{w} + p'_1}$ по прямоугольнику C_R в комплексной p'_1 -плоскости с длиной $2R$, высотой 2κ и с нижней гранью, центрированной на вещественной оси. Отметим, что предыдущий интеграл в силу (3.30) зависит от p_2 только через множитель $\delta(p_2 - 2\mu p_1)$.

Правильность результата легко проверить путем сравнения аналитических свойств левой и правой частей равенства (3.69). Отметим, в частности, что простые полюсы $\psi(z)$ при $z = 0, -1, \dots, -n, \dots$ в точности сокращаются полюсами последнего члена.

Поскольку $U_1(p; \mathbf{q})$ и $U_1^\dagger(p; \mathbf{q})$ содержат множитель $\delta(p_2 - 2\mu p_1)$, то первый член $U_1^\dagger M_0 U_1$ можно записать как

$$U_1^\dagger M_0 U_1 = M_a + M_b + M_c + M_d, \quad (3.70)$$

где

$$M_{a, \dots, d}(p; \mathbf{q}) = M_{1a, \dots, 1d}(p_1; \mathbf{q}) \delta(p_2 - 2\mu p_1) \quad (3.71)$$

и

$$M_a = M_0 + i(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I)^{-1} [s, (Q_1 - \bar{\lambda} I) M_0], \quad (3.72)$$

$$M_b(p; \mathbf{q}) = \frac{is(p)}{2\zeta(\mathbf{q}_2 - 2\mu\mathbf{q}_1 + |\lambda|^2)} \left[\psi\left(\frac{\mathbf{q}_1 + p_1 - \mu + \zeta}{2i\kappa}\right) - \psi\left(\frac{\mathbf{q}_1 + p_1 - \mu - \zeta}{2i\kappa}\right) - \right. \\ \left. - \psi\left(\frac{\mathbf{q}_1 - \mu + \zeta}{2i\kappa}\right) + \psi\left(\frac{\mathbf{q}_1 - \mu - \zeta}{2i\kappa}\right) \right], \quad (3.73)$$

$$M_{1c}(p; \mathbf{q}) = \frac{i\pi e^{ip_1 x_0}}{4\zeta(\mathbf{q}_2 - 2\mu\mathbf{q}_1 + |\lambda|^2)} \left[\frac{\theta(-\mathbf{q}_{1\Im} - \zeta_{\Im})}{\operatorname{sh} \frac{\pi(\mathbf{q}_1 + p_1 - \mu + \zeta)}{2\kappa} \operatorname{sh} \frac{\pi(\mathbf{q}_1 - \mu + \zeta)}{2\kappa}} - \right. \\ \left. - \frac{\theta(-\mathbf{q}_{1\Im} + \zeta_{\Im})}{\operatorname{sh} \frac{\pi(\mathbf{q}_1 + p_1 - \mu - \zeta)}{2\kappa} \operatorname{sh} \frac{\pi(\mathbf{q}_1 - \mu - \zeta)}{2\kappa}} \right], \quad (3.74)$$

$$M_{1d}(p; \mathbf{q}) = \frac{\pi e^{ip_1 x_0} \theta(\kappa - |\mathbf{q}_{1\Im}|)}{4\kappa(\mathbf{q}_2 - 2\mu\mathbf{q}_1 + |\lambda|^2) \operatorname{sh} \frac{\pi(\mathbf{q}_1 + p_1 - \lambda)}{2\kappa} \operatorname{sh} \frac{\pi(\mathbf{q}_1 - \lambda)}{2\kappa}}, \quad (3.75)$$

причем

$$\zeta = \sqrt{\mathbf{q}_2 - 2\mu\mathbf{q}_1 + \mu^2}. \quad (3.76)$$

Отметим, что равенства (3.72)–(3.75) не зависят от выбора знака квадратного корня.

Итак, теперь нам известны все слагаемые в правой части (3.67) и, более того, мы видим, что последнее слагаемое в силу (3.68) в точности сокращается слагаемым M_d из $U_1^\dagger M_0 U_1$ в (3.70), так что получаем явную формулу для резольвенты односолитонного потенциала

$$M_1 = M_a + M_b + M_c. \quad (3.77)$$

Поскольку указанные выше члены взаимно сократились, резольвента не имеет разрыва на прямых $\mathbf{q}_{1\Im} = \pm\kappa$. Отметим также, что полюсы функций ψ в M_b в точности компенсируются полюсами слагаемого M_c .

В силу (3.71) функция $M_1(p; \mathbf{q})$ пропорциональна $\delta(p_2 - 2\mu p_1)$. Этот множитель явно указывает (ср. (2.62)) на одномерный характер односолитонной резольвенты, так что $M_1(p; \mathbf{q})$ можно рассматривать как погружение в два измерения одномерной резольвенты. Действительно, рассмотрим стационарный оператор Шредингера $L = \partial_{x_1}^2 - u(x_1) + z$, где $u(x_1)$ – одномерный потенциал и z – (комплексный) спектральный параметр. Его образ есть элемент пространства $\mathcal{S}'_{p, \mathbf{q}}$ и имеет вид

$$L_z(p_1; \mathbf{q}_1) = \delta(p_1)(z - \mathbf{q}_1^2) - v(p_1), \quad (3.78)$$

где $v(p_1)$ – фурье-образ $u(x_1)$. Одномерная резольвента $M_z(p_1; \mathbf{q}_1)$ определена (по аналогии с (2.13)) уравнением $(L_z M_z)(p_1; \mathbf{q}_1) = \delta(p_1)$. В рассматриваемом здесь случае, т.е. когда $u(x_1)$ – чисто односолитонное решение, легко проверить, что соответствующая резольвента дается соотношением

$$M_z(p_1; \mathbf{q}_1) = (M_{1a} + M_{1b} + M_{1c})(p_1; \mathbf{q}_1 + \mu, z + 2\mu\mathbf{q}_1 + \mu^2), \quad (3.79)$$

которое может быть раскрыто по формулам (3.72)–(3.74). Ниже в разделах 3.4 и 4 мы подробно опишем свойства M_1 и M_z .

3.2.3. Солитон над ненулевым фоном. Рассмотрим теперь случай потенциала $\tilde{v}$, полученного наложением с помощью бинарного преобразования Беклунда солитона на произвольный регулярный потенциал v .

Для нахождения резольвенты мы следуем процедуре, аналогичной использованной в предыдущем разделе. Найдем сначала явную формулу для второго слагаемого в ортогональном разложении (3.52) оператора $\tilde{L}$. В силу (3.40), (3.44) и (3.45) мы имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{L} - U^\dagger LU &= -2i[Q_1, \beta^\dagger \tilde{\beta}] + i\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger L - iL\beta(Q_1 - \lambda I)^{-1}\tilde{\beta}^\dagger - \\ &\quad - \tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger L\beta(Q_1 - \lambda I)^{-1}\tilde{\beta}^\dagger. \end{aligned}$$

Подставляя $L\beta$ из равенства (3.8) и $\beta^\dagger L$ из его комплексно-сопряженного, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{L} - U^\dagger LU &= -2i\beta^\dagger[Q_1, \tilde{\beta}] + 2i\tilde{\beta}^\dagger[Q_1, \beta] + i\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}L_0\beta^\dagger - \\ &\quad - i\beta L_0(Q_1 - \lambda I)^{-1}\tilde{\beta}^\dagger - \tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger\beta L_0(Q_1 - \lambda I)^{-1}\tilde{\beta}^\dagger + \\ &\quad + 2\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger[Q_1, \beta]\tilde{\beta}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Умножая это уравнение слева на $(I + sf)\beta^{-1}$ и справа на $(I + sf)(\beta^\dagger)^{-1}$ и используя (3.33) и (3.38), мы получаем

$$\begin{aligned} (I + sf)\beta^{-1}(\tilde{L} - U^\dagger LU)(I + sf)(\beta^\dagger)^{-1} &= -2i[Q_1, s] + is(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}L_0 - \\ &\quad - iL_0(Q_1 - \lambda I)^{-1}s - s(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}L_0(Q_1 - \lambda I)^{-1}s. \end{aligned}$$

В силу (3.63) правая часть в точности есть $L_1 - U_1^\dagger L_0 U_1$. Используя (3.65), мы выводим, наконец, ортогональное разложение для $\tilde{L}$ в виде

$$\tilde{L} = U^\dagger LU + \beta(I + sf)^{-1}(I - \Pi_1)(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I)\beta^\dagger(I + sf)^{-1}. \quad (3.81)$$

Теперь легко доказать, что ортогональное разложение резольвенты задается как

$$\widetilde{M} = U^\dagger MU + \widehat{M}, \quad (3.82)$$

где

$$\widehat{M} = \beta(I + sf)^{-1}(I - \Pi_1)(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I)^{-1}\beta^\dagger(I + sf)^{-1}. \quad (3.83)$$

В соответствии с замечанием, сделанным в конце п. 3.2.1, следует проверить, что $\widehat{M}$ удовлетворяет (3.56) и (3.57). Сначала, используя (3.49) и (3.66), запишем

$$\widehat{M} = \beta(I + sf)^{-1}(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I)^{-1}\beta^{-1}(I + sf)(I - \Pi) \quad (3.84)$$

и

$$\tilde{L}(I - \Pi) = (I - \Pi)(\beta^\dagger)^{-1}(I + sf)(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I)\beta^\dagger(I + sf)^{-1}.$$

Тогда посредством (3.48), (3.49) и (3.66) мы получаем, что $\widehat{M}\Pi = 0$ и $\widehat{M}\tilde{L}(I - \Pi) = (I - \Pi)$. Аналогично можно доказать, что $\Pi\widehat{M} = 0$ и $\tilde{L}(I - \Pi)\widehat{M} = (I - \Pi)$.

3.3. Решения Йоста

Потенциал $\tilde{v}$, рассмотренный в предыдущих разделах, был получен фактически преобразованием Дарбу, т.е. посредством калибровочного преобразования U оператора L . Поэтому естественно ожидать, что соответствующие решения Йоста $|\tilde{\nu}\rangle$ и $\langle\tilde{\omega}|$ связаны с $U^\dagger|\nu\rangle$ и $\langle\omega|U$, соответственно. Действительно, в силу (3.42)

$$\tilde{L}U^\dagger|\nu\rangle = U^\dagger L|\nu\rangle = U^\dagger|\nu\rangle L_0 \quad (3.85)$$

т.е. $U^\dagger|\nu\rangle$ удовлетворяет дифференциальному уравнению для решения Йоста, равно как $\langle\omega|U$ удовлетворяет дуальному уравнению.

Для того чтобы найти точное выражение, следует выяснить, какому интегральному уравнению удовлетворяет $U^\dagger|\nu\rangle$, и сравнить его с (2.65). В силу (3.85) мы получаем $\tilde{v}U^\dagger|\nu\rangle = (L_0 - \tilde{L})U^\dagger|\nu\rangle = [L_0, U^\dagger|\nu\rangle]$ и, подставляя сюда (3.45),

$$\tilde{v}U^\dagger|\nu\rangle = v|\nu\rangle - i[L_0, \tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger|\nu\rangle].$$

Замечая, что для любого A имеем равенство $[L_0, A](p; \mathbf{q}) = (p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1))A(p; \mathbf{q})$, последний член интегрального уравнения (2.65) с $|\tilde{\nu}\rangle$, замененным на $U^\dagger|\nu\rangle$, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1 + i0\mathbf{q}_1\Im} \left(\frac{p_1(\tilde{v}U^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q})}{p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1)} \right) = \\ = \frac{(v|\nu\rangle)(p; \mathbf{q})}{p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1)} - i \frac{(p_1(\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q}))}{p_1 + i0\mathbf{q}_1\Im}. \end{aligned}$$

Как известно, решение Йоста, отвечающее регулярному потенциалу v , удовлетворяет интегральному уравнению (2.30), а потому первый член можно заменить на $(|\nu\rangle - I)(p; \mathbf{q})$. Для вычисления второго слагаемого необходимо проанализировать ведущую особенность в точке $p_1 = 0$ обобщенной функции $(\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q})$. Ведущей особенностью β и $|\nu\rangle$ является I , в то время как ведущая особенность $\tilde{\beta}$ в силу (3.29) совпадает с ведущей особенностью s , т.е. имеет вид $(p_1 + i0)^{-1}$. Поэтому, учитывая, что произведение двух обобщенных функций вида $(p_1 + i0)^{-1}$ хорошо определено, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{(p_1(\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q}))}{p_1 + i0\mathbf{q}_1\Im} &= (\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q}) + \\ &+ 2\pi i\theta(-\mathbf{q}_1\Im)\delta(p_1)(p_1(\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q})) = \\ &= (\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q}) + 2\pi i\theta(-\mathbf{q}_1\Im)\delta(p_1) \left(\frac{p_1 s(p; \mathbf{q})}{\mathbf{q}_1 - \bar{\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (3.30) и (3.45) имеем

$$U^\dagger|\nu\rangle(p; \mathbf{q}) - \frac{1}{p_1 + i0\mathbf{q}_1\Im} \left(\frac{p_1(\tilde{v}U^\dagger|\nu\rangle)(p; \mathbf{q})}{p_2 - p_1(p_1 + 2\mathbf{q}_1)} \right) = \delta(p) \left(\theta(\mathbf{q}_1\Im) + \theta(-\mathbf{q}_1\Im) \frac{\mathbf{q}_1 - \bar{\lambda}}{\mathbf{q}_1 - \bar{\lambda}} \right),$$

что дает неоднородный член в интегральном уравнении для $U^\dagger|\nu\rangle$. Итак, для того чтобы построить решение Йоста, удовлетворяющее (2.65), следует компенсировать этот зависящий от $\mathbf{q}$ множитель, а потому мы заключаем, что

$$|\tilde{\nu}\rangle = U^\dagger|\nu\rangle \left(\theta(Q_{1\Im}) + \theta(-Q_{1\Im}) \frac{Q_1 - \bar{\lambda}I}{Q_1 - \lambda I} \right), \quad (3.86)$$

где

$$\theta(Q_{1\Im})(p; \mathbf{q}) = \theta(\mathbf{q}_{1\Im})\delta(p). \quad (3.87)$$

Это построение доказывает также и само существование решения Йоста.

Аналогично получаем

$$\langle\tilde{\omega}| = \left(\theta(-Q_{1\Im}) + \theta(Q_{1\Im}) \frac{Q_1 - \lambda I}{Q_1 - \bar{\lambda}I} \right) \langle\omega|U. \quad (3.88)$$

Принимая во внимание явные формулы для U и $U^\dagger$ в (3.44) и (3.45), а также аналитические свойства $|\nu\rangle$ и $\langle\omega|$, можно проверить что (вопреки описанным в разделе 3.4 сложным свойствам резольвенты) $|\tilde{\nu}\rangle$ и $\langle\tilde{\omega}|$ секционно аналитичны в комплексной $\mathbf{q}_1$ -плоскости с разрезом по вещественной оси.

Сравнивая

$$\langle\omega|UU^\dagger|\nu\rangle = I, \quad (3.89)$$

что есть прямое следствие (3.46) и (2.58), с (2.72), мы выводим

$$\tilde{T} = \theta(Q_{1\Im}) \frac{Q_1 - \bar{\lambda}I}{Q_1 - \lambda I} + \theta(-Q_{1\Im}) \frac{Q_1 - \lambda I}{Q_1 - \bar{\lambda}I}, \quad (3.90)$$

что явно доказывает (2.74), где теперь

$$\tilde{t}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}_1 - \mu + i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}}{\mathbf{q}_1 - \mu - i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}}. \quad (3.91)$$

Легко видеть, что коэффициент прохождения $\tilde{T}$ самосопряжен,

$$\tilde{T}^\dagger = \tilde{T}. \quad (3.92)$$

Если обозначить для простоты

$$\lambda_\pm = \mu \pm i\kappa, \quad (3.93)$$

так что $\lambda_+ = \lambda$ (ср. (3.6)) и $\lambda_- = \bar{\lambda}$, то тогда значения коэффициента прохождения по двум сторонам $\mathbf{q}_{1\Re} \pm i0$ вещественной оси в комплексной $\mathbf{q}_1$ -плоскости равны

$$\tilde{T}^\pm = \frac{Q_{1\Re} - \lambda_\mp I}{Q_{1\Re} - \lambda_\pm I} \quad (3.94)$$

и удовлетворяют свойствам

$$\tilde{T}^+ \tilde{T}^- = I, \quad (\tilde{T}^+)^\dagger = \tilde{T}^-. \quad (3.95)$$

В силу (3.91) функция $\tilde{t}(\mathbf{q})$ имеет полюсы при $\mathbf{q}_1 = \lambda_{\pm}$, а вычеты $\tilde{t}$ в этих точках равны

$$\tilde{t}_{\pm} = \pm 2i\kappa. \quad (3.96)$$

Понятно, что $|\tilde{\nu}\rangle\tilde{T}$ и $\tilde{T}\langle\tilde{\omega}|$ также удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.85) и дуальному к нему, поскольку $\tilde{T}$ и L_0 коммутируют. Это именно те решения, которые были определены в (2.75) и (2.76). В силу (2.74)

$$(|\tilde{\nu}\rangle\tilde{T})(p; \mathbf{q}) = \tilde{t}(\mathbf{q})|\tilde{\nu}\rangle(p; \mathbf{q}), \quad (\tilde{T}\langle\tilde{\omega}|)(p; \mathbf{q}) = \tilde{t}(\mathbf{q} + p)\langle\tilde{\omega}|(p; \mathbf{q}),$$

так что первая функция имеет полюсы при $\mathbf{q}_1 = \lambda_{\pm}$, а вторая — при $\mathbf{q}_1 = \lambda_{\pm} - p_1$. Соответствующие вычеты (с точностью до множителя $\pm 2i\kappa$) равны

$$|\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle(p) = |\tilde{\nu}\rangle(p; \lambda_{\pm}), \quad \langle\tilde{\omega}_{1,\pm}|(p) = \langle\tilde{\omega}|(p; \lambda_{\pm} - p_1). \quad (3.97)$$

Для краткости мы называем их дискретными решениями Йоста.

Из (3.86), (3.45) и (3.11) следует, что

$$|\tilde{\nu}_{1,+}\rangle(p) = (U^{\dagger}|\nu\rangle)(p; \mathbf{q})|_{\mathbf{q}_1=\lambda_+} = (\beta - i\tilde{\beta}(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^{\dagger}\beta)(p; \lambda_+), \quad (3.98)$$

а тогда, подставляя (3.33) и используя (3.29), получаем

$$|\tilde{\nu}_{1,+}\rangle = -\frac{\beta}{2\kappa}(s - 2\kappa I)(I + sf)^{-1}. \quad (3.99)$$

Из соотношений (3.88) и (3.44) вытекает

$$\langle\tilde{\omega}_{1,+}|(p) = \left(\frac{Q_1 - \lambda I}{Q_1 - \bar{\lambda}I} \langle\omega|[I + i\beta(Q_1 - \lambda I)^{-1}s(I + sf)^{-1}\beta^{\dagger}] \right)(p; \mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}_1=\lambda_+-p_1}.$$

Напоминая, что в силу (3.11) β — это решение Йоста, мы получаем, что

$$\langle\omega|\beta = I + \text{менее сингулярные слагаемые},$$

а тогда

$$\langle\tilde{\omega}_{1,+}| = \frac{1}{2\kappa}s(I + sf)^{-1}\beta^{\dagger}.$$

Значения решений Йоста в точке λ_- получаются при использовании равенства

$$|\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle^{\dagger} = \langle\tilde{\omega}_{1,\mp}|. \quad (3.100)$$

В частности,

$$|\tilde{\nu}_{1,-}\rangle = \frac{1}{2\kappa}s(I + sf)^{-1}\beta. \quad (3.101)$$

По аналогии с (2.27) и (2.29) определим решения Йоста в x -пространстве формулами

$$\tilde{\Phi}(x, \mathbf{k}) = \int dp e^{-i(p+\ell(\mathbf{k}))x} |\tilde{\nu}\rangle(p; \mathbf{k}), \quad (3.102)$$

$$\tilde{\Psi}(x, \mathbf{k}) = \int dp e^{-i(p-\ell(\mathbf{k}))x} \langle \tilde{\omega}|(p; \mathbf{k}-p_1), \quad (3.103)$$

где ℓ задано в (2.28). Эти функции суть решения (1.1) (и соответственно дуального к нему) для преобразованного потенциала $\tilde{u}$ (см. (3.41), где $\tilde{v}(p)$ дано в (3.39)). Обозначая $\tilde{\Phi}(x, \mathbf{k})$ и $\tilde{\Psi}(x, \mathbf{k})$ при $\mathbf{k} = \mu \pm i\kappa$ как $\tilde{\Phi}_{1,\pm}(x)$ и $\tilde{\Psi}_{1,\pm}(x)$, мы находим с учетом (3.97), что

$$\tilde{\Phi}_{1,\pm}(x) = \int dp e^{-i(p+\ell(\lambda_{\pm}))x} |\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle(p), \quad (3.104)$$

$$\tilde{\Psi}_{1,\pm}(x) = \int dp e^{-i(p-\ell(\lambda_{\pm}))x} \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}|(p). \quad (3.105)$$

Далее, вследствие (3.99) и (3.101), а также принимая во внимание (3.30), мы получаем

$$\tilde{\Phi}_{1,+}(x) = e^{2\kappa x_0} \tilde{\Phi}_{1,-}(x), \quad \tilde{\Psi}_{1,+}(x) = e^{-2\kappa x_0} \tilde{\Psi}_{1,-}(x), \quad (3.106)$$

где второе равенство найдено по аналогии.

Рассмотрим, наконец, асимптотическое поведение решений Йоста при $\mathbf{q}_1 \rightarrow \infty$. В силу (3.45)

$$U^\dagger(p; \mathbf{q}) = \delta(p) - \frac{i}{\mathbf{q}_1} (\tilde{\beta}\beta^\dagger)(p) + o(\mathbf{q}_1^{-1}), \quad \mathbf{q}_1 \rightarrow \infty,$$

а потому, учитывая (2.42) и (2.43), разлагая (3.86), получаем следующие асимптотические условия:

$$|\tilde{\nu}\rangle(p, \mathbf{q}) = \delta(p) + O(1/\mathbf{q}_1), \quad (3.107)$$

$$p_1 |\tilde{\nu}\rangle(p, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2\mathbf{q}_1} \tilde{v}(p) + O(1/\mathbf{q}_1^2), \quad (3.108)$$

где в последней формуле было учтено равенство (3.40).

3.4. Билинейное представление резольвенты и ее свойства

Ортогональное разложение (3.82) позволяет получить билинейное представление для резольвенты $\tilde{M}$, отвечающей неубывающему потенциалу $\tilde{u}$ типа (1.3), который был найден посредством преобразования Беклунда (формула (3.39)). Форма этого билинейного представления оказывается заметно модифицированной по сравнению с билинейным представлением (2.57) в убывающем (регулярном) случае. Действительно, подставляя (2.57) в первое слагаемое разложения (3.82) и используя (3.86), (3.88), (3.90), а также коммутативность $\tilde{T}$ с M_0 , мы получаем

$$\tilde{M} = |\tilde{\nu}\rangle \tilde{T} M_0 \langle \tilde{\omega}| + \widehat{M}. \quad (3.109)$$

Далее, подставляя (3.50) в формулу для $\widehat{M}$ (3.83) и используя (3.90), (3.99) и (3.101), мы получаем также билинейное представление для $\widehat{M}$:

$$\widehat{M} = - \sum_{\pm} |\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{\pm 2i\kappa}{(Q_1 - \lambda_{\pm}I)(Q_2 - 2\mu Q_1 + |\lambda|^2 I)} \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}|. \quad (3.110)$$

Эти формулы находятся в соответствии с общими формулами билинейного представления для резольвенты в случае неубывающего потенциала $\tilde{u}(x)$, найденными при некоторых дополнительных предположениях в [22]. Они доказывают, что общий подход, развитый там, не пуст по крайней мере в случае $N = 1$, поскольку мы явно нашли достаточно общий пример, удовлетворяющий всем требуемым свойствам.

Из выражения для $\widehat{M}$ (3.110) мы выводим, что функция $\widehat{M}(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + 2\mu\mathbf{q}_1)$ аналитична по $\mathbf{q}_1$ в полосе $|\mathbf{q}_{1\Im}| \leq \kappa$ и равна нулю вне ее (см. (3.68) и (3.84)), а также что она аналитична по $\mathbf{q}_2$ с разрезом при $\mathbf{q}_{2\Im} = 0$.

Условие, что $\widehat{M}$ исчезает вне полосы $|\mathbf{q}_{1\Im}| \leq \kappa$ и условие пропорциональности дискретных решений Йостав (3.106) эквивалентны. Чтобы доказать это, заметим сначала, что в соответствии с (3.110) функция $\widehat{M}(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + 2\mu\mathbf{q}_1)$ убывает при $\mathbf{q}_2 \rightarrow \infty$. Благодаря ее свойствам аналитичности по $\mathbf{q}_2$ она равна нулю вне указанной полосы тогда и только тогда, когда разрыв $\widehat{M}(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 + 2\mu\mathbf{q}_1)$ при $\mathbf{q}_{2\Im} = 0$ равен вне полосы нулю. В силу (3.109) этот разрыв $\widehat{M}$ равен разрыву самой $\widetilde{M}$. Итак, суммируя, получаем, что $\widehat{M}(p; \mathbf{q})$ обращается в ноль вне полосы $|\mathbf{q}_{1\Im}| \leq \kappa$ тогда и только тогда, когда вне полосы обращается в ноль разрыв

$$\Delta \widetilde{M}(p; \mathbf{q}) = \widetilde{M}(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{2\Re} + 2i\mu\mathbf{q}_{1\Im} + i0) - \widetilde{M}(p; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{2\Re} + 2i\mu\mathbf{q}_{1\Im} - i0). \quad (3.111)$$

С другой стороны, по формуле (3.110) мы имеем

$$\Delta \widetilde{M} = -4\pi\kappa \sum_{\pm} \pm |\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{\delta(Q_{2\Re} - 2\mu Q_{1\Re} + |\lambda|^2 I)}{Q_1 - \lambda_{\pm}I} \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}|. \quad (3.112)$$

Беря преобразование Фурье от этого равенства и вспоминая (3.104) и (3.105), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int d\mathbf{q}_{\Re} e^{-i(p+\mathbf{q}_{\Re})x+i\mathbf{q}_{\Re}y} \Delta \widetilde{M}(p; \mathbf{q}) = \\ = 2i\kappa \sum_{\pm} \pm \theta((x_1 - y_1 + 2\mu x_2 - 2\mu y_2)(\mathbf{q}_{1\Im} \mp \kappa)) \times \\ \times \operatorname{sgn}(\mathbf{q}_{1\Im} \mp \kappa) e^{-\mathbf{q}_{1\Im}(x_1 - y_1 + 2\mu x_2 - 2\mu y_2)} \tilde{\Phi}_{1,\pm}(x) \tilde{\Psi}_{1,\pm}(y). \end{aligned}$$

Это выражение обращается в ноль вне полосы в том и только том случае, когда

$$\tilde{\Phi}_{1,+}(x) \tilde{\Psi}_{1,+}(y) = \tilde{\Phi}_{1,-}(x) \tilde{\Psi}_{1,-}(y), \quad (3.113)$$

т.е. тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\Phi}_{1,+}(x) = b \tilde{\Phi}_{1,-}(x), \quad \tilde{\Psi}_{1,+}(x) = b^{-1} \tilde{\Psi}_{1,-}(x), \quad (3.114)$$

где b – вещественная (в силу (3.100)) ненулевая константа. Эти равенства совпадают с (3.106), а приведенное там явное значение b следует из подстановки (3.99) и (3.101) в (3.104).

Благодаря этому соотношению преобразование Фурье от $\Delta\widetilde{M}(p; \mathbf{q})$ принимает вид прямого произведения двух функций, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int d\mathbf{q}_{\Re} e^{-i(p+\mathbf{q}_{\Re})x+i\mathbf{q}_{\Re}y} \Delta\widetilde{M}(p; \mathbf{q}) = \\ = -2i\kappa\theta(\kappa - |\mathbf{q}_{1\Im}|) e^{-\mathbf{q}_{1\Im}(x_1-y_1+2\mu x_2-2\mu y_2)} \widetilde{\Phi}_{1,+}(x) \widetilde{\Psi}_{1,+}(y). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Отметим, что в правой части равенства (3.109) разрыв $\widehat{M}$ при $\mathbf{q}_{1\Im} = \pm\kappa$,

$$\widehat{M}|_{Q_{1\Im}=\pm(\kappa+0)I} - \widehat{M}|_{Q_{1\Im}=\pm(\kappa-0)I} = -4\pi\kappa|\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{\delta(Q_{1\Re}-\mu I)}{Q_2-\lambda_{\pm}^2 I} \langle\tilde{\omega}_{1,\pm}|$$

(что непосредственно следует из (3.110)), компенсируется разрывом первого слагаемого, порождаемого полюсами $\widetilde{T}$. Действительно, принимая во внимание (2.17), (2.74), (3.91), (3.97) и (3.93), мы получаем

$$|\tilde{\nu}\rangle \widetilde{T} M_0 \langle\tilde{\omega}||_{Q_{1\Im}=\pm(\kappa+0)I} - |\tilde{\nu}\rangle \widetilde{T} M_0 \langle\tilde{\omega}||_{Q_{1\Im}=\pm(\kappa-0)I} = 4\pi\kappa|\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{\delta(Q_{1\Re}-\mu I)}{Q_2-\lambda_{\pm}^2 I} \langle\tilde{\omega}_{1,\pm}|.$$

Итак, при произвольном $\mathbf{q}_2$ резольвента $\widetilde{M}(p; \mathbf{q})$ не имеет разрывов на границах полосы, как было явно показано для чисто односолитонного случая в (3.77).

С другой стороны, разрыв $\widehat{M}$ при $Q_{2\Im} = 2\mu Q_{1\Im}$ не компенсируется первым слагаемым в (3.109) и его наличие в резольвенте $\widetilde{M}$ – характерный признак солитонной компоненты в потенциале $\tilde{u}(x)$.

Поведение $\widetilde{M}(p; \mathbf{q})$ в конечных точках $\mathbf{q}_{1\Im} = \pm\kappa$ этого разреза требует специального рассмотрения. Оказывается, что $\widetilde{M}(p; \mathbf{q})$ в пределе

$$\mathbf{q}_{1\Im} \rightarrow \pm\kappa, \quad \mathbf{q}_{2\Im} \rightarrow \pm 2\mu\kappa \quad (3.116)$$

имеет логарифмические особенности.

Чтобы показать это, рассмотрим первое слагаемое в формуле (3.109). В то время как множители $|\tilde{\nu}\rangle$ и $\langle\tilde{\omega}|$ в этом пределе регулярны, $\widetilde{T}$ и M_0 , как отмечалось в разделе 3.3, ведут себя в силу (2.74), (3.91) и (2.17) как

$$\frac{\mathbf{q}_1 - \mu + i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}}{\mathbf{q}_1 - \mu - i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}} \rightarrow \frac{\mathbf{q}_{1\Re} - \mu \pm 2i\kappa}{\mathbf{q}_{1\Re} - \mu \pm i0(|\mathbf{q}_{1\Im}| - \kappa)}, \quad (3.117)$$

$$\frac{1}{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2} \rightarrow \frac{1}{\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2 \mp 2i\kappa(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)}, \quad (3.118)$$

а потому произведение предельных значений не определено. Чтобы отделить особенности, отметим, что в пределе (3.116)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2} + i\pi \operatorname{sgn}(\mathbf{q}_{2\Im} - 2\mathbf{q}_{1\Re}\mathbf{q}_{1\Im})\delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2 \mp 2i\kappa(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)} \mp i\pi \operatorname{sgn}(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)\delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Эта обобщенная функция допускает умножение на обобщенную функцию в правой части (3.117), поскольку при $\mathbf{q}_{1\Re} \rightarrow \mu$ правая часть (3.119) равна $(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2)^{-1}$ в смысле главного значения.

Запишем теперь интересное нас произведение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{q}_1 - \mu + i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}}{\mathbf{q}_1 - \mu - i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}} \frac{1}{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2} = \\ = \frac{\mathbf{q}_1 - \mu + i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}}{\mathbf{q}_1 - \mu - i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}} \left(\frac{1}{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2} + i\pi \operatorname{sgn}(\mathbf{q}_{2\Im} - 2\mathbf{q}_{1\Re}\mathbf{q}_{1\Im})\delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2) \right) - \\ - i\pi \frac{\mathbf{q}_1 - \mu + i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}}{\mathbf{q}_1 - \mu - i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}} \operatorname{sgn}(\mathbf{q}_{2\Im} - 2\mathbf{q}_{1\Re}\mathbf{q}_{1\Im})\delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2), \end{aligned} \quad (3.120)$$

так что только последнее слагаемое сингулярно в рассматриваемом пределе. Используя спектральный параметр $\mathbf{k}$, введенный в (2.41), и замечая, что в пределе (3.116) знак $\mathbf{q}_{1\Im}$ равен $\pm$, это слагаемое можно записать как

$$\frac{\pm i\pi \operatorname{sgn}(\mathbf{q}_{1\Re} - \mathbf{k}_{\Re})}{\mathbf{q}_{1\Re} - \mathbf{k}_{\Re} + \mathbf{k} - \lambda_{\pm}} \delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2)(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu \pm 2i\kappa). \quad (3.121)$$

Нам нужно рассмотреть его в пределе

$$\mathbf{k} \rightarrow \lambda_{\pm}, \quad (3.122)$$

который в силу (2.41) и (3.93) есть эквивалентная формулировка предела (3.116) в терминах $\mathbf{k}$. Легко доказать, что в смысле обобщенных функций по переменной p и комплексного $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}_{\Im} \neq 0$, выполнено соотношение

$$\frac{\operatorname{sgn} p}{p + \mathbf{z}} = -\delta(p)(\log \mathbf{z} + \log(-\mathbf{z})) + \frac{1}{|p|} + o(1), \quad \mathbf{z} \rightarrow 0, \quad (3.123)$$

где $\log \mathbf{z}$ — главная ветвь логарифмической функции, а $1/|p|$ — стандартная обобщенная функция (см. [31]), определенная равенством

$$\left(\frac{1}{|p|}, \phi \right) = \int \frac{dp}{|p|} [\phi(p) - \theta(1 - |p|)\phi(0)], \quad (3.124)$$

где, в свою очередь, $\phi(p)$ — произвольная тест-функция.

Теперь по формуле (3.120) в пределе (3.122), принимая во внимание (3.117), (3.121) и (3.123), мы получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbf{q}_1 - \mu + i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}}{\mathbf{q}_1 - \mu - i\kappa \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1\Im}} \frac{1}{\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1^2} \rightarrow \frac{\mathbf{q}_{1\Re} - \mu \pm 2i\kappa}{\mathbf{q}_{1\Re} - \mu} \times \\
& \times \left(\frac{1}{\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2 \mp 2i\kappa(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)} \mp i\pi \operatorname{sgn}(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu) \delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2) \right) \pm \\
& \pm i\pi \frac{\mathbf{q}_{1\Re} - \mu \pm 2i\kappa}{|\mathbf{q}_{1\Re} - \mu|} \delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2) + \\
& + 2\pi\kappa \delta(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu) \delta(\mathbf{q}_{2\Re} - \mathbf{q}_{1\Re}^2 + \kappa^2) (\log(\mathbf{k} - \lambda_{\pm}) + \log(\lambda_{\pm} - \mathbf{k})) + \\
& + \frac{2\pi\kappa \operatorname{sgn}(|\mathbf{q}_{1\Im}| - \kappa)}{\mathbf{q}_{2\Re} - \mu^2 + \kappa^2} \delta(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu) + o(1), \tag{3.125}
\end{aligned}$$

где $(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)^{-1}$ и $(\mathbf{q}_{2\Re} - \mu^2 + \kappa^2)^{-1}$ понимаются как главные значения, $|\mathbf{q}_{1\Re} - \mu|^{-1}$ определено в (3.124) и $o(1)$ означает обобщенную функцию, обращающуюся в ноль в рассматриваемом пределе.

Подставляя (3.125) в $|\tilde{\nu}\rangle \tilde{T} M_0 \langle \tilde{\omega}|$, мы получаем

$$\begin{aligned}
|\tilde{\nu}\rangle \tilde{T} M_0 \langle \tilde{\omega}| & \rightarrow \\
& \rightarrow 2\pi\kappa (\log(\mathbf{k} - \lambda_{\pm}) + \log(\lambda_{\pm} - \mathbf{k})) |\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \delta(Q_{1\Re} - \mu I) \delta(Q_{2\Re} - (\lambda^2)_{\Re} I) \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}| + \\
& + 2\pi\kappa \operatorname{sgn}(|\mathbf{k}_{\Im}| - \kappa) |\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{\delta(Q_{1\Re} - \mu I)}{Q_{2\Re} - (\lambda^2)_{\Re} I} \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}| + O(1), \tag{3.126}
\end{aligned}$$

причем в слагаемое $O(1)$ мы включили все те члены, которые в пределе (3.122) конечны и не зависят от знака $|\mathbf{k}_{\Im}| - \kappa$. Как было показано выше, члены, зависящие от этого знака, должны компенсироваться $\hat{M}$.

Действительно, в силу (3.110) мы имеем в пределе (3.122), что

$$\begin{aligned}
\widehat{M} & \rightarrow \mp 2i\kappa |\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{1}{Q_{1\Re} - \mu I + i0(Q_{1\Im} \mp \kappa I)} \times \\
& \times \frac{1}{Q_{2\Re} - 2\mu Q_{1\Re} + |\lambda|^2 I \pm i0(\mathbf{k}_{\Re} - \mu) I} \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}| \pm \\
& \pm 2i\kappa |\tilde{\nu}_{1,\mp}\rangle \frac{1}{(Q_{1\Re} - \mu I \pm 2i\kappa I)} \times \\
& \times \frac{1}{(Q_{2\Re} - 2\mu Q_{1\Re} + |\lambda|^2 I \pm i0(\mathbf{k}_{\Re} - \mu) I)} \langle \tilde{\omega}_{1,\mp}|. \tag{3.127}
\end{aligned}$$

С другой стороны, требование обращения $\widehat{M}$ вне полосы $|\mathbf{q}_{1\Im}| \leq \kappa$ дает

$$\begin{aligned}
& \mp 2i\kappa |\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{1}{(Q_{1\Re} - \mu I \pm i0)(Q_{2\Re} - 2\mu Q_{1\Re} + |\lambda|^2 I \pm i0(\mathbf{k}_{\Re} - \mu) I)} \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}| \pm \\
& \pm 2i\kappa |\tilde{\nu}_{1,\mp}\rangle \frac{1}{(Q_{1\Re} - \mu I \pm 2i\kappa I)(Q_{2\Re} - 2\mu Q_{1\Re} + |\lambda|^2 I \pm i0(\mathbf{k}_{\Re} - \mu) I)} \langle \tilde{\omega}_{1,\mp}| = 0.
\end{aligned}$$

Вычитая это равенство из (3.127), мы получаем в пределе (3.122)

$$\widehat{M} = 4\pi\kappa\theta(\kappa \mp \mathbf{k}_{\Im})|\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \frac{\delta(Q_{1\Re} - \mu I)}{Q_{2\Re} - (\lambda^2)_{\Re} I \pm i0(\mathbf{k}_{\Re} - \mu)I} \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}| + o(1). \quad (3.128)$$

Суммируя теперь (3.126) и (3.128), мы по формуле (3.109) получаем окончательно, что $\widehat{M}$ в пределе (3.122) ведет себя как

$$\widetilde{M} = 4\pi\kappa \log(\mp i(\mathbf{k} - \lambda_{\pm}))|\tilde{\nu}_{1,\pm}\rangle \delta(Q_{1\Re} - \mu I) \delta(Q_{2\Re} - (\lambda^2)_{\Re} I) \langle \tilde{\omega}_{1,\pm}| + O(1), \quad (3.129)$$

где $O(1)$ означает обобщенную функцию, имеющую при (3.122) хорошо определенные предельные значения.

Таким образом, $\widetilde{M}(p; \mathbf{q})$ обладает логарифмическими особенностями в конечных точках разреза $\mathbf{k}_{\Re} = \mu$, $|\mathbf{k}_{\Im}| \leq \kappa$, т.е. по формуле (2.41) $|\mathbf{q}_{1\Im}| = \kappa$ при $\mathbf{q}_{2\Im} = 2\mu\mathbf{q}_{1\Im}$. Отметим, что первое слагаемое в правой части (3.109) дает логарифмические особенности с двумя бесконечными разрезами и точками ветвления $\mathbf{q}_{1\Im} = \pm\kappa$; второе слагаемое сокращает эти разрезы и заменяет их конечным разрезом, соединяющим две точки $\mathbf{k} = \lambda_{\pm}$.

Подобно (3.115) асимптотическое поведение, приведенное в (3.129), благодаря условию (3.113) принимает простой вид в x -пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int d\mathbf{q}_{\Re} e^{-i(p+\mathbf{q}_{\Re})x+i\mathbf{q}_{\Re}y} \widetilde{M}(p; \mathbf{q}) = \\ = \frac{\kappa}{\pi} \log(\mp i(\mathbf{k} - \lambda_{\pm})) e^{\mp \kappa(x_1 - y_1 + 2\mu x_2 - 2\mu y_2)} \widetilde{\Phi}_{1,+}(x) \widetilde{\Psi}_{1,+}(y) + O(1). \end{aligned} \quad (3.130)$$

Разрыв (3.115) в окрестностях конечных точек следует непосредственно из этого асимптотического разложения.

Отметим, наконец, что благодаря специальной структуре $\widetilde{M}$ описанная в разделе 2.3 процедура редукции для получения решений Йоста $|\tilde{\nu}\rangle$ и $\langle \tilde{\omega}|$ сокращает эти дополнительные сингулярности, что мы показываем явно в разделе 3.3. Важность учета этих особенностей при любой попытке обобщения теории на случай более общих потенциалов вида (1.3) подробно обсуждается в разделе 4.

3.5. Спектральные данные

В этом разделе мы выводим спектральные данные, отвечающие потенциалу $\tilde{v}$ (см. (3.39)). Они будут выражены через спектральные данные исходного потенциала v и параметр λ преобразования Беклунда. Исследование свойств спектральных данных показывает, что они удовлетворяют условиям, сформулированным в разделе 2.5.

Начнем со спектральных данных $\tilde{F}^{\pm}$, введенных в (2.101). Применяя к (3.86) предельную процедуру (2.77) и принимая во внимание (3.90) и (3.93), мы получаем

$$|\tilde{\nu}^{\sigma}\rangle \tilde{T}^{\sigma} = U^{\dagger} |\nu^{\sigma}\rangle (\tilde{T}^{\sigma} \theta(\sigma) + \theta(-\sigma)), \quad Q_{1\Im} = 0, \quad \sigma = \pm, \quad (3.131)$$

где $\theta(+) = 1$, $\theta(-) = 0$ и мы воспользовались тем, что по формуле (3.44) U не имеет разрыва на вещественной оси. Теперь по формуле (2.90) имеем

$$|\tilde{\nu}^\sigma\rangle \tilde{T}^\sigma = U^\dagger |\nu^{-\sigma}\rangle F^{-\sigma} (\tilde{T}^\sigma \theta(\sigma) + \theta(-\sigma)).$$

Подставим сюда вместо $U^\dagger |\nu^{-\sigma}\rangle$ его значение из (3.131) с измененным знаком σ . Это дает первое равенство в (2.101), причем

$$\tilde{F}^+ = F^+, \quad \tilde{F}^- = \tilde{T}^- F^- \tilde{T}^+. \quad (3.132)$$

Теперь характеристическое свойство (2.102) и самосопряженность $\tilde{F}^\pm$ следуют из соответствующих свойств для спектральных данных $F^\pm$ (см. (2.91)). Второе равенство в (2.101) получается как эрмитово сопряжение первого.

Как отмечалось при обсуждении (2.91), хорошо известно, что даже в случае убывающего потенциала для разрешимости обратной задачи необходима разложимость спектральных данных F^σ в произведение треугольных операторов $R_\pm^\sigma$ с тривиальной (единичной) “диагональной” частью. Построение таких треугольных операторов $\tilde{R}_\pm^\sigma$, связанных с $\tilde{F}^\sigma$ разложением (2.100), оказывается задачей более сложной, чем построение самих $\tilde{F}^\sigma$. Причем эти операторы приобретают нетривиальные “диагональные” части и дополнительные особенности во “внедиагональной” части.

Вернемся к определению (2.94). Используя интегральное уравнение (2.65) для решения Йоста $|\tilde{\nu}\rangle$ и выведенное в (3.86) представление для $|\tilde{\nu}\rangle$, получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_\pm^\sigma (\tilde{T}^\sigma)^{-1})(p; \mathbf{q}) = & \delta(p) + \left[\frac{1}{p_1 + i0\sigma} \left(\frac{(p_1 \mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})(U^\dagger |\nu^\sigma\rangle)(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) - i0\sigma p_1} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})(U^\dagger |\nu^\sigma\rangle)(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) \pm i0} \right] (\theta(\sigma) + \theta(-\sigma) \tilde{t}^{-\sigma}(\mathbf{q})), \end{aligned} \quad (3.133)$$

где $\mathcal{P}$ определено в (2.32). Выразим $U^\dagger |\nu^\sigma\rangle$ как сумму обобщенных функций, имеющих особенности при $p_1 = 0$, при $\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) = 0$, а также регулярных слагаемых (обозначаемых р.с.) следующим образом:

$$U^\dagger |\nu^\sigma\rangle = |\nu^\sigma\rangle - is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1} - is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1}(|\nu^\sigma\rangle - I) + \text{р.с.} \quad (3.134)$$

Регулярные слагаемые не дают никакого вклада в (3.133). Поэтому, а также учитывая, что первое слагаемое (при умножении на $\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})$) и третье регулярны при $p_1 = 0$, мы, подставляя (3.134) в (3.133), получаем

$$\tilde{R}_\pm^\sigma (\tilde{T}^\sigma)^{-1} = I + (A_\pm^\sigma + B_\pm^\sigma + C_\pm^\sigma)(\theta(\sigma)I + \theta(-\sigma)\tilde{T}^{-\sigma}),$$

где

$$\begin{aligned}
A_{\pm}^{\sigma} &= \left[\frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})|\nu^{\sigma}\rangle(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) - i0\sigma p_1} - \frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})|\nu^{\sigma}\rangle(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) \pm i0} \right], \\
B_{\pm}^{\sigma} &= \left[\frac{1}{p_1 + i0\sigma} \left(\frac{(p_1 \mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) (-is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1})(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) - i0\sigma p_1} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) (-is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1})(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) \pm i0} \right], \\
C_{\pm}^{\sigma} &= \left[\frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) (-is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1}(|\nu^{\sigma}\rangle - I))(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) - i0\sigma p_1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) (-is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1}(|\nu^{\sigma}\rangle - I))(p; \mathbf{q}))}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) \pm i0} \right].
\end{aligned}$$

Эти выражения можно существенно упростить. Так, в силу (2.82) и (2.92) получаем

$$A_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) = r_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}).$$

Поскольку из формулы (3.30) вытекает

$$(-is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1})(p; \mathbf{q}) = \frac{\kappa}{\pi} \frac{\delta(p_2 - 2\mu p_1)}{p_1 + i0} \frac{1}{\mathbf{q}_{1\Re} - \lambda_-} + \text{p.c.}, \quad (3.135)$$

то для $B_{\pm}^{\sigma}$ имеем

$$B_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) = -2i\sigma\kappa \frac{\theta(\pm\sigma(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu))}{\mathbf{q}_{1\Re} - \lambda_-} \delta(p).$$

Вычисление $C_{\pm}^{\sigma}$ является более сложной задачей. Во-первых, мы запишем

$$\begin{aligned}
C_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) &= \pm 2i\pi\theta(\pm\sigma p_1) \delta(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re})) \times \\
&\quad \times (\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) (-is(Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I)^{-1}(|\nu^{\sigma}\rangle - I))(p; \mathbf{q})).
\end{aligned}$$

Это означает, что следует найти сингулярную часть $-is(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}(|\nu^{\sigma}\rangle - I)$ при $\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) = 0$. В силу (3.135) мы получаем

$$\begin{aligned}
(-is(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}(|\nu^{\sigma}\rangle - I))(p; \mathbf{q}) &= \frac{\kappa}{\pi} \int dp'_1 \frac{(v|\nu^{\sigma})(p'_1, p_2 - 2\mu(p_1 - p'_1); \mathbf{q})}{(p_1 - p'_1 + i0)(\mathbf{q}_{1\Re} + p'_1 - \lambda_-)} \times \\
&\quad \times \left[\frac{1}{\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) + (p_1 - p'_1 + i0)(p_1 + p'_1 + 2\mathbf{q}_{1\Re} - 2\mu - i0)} + \right. \\
&\quad \left. + 2\pi i\theta(\sigma p'_1(p'_1 + \mathbf{q}_{1\Re} - \mu)) \operatorname{sgn}(p'_1 + \mathbf{q}_{1\Re} - \mu) \times \right. \\
&\quad \left. \times \delta(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) + (p_1 - p'_1)(p_1 + p'_1 + 2\mathbf{q}_{1\Re} - 2\mu)) \right] + \text{p.c.} .
\end{aligned}$$

Поскольку первый член регулярен при $\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}) = 0$, то окончательно имеем

$$C_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) = -2i\kappa \frac{\theta(\sigma p_1(p_1 + \mathbf{q}_{1\Re} - \mu))}{\mathbf{q}_{1\Re} + p_1 - \lambda_{-}} r_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) = & \delta(p) \left[1 + 2i\sigma\kappa \frac{\theta(\mp\sigma(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu))}{\mathbf{q}_{1\Re} - \lambda_{\sigma}} \right] + \\ & + \left[1 - 2i\kappa \frac{\theta(\pm(p_1 + \mathbf{q}_{1\Re} - \mu))}{\mathbf{q}_{1\Re} + p_1 - \lambda_{-}} \right] r_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q}) (\theta(-\sigma) + \theta(\sigma)\tilde{t}^{\sigma}(\mathbf{q})), \end{aligned}$$

где была учтена треугольность $r_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q})$. Используя (2.82), (3.94) и первое равенство в (3.95), спектральные данные можно переписать в более компактной форме:

$$\tilde{R}_{\pm}^{\pm} = w_{\pm} R_{\pm}^{\pm} \tilde{T}^{\pm}, \quad \tilde{R}_{\pm}^{\mp} = w_{\pm} R_{\pm}^{\mp}, \quad (3.136)$$

где мы ввели

$$w_{\pm}(p; \mathbf{q}) \equiv w_{\pm}(\mathbf{q}_{1\Re})\delta(p) = \left[\theta(\mp(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)) + \theta(\pm(\mathbf{q}_{1\Re} - \mu)) \frac{\mathbf{q}_{1\Re} - \lambda_{+}}{\mathbf{q}_{1\Re} - \lambda_{-}} \right] \delta(p). \quad (3.137)$$

Заметим, что по формуле (2.1)

$$w_{\pm}^{\dagger} w_{\pm} = I, \quad (3.138)$$

а по формуле (3.94)

$$\tilde{T}^{+} = (w_{\mp} w_{\pm})^{\dagger}, \quad \tilde{T}^{-} = w_{\mp} w_{\pm}. \quad (3.139)$$

Легко доказать, что любой оператор $\tilde{R}_{\pm}^{\sigma}$ указанного в (3.136) вида, где спектральные данные $R_{\pm}^{\sigma}$ удовлетворяют характеристическим уравнениям (2.85)–(2.87), а $w_{\pm}$ удовлетворяет (3.138), удовлетворяет характеристическим уравнениям (2.96)–(2.98). Более того, посредством (2.89) и (3.138) легко проверить, что для полученных в (3.132) спектральных данных $\tilde{F}^{\sigma}$ выполнено (2.100). Для доказательства треугольности операторов $\tilde{R}_{\pm}^{\sigma}$ подставим (2.82) в (3.136). Тогда мы получаем

$$\tilde{R}_{\pm}^{\sigma} = \tilde{d}_{\pm}^{\sigma} + \tilde{r}_{\pm}^{\sigma}, \quad (3.140)$$

где $\tilde{d}_{\pm}^{\sigma}$ и $\tilde{r}_{\pm}^{\sigma}$ суть структурно независимые обобщенные функции,

$$\tilde{d}_{\pm}^{+} = w_{\pm} \tilde{T}^{+}, \quad \tilde{d}_{\pm}^{-} = w_{\pm}, \quad (3.141)$$

и

$$\tilde{r}_{\pm}^{+} = w_{\pm} r_{\pm}^{+} \tilde{T}^{+}, \quad \tilde{r}_{\pm}^{-} = w_{\pm} r_{\pm}^{-}. \quad (3.142)$$

Итак, в силу (3.90) и (3.137) $\tilde{d}_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q})$, $\sigma = +, -$, пропорционально $\delta(p)$. Помимо того, соотношения (2.83), (3.90) и (3.137) показывают, что $\tilde{r}_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q})$ пропорционально $\theta(\pm\sigma p_1)\delta(\mathcal{P}(p; \mathbf{q}_{1\Re}))$ и имеет особенность при $p_1 + \mathbf{q}_{1\Re} = \mu$. Итак, спектральные данные непрерывного спектра при преобразовании Беклунда приобретают нетривиальное “диагональное” слагаемое $\tilde{d}_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q})$, а также дополнительную особенность во “внедиагональном” слагаемом $\tilde{r}_{\pm}^{\sigma}(p; \mathbf{q})$.

3.6. Обратная задача

Мы доказали, что решение Йоста $|\tilde{\nu}\rangle$, построенное посредством преобразования Дарбу, аналитично в верхней и нижней полуплоскостях спектрального параметра $\mathbf{q}_1$, удовлетворяет асимптотическому условию (3.107) и что его предельные значения $|\tilde{\nu}^\pm\rangle$ на двух сторонах вещественной оси связаны соотношениями (2.101), скажем, для $\sigma = -$

$$|\tilde{\nu}^-\rangle\tilde{T}^- = |\tilde{\nu}^+\rangle\tilde{F}^+, \quad (3.143)$$

где (см. (3.94) и (3.132)) $\tilde{T}^-$ и $\tilde{F}^+$ заданы параметрами солитона λ и спектральными данными F^+ исходного (убывающего) потенциала. Помимо этого было показано, что значения (3.97) решения Йоста при $\mathbf{q}_1 = \lambda_\pm$ не независимы, поскольку их фурье-образы (3.104) связаны равенствами (3.106).

Докажем теперь, что $|\tilde{\nu}\rangle(p; \mathbf{q})$ в (3.86) – это единственное решение нелокальной задачи Римана–Гильберта (3.143) при условиях (3.107) и (3.106). Доказательство основано на том, что F^σ в (3.132) суть спектральные данные, которые посредством первого уравнения в (2.90) и асимптотического условия (2.42) задают однозначно разрешимую задачу Римана–Гильберта для убывающего потенциала.

Отметим сначала, что в пределе (2.77) скалярное произведение решений Йоста (2.55) и соотношение полноты (2.58) принимают вид

$$\langle\omega^\pm|\nu^\pm\rangle = I, \quad |\nu^\pm\rangle\langle\omega^\pm| = I. \quad (3.144)$$

Поэтому в силу (2.90) $F^+ = \langle\omega^+|\nu^-\rangle$, а потому с помощью формулы (3.132) можно переписать (3.143) как $|\tilde{\nu}^-\rangle\tilde{T}^- = |\tilde{\nu}^+\rangle\langle\omega^+|\nu^-\rangle$ или, используя соотношение полноты,

$$|\tilde{\nu}^+\rangle\langle\omega^+| = |\tilde{\nu}^-\rangle\tilde{T}^-\langle\omega^-|. \quad (3.145)$$

Левую часть можно рассматривать как предельное значение сверху на вещественной оси функции $(|\tilde{\nu}\rangle\langle\omega|)(p; \mathbf{q})$, аналитической в верхней полуплоскости, а правую часть – как предельное значение снизу на вещественной оси функции $(|\tilde{\nu}\rangle\tilde{T}\langle\omega|)(p; \mathbf{q})$, аналитической в нижней полуплоскости и имеющей там разрыв при $\mathbf{q}_{1\Im} = -\kappa$ вследствие аналитических свойств $\tilde{T}$ (см. (3.90)). Принимая во внимание определения $\beta(p)$ из формулы (3.9) (точнее, эрмитово сопряженное равенство) и $|\tilde{\nu}_{1,-}\rangle$ из (3.97), мы получаем, что в силу (3.90) указанный разрыв $|\tilde{\nu}\rangle\tilde{T}\langle\omega|$ совпадает с разрывом функции $-2i\kappa|\tilde{\nu}_{1,-}\rangle(Q_1 - \bar{\lambda}I)^{-1}\beta^\dagger$. Так что, переписывая (3.145) в виде

$$|\tilde{\nu}^+\rangle\langle\omega^+| + |\tilde{\nu}_{1,-}\rangle\frac{2i\kappa}{Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I}\beta^\dagger = |\tilde{\nu}^-\rangle\tilde{T}^-\langle\omega^-| + |\tilde{\nu}_{1,-}\rangle\frac{2i\kappa}{Q_{1\Re} - \bar{\lambda}I}\beta^\dagger, \quad (3.146)$$

мы приходим к равенству граничных значений двух функций, аналитических в соответствующих полуплоскостях, которые в силу (2.42), (3.90) и условия (3.107) стремятся к I при $\mathbf{q}_1 \rightarrow \infty$, вследствие чего получаем

$$|\tilde{\nu}\rangle[\theta(Q_{1\Im}) + \tilde{T}\theta(-Q_{1\Im})]\langle\omega| + |\tilde{\nu}_{1,-}\rangle\frac{2i\kappa}{Q_1 - \bar{\lambda}I}\beta^\dagger = I,$$

где было использовано обозначение (3.87). В силу (2.55) и (3.90) мы получаем, наконец,

$$|\tilde{\nu}\rangle = \left[I - |\tilde{\nu}_{1,-}\rangle \frac{2i\kappa}{Q_1 - \bar{\lambda}I} \beta^\dagger \right] |\nu\rangle \left[\theta(Q_{1\Im}) + \theta(-Q_{1\Im}) \frac{Q_1 - \bar{\lambda}I}{Q_1 - \bar{\lambda}I} \right]. \quad (3.147)$$

В правой части все члены, за исключением $|\tilde{\nu}_{1,-}\rangle$, выражены через известные объекты $|\nu\rangle$ и λ . Поэтому для решения обратной задачи следует определить в этих же терминах и $|\tilde{\nu}_{1,-}\rangle$. Если мы используем определение (3.97) со знаком минус и вычисляем (3.147) в точке $\mathbf{q}_1 = \lambda_-$, то приходим к тождеству. Таким образом, для построения $|\tilde{\nu}_{1,-}\rangle$ необходимо первое условие в (3.106). Из формулы (3.97) для знака плюс и соотношения (3.11) мы получаем из (3.147), что

$$|\tilde{\nu}_{1,+}\rangle(p) = \beta(p) - 2i\kappa \int dp' |\tilde{\nu}_{1,-}\rangle(p-p') \frac{(\beta^\dagger \beta)(p')}{p'_1 + 2i\kappa}.$$

Принимая во внимание определение (3.31), имеем

$$|\tilde{\nu}_{1,+}\rangle = \beta - |\tilde{\nu}_{1,-}\rangle(I + 2\kappa f). \quad (3.148)$$

Введем теперь

$$S(x) = \frac{2\kappa}{1 + e^{-2\kappa(x_1 + 2\mu x_2 - x_0)}}, \quad (3.149)$$

$$F(x) = i \int dp e^{-ipx} \frac{(\beta^\dagger \beta - I)(p)}{p_1 + 2i\kappa}, \quad (3.150)$$

т.е. фурье-образы s и f (см. (3.30) и (3.31), соответственно). Тогда с использованием (3.104) можно переписать (3.148) в виде

$$\tilde{\Phi}_{1,+}(x) = \Phi(x, \lambda_+) - e^{2\kappa(x_1 + 2\mu x_2)} \tilde{\Phi}_{1,-}(x) [1 + 2\kappa F(x)].$$

Подставляя сюда $\tilde{\Phi}_{1,+}(x)$ из (3.106), мы получаем

$$\tilde{\Phi}_{1,-}(x) = \frac{e^{-2\kappa(x_1 + 2\mu x_2)}}{2\kappa} \Phi(x, \lambda_+) \frac{S(x)}{1 + S(x)F(x)}. \quad (3.151)$$

Обращая теперь преобразование Фурье (3.104) и используя (3.149) и (3.150), мы проверяем, что условие (3.151) является фурье-образом равенства (3.101). В свою очередь, (3.147) есть в точности (3.86), куда подставлено выражение для $U^\dagger$ из (3.45). Это и доказывает однозначную разрешимость нелокальной задачи Римана–Гильберта, сформулированной в этом разделе.

3.7. Поведение потенциала на больших расстояниях

Для того чтобы исследовать поведение потенциала $\tilde{u}(x)$ на больших расстояниях, перепишем (3.41), используя (3.1) и (3.39), в виде

$$\tilde{u}(x) = u(x) - 2\partial_{x_1}^2 \log \left(\frac{1}{S(x)} + F(x) \right), \quad (3.152)$$

где $S(x)$ и $F(x)$ определены формулами (3.149) и (3.150). Выберем некоторое направление на x -плоскости

$$\xi' \equiv x_1 + 2\mu'x_2 = \text{const}, \quad (3.153)$$

где μ' – вещественный параметр. Обозначим через ξ специальное направление, для которого $\mu' = \mu$. В силу (3.149) мы вместо (3.152) имеем

$$\tilde{u}(x) = u(x) - 2\partial_{\xi'}^2 \log(1 + e^{-2\kappa(\xi' - x_0) - 4\kappa(\mu - \mu')x_2} + 2\kappa F(\xi' - 2\mu'x_2, x_2)). \quad (3.154)$$

Тогда асимптотическое поведение на больших расстояниях вдоль направлений $\xi' = \text{const}$ получается путем вычисления $F(\xi' - 2\mu'x_2, x_2)$ при больших x_2 . Подставляя в (3.150) $(2\pi)^2\beta(p) = \int dx e^{ipx}\chi(x, \lambda)$, что есть прямое следствие определений (2.27) и (3.11), имеем

$$F(\xi' - 2\mu'x_2, x_2) = \int_{-\infty}^{\xi'} dy_1 e^{2\kappa(y_1 - \xi')} [|\chi(y_1 - 2\mu'x_2, x_2, \lambda)|^2 - 1], \quad (3.155)$$

а потому эту асимптотику можно получить из асимптотики $\chi(y_1 - 2\mu'x_2, x_2, \lambda)$. Для нахождения ведущего члена необходимо знать асимптотическое поведение $\chi(y_1 - 2\mu'x_2, x_2, \lambda)$ при больших x_2 с точностью до членов порядка $1/x_2^3$ включительно. Посредством интегрального уравнения (2.33), принимая во внимание (2.36), получаем

$$\chi(y_1 - 2\mu'x_2, x_2, \lambda) = 1 + \frac{d_{10}}{x_2} + \frac{d_{20} + d_{21}y_1}{x_2^2} + \frac{d_{30} + d_{31}y_1 + d_{32}y_1^2}{x_2^3} + O(1/x_2^4), \quad (3.156)$$

где

$$d_{10} = \frac{\pi\gamma(0, \lambda)}{\lambda - \mu'}, \quad d_{21} = -\frac{\pi\gamma(0, \lambda)}{2(\lambda - \mu')^2}, \quad d_{31} = \frac{\pi\gamma(0, \lambda)}{4(\lambda - \mu')^3}, \quad (3.157)$$

а

$$\gamma(0; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx u(x) \chi(x, \lambda). \quad (3.158)$$

Вычисление других постоянных коэффициентов d_{ij} довольно сложно, но оказывается, что нам нужно знать лишь d_{10} и d_{32} .

Теперь можно описать асимптотическое поведение $\tilde{u}(x)$ в зависимости от направления. В направлении $\xi = \text{const}$, т.е. для $\mu' = \mu$ в (3.153), мы, как и ожидалось, имеем

чисто односолитонное поведение, однако с поправкой порядка $O(1/x_2)$. Точнее, мы получаем

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi - 2\mu x_2, x_2) - u(\xi - 2\mu x_2, x_2) &= \\ &= -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(\xi - x_0)} \left[1 - \frac{d_{10} + \bar{d}_{10}}{x_2} \operatorname{th} \kappa(\xi - x_0) \right] + O(x_2^{-2}), \quad (3.159) \\ \xi &\equiv x_1 + 2\mu x_2 = \operatorname{const}, \quad x_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Вдоль направления $\xi' = \operatorname{const}$ при $\mu' \neq \mu$ и $(\mu - \mu')x_2 \rightarrow -\infty$ поведение $\tilde{u}(x)$ по сравнению с поведением фонового потенциала $u(x)$ имеет поправку, убывающую экспоненциально, т.е.

$$\tilde{u}(\xi' - 2\mu x_2, x_2) - u(\xi' - 2\mu x_2, x_2) = -8\kappa^2 e^{2\kappa(\xi' - x_0) + 4\kappa(\mu - \mu')x_2} (1 + O(1/x_2)), \quad (3.160)$$

в то время как для $(\mu - \mu')x_2 \rightarrow +\infty$ поправка убывает степенным образом, т.е.

$$\tilde{u}(\xi' - 2\mu x_2, x_2) - u(\xi' - 2\mu x_2, x_2) = -4 \frac{d_{32} + \bar{d}_{32}}{x_2^3} + O(1/x_2^4). \quad (3.161)$$

Мы заключаем, что направление $\xi = \operatorname{const}$ волнового солитона, выходящего из фонового потенциала на больших расстояниях делит x -плоскость на две области с различным асимптотическим поведением. В первой области (слева от солитона), исходный потенциал $u(x)$ модифицируется на больших расстояниях посредством экспоненциально убывающего слагаемого, в то время как во второй области (справа) — посредством члена, убывающего как $1/x_2^3$. Если рассмотреть случай $\kappa < 0$, то роль этих двух областей меняется.

Существенно отметить, что это асимптотическое поведение не зависит от свойств гладкости или убывания фонового потенциала $u(x)$. Этот фоновый потенциал может быть мал в какой угодно норме, тем не менее асимптотическое поведение модифицируется указанным выше образом. Более того, поскольку коэффициенты d_{ij} в силу (3.157) зависят от направления $\xi' = \operatorname{const}$, то единственная возможность обратить в ноль ведущий член асимптотики — наложить условие

$$\gamma(0; \lambda) = 0. \quad (3.162)$$

Тогда легко показать, что остаются члены следующего порядка, а для того чтобы обратить в ноль все рациональные члены, необходимо наложить на фоновый потенциал $u(x)$ бесконечный набор связей. С другой стороны, для того чтобы обратить в ноль поправку к односолитонной асимптотике порядка $1/x_2$ на больших расстояниях, т.е. ведущий член в (3.159), в соответствии с формулами (3.157) необходимо и достаточно наложить условие

$$\gamma_{\Im}(0; \lambda) = 0. \quad (3.163)$$

Отметим, что функция $\gamma(0; \lambda)$, как известно, является генератором интегралов движения для эволюции, задаваемой уравнением КПП (1.2), и может быть выражена в терминах спектральных данных через посредство дисперсионного соотношения (см. формулу (224) в [10])

$$\gamma(0; \lambda) = v(0) - \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \sum_{\sigma=\pm} \int dp_2'' ((R_+^\sigma - R_-^\sigma)(R_+^{-\sigma} - R_-^{-\sigma})^\dagger)(0, p_2''; \lambda'), \quad (3.164)$$

и соответственно связи, накладываемые на спектральные данные при подстановке (3.164) как в (3.162), так и в (3.163), согласованы с временной динамикой уравнения КПП.

4. ОДЕВАНИЕ ОДНОСОЛИТОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

В предыдущих разделах мы исследовали спектральные свойства нестационарного уравнения Шредингера (1.1) со специальным потенциалом, описывающим солитон на произвольном фоне. Этот потенциал был получен посредством преобразования Беклунда, дающего нелинейную суперпозицию чисто односолитонного и произвольного убывающего потенциалов. В этом случае мы явно продемонстрировали, что, несмотря на присутствие логарифмических особенностей в резольвенте, решения Йоста по-прежнему секционны аналитичны с разрезом по вещественной оси спектрального параметра, что спектральные данные удовлетворяют характеристическим уравнениям (2.96)–(2.98), и, более того, проверили выполнение всех конструкций общей схемы для неубывающих потенциалов, представленной в разделе 2.

Потенциал, построенный при помощи такого преобразования Беклунда, однако, не есть наиболее общее возмущение солитонного потенциала. Общий случай может быть исследован путем специальной модификации процедуры одевания. Такая модификация была предложена в [26], где был рассмотрен пример уравнения КПП. Основное ее достоинство – то, что она была сформулирована в рамках резольвентного подхода, а следовательно, вне зависимости от конкретного выбора рассматриваемого лаковского оператора L . Конечно, пользуясь этим методом, нельзя выписать явные формулы, как в случае преобразования Беклунда, но может быть получена конкретная информация об аналитических свойствах решений Йоста, а тогда и о структурных свойствах данных рассеяния.

Пусть резольвента M' и соответственно решение Йоста $|\nu'\rangle$ и данные рассеяния потенциала u' известны, и пусть потенциал u задан как

$$u = u' + u_2, \quad (4.1)$$

где $u_2(x_1, x_2)$ – гладкая, вещественная, убывающая функция двух переменных, которая рассматривается как возмущение u' . Тогда мы можем обратиться к тождеству Гильберта (2.20), где теперь L' и M' суть спектральный оператор и резольвента, соответствующие u' . Для резольвенты M , соответствующей u , мы получаем интегральные уравнения

$$M = M' + M'v_2M, \quad M = M' + Mv_2M', \quad (4.2)$$

где v_2 — фурье-образ (2.12) от u_2 . Тогда для решения Йоста $|\nu\rangle$ посредством редукции (2.63) получаем интегральное уравнение

$$|\nu\rangle(p; \mathbf{q}) = |\nu'\rangle(p; \mathbf{q}) + \int dp' G'(p, p', \mathbf{q}_1)(v_2|\nu\rangle)(p'; \mathbf{q}), \quad (4.3)$$

где функция Грина G' подобно (2.39) есть следующая редукция резольвенты M' :

$$G'(p, p', \mathbf{q}_1) = M'(p - p'; \ell(\mathbf{q}_1) + p'), \quad (4.4)$$

а вектор ℓ определен в (2.28). Уравнения (4.2) и (4.3) обобщают исходные интегральные уравнения (2.18) и (2.30) для резольвенты и решения Йоста. Аналитические свойства M и $|\nu\rangle$ по переменной $\mathbf{q}$ можно определить исходя из аналитических свойств M' тем же методом, какой мы использовали при рассмотрении интегральных уравнений (2.18) и (2.30). Конечно, мы не получаем новой информации, если оба потенциала u' и u_2 являются гладкими и убывающими. Более интересен случай, когда u' не является убывающим, а соответственно v' не регулярен. В частности, нас интересует случай $u' = \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ — потенциал, построенный в разделе 3. При этом $M' = \widetilde{M}$, $G' = \widetilde{G}$ и $|\nu'\rangle = |\tilde{\nu}\rangle$. В силу (4.2) и (4.3) резольвента M и решение Йоста $|\nu\rangle$ для u наследуют свойства резольвенты $\widetilde{M}$, которые были получены выше. В частности, $M(p; \mathbf{q})$ имеет дополнительный разрез при $\mathbf{q}_{2\Im} = 2\mu\mathbf{q}_{1\Im}$, $|\mathbf{q}_{1\Im}| < \kappa$. Для исследования дополнительного разреза решения Йоста преобразуем (4.3) с помощью (2.27). Мы получаем

$$\chi(x, \mathbf{k}) = \tilde{\chi}(x, \mathbf{k}) + \int dx' \widetilde{G}(x, x', \mathbf{k}) u_2(x') \chi(x', \mathbf{k}), \quad (4.5)$$

где функция Грина в соответствии с (2.38) и (2.39) равна

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(x, x', \mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp \int dp' e^{-ipx + ip'x'} \widetilde{M}(p - p'; p' + \ell(\mathbf{k})) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\ell_{\Re}(\mathbf{k})(x-x')} \int dp \int d\mathbf{q}_{\Re} e^{-i(p+\mathbf{q}_{\Re})x + i\mathbf{q}_{\Re}x'} \widetilde{M}(p; \mathbf{q}_{\Re} + i\ell_{\Im}(\mathbf{k})). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Итак, принимая во внимание (2.29), (3.113) и (3.130), мы получаем, что эта функция Грина имеет разрез при $\mathbf{k}_{\Re} = \mu$, $\kappa > \mathbf{k}_{\Im} > -\kappa$ и следующие логарифмические особенности в концевых точках $\lambda_{\pm}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(x, x', \mathbf{k}) &= \frac{\kappa}{\pi} \log(\mp i(\mathbf{k} - \lambda_{\pm})) e^{i\ell(\lambda_{\pm})(x-x')} \widetilde{\Phi}_{1,+}(x) \widetilde{\Psi}_{1,+}(x') + O(1) = \\ &= \frac{\kappa}{\pi} \log(\mp i(\mathbf{k} - \lambda_{\pm})) \tilde{\chi}_{1,\pm}(x) \tilde{\xi}_{1,\pm}(x') + O(1), \quad \mathbf{k} \rightarrow \lambda_{\pm}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Этот разрез обусловлен разрывом $\widetilde{M}(p; \mathbf{q})$ при $\mathbf{q}_{2\Im} = 2\mu\mathbf{q}_{1\Im}$, полученным в разделе 3.5. Действительно, если ввести

$$\Delta \widetilde{G}(x, x', \mathbf{k}) = \widetilde{G}(x, x', \mu + 0 + i\mathbf{k}_{\Im}) - \widetilde{G}(x, x', \mu - 0 + i\mathbf{k}_{\Im}), \quad (4.8)$$

то из соотношений (2.41), (3.111) и (4.6) мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{G}(x, x', \mathbf{k}) &= \frac{\text{sgn } \mathbf{k}_{\Im}}{(2\pi)^2} e^{i\ell_{\Re}(\mu + i\mathbf{k}_{\Im})(x-x')} \times \\ &\times \int dp \int d\mathbf{q}_{\Re} e^{-i(p+\mathbf{q}_{\Re})x + i\mathbf{q}_{\Re}x'} \Delta \tilde{M}(p; \mathbf{q}_{\Re} + i\ell_{\Im}(\mu + i\mathbf{k}_{\Im})), \end{aligned} \quad (4.9)$$

а тогда по формуле (3.115) определяем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{G}(x, x', \mathbf{k}) &= -2i\kappa \text{sgn } \mathbf{k}_{\Im} \theta(\kappa - |\mathbf{k}_{\Im}|) e^{i\ell(\mu + i\mathbf{k}_{\Im})(x-x')} \tilde{\Phi}_{1,+}(x) \tilde{\Psi}_{1,+}(x') = \\ &= -2i\kappa \text{sgn } \mathbf{k}_{\Im} \theta(\kappa - |\mathbf{k}_{\Im}|) \times \\ &\times e^{i[\ell(\mu + i\mathbf{k}_{\Im}) - \ell(\lambda_{\pm})](x-x')} \tilde{\chi}_{1,\pm}(x) \tilde{\xi}_{1,\pm}(x'). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В специальном случае, когда потенциал $\tilde{u}$ равен чисто односолитонному потенциалу u_1 , как в п. 3.2.2, наличие этого дополнительного разреза в теории возмущенного солитонного потенциала было установлено и исследовано (более традиционными методами) несколько лет тому назад в [27].

В силу (4.5) решение $\tilde{Y}$ оста имеет дополнительный разрыв при $\mathbf{k}_{\Re} = \mu$ и $\kappa > \mathbf{k}_{\Im} > -\kappa$. Явно мы имеем

$$\begin{aligned} \chi(x, \mu + 0 + i\mathbf{k}_{\Im}) &= \tilde{\chi}(x, \mu + i\mathbf{k}_{\Im}) + \\ &+ \int dx' \tilde{G}(x, x', \mu + 0 + i\mathbf{k}_{\Im}) u_2(x') \chi(x', \mu + 0 + i\mathbf{k}_{\Im}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \chi(x, \mu - 0 + i\mathbf{k}_{\Im}) &= \tilde{\chi}(x, \mu + i\mathbf{k}_{\Im}) + \\ &+ \int dx' \tilde{G}(x, x', \mu + 0 + i\mathbf{k}_{\Im}) u_2(x') \chi(x', \mu - 0 + i\mathbf{k}_{\Im}) - \\ &- \int dx' \Delta \tilde{G}(x, x', \mathbf{k}) u_2(x') \chi(x', \mu - 0 + i\mathbf{k}_{\Im}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где было использовано соотношение (4.8). Поэтому мы ожидаем, что в случае возмущения u_2 в общем положении необходимо вводить дополнительные спектральные данные и что теория соответственно может потребовать существенной модификации по сравнению с традиционным случаем. Мы предполагаем сделать это в дальнейшем.

Подставляя (4.10) в (4.12), мы получаем, что этот дополнительный разрез отсутствует тогда и только тогда, когда

$$\int dx \tilde{\Psi}_{1,+}(x) u_2(x) \Phi(x, \mu + i\mathbf{k}_{\Im}) = 0, \quad \kappa \geq \mathbf{k}_{\Im} \geq -\kappa, \quad (4.13)$$

где Φ строится с помощью χ по формуле (2.29). Поскольку Φ – решение $\tilde{Y}$ оста для u , то это условие является неявным условием на возмущение $u_2(x)$.

Кажется, что существование логарифмических особенностей функций Грина и решений Йоста находится в противоречии с известными свойствами этих объектов в одномерной теории. На самом деле противоречия нет, поскольку эти дополнительные особенности являются результатом погружения одномерных объектов в двумерную теорию и при переходе назад в одно пространственное измерение они исчезают. Чтобы показать это, рассмотрим специальный случай, когда $\tilde{u}$ — чисто односолитонный потенциал u_1 , и для простоты выберем $\mu = 0$, так что $u_1 = u_1(x_1)$. Для этого случая резольвента задана в (2.62), где $M_{\mathbf{z}}(p_1; \mathbf{q}_1)$ — одномерная резольвента, соответствующая потенциалу u_1 . Тогда из формулы (4.6) находим

$$G_1(x, x', \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dp_1 \int dp'_1 \times \\ \times \int dp_2 e^{-ip_1 x_1 + ip'_1 x'_1 - ip_2(x_2 - x'_2)} M_{p_2 + \mathbf{k}^2}(p_1 - p'_1; p'_1 + \mathbf{k}). \quad (4.14)$$

Следует подчеркнуть, что это двумерная функция Грина одномерного потенциала $u_1(x_1)$, которая удовлетворяет уравнению

$$(i\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - 2i\mathbf{k}\partial_{x_1} - u_1(x_1))G_1(x, x', \mathbf{k}) = \delta(x - x'), \quad (4.15)$$

где $\delta(x)$ — двумерная δ -функция, и что для построения одномерной функции Грина $g_1(x_1, x'_1, \mathbf{k})$, которая удовлетворяет уравнению

$$(\partial_{x_1}^2 - 2i\mathbf{k}\partial_{x_1} - u_1(x_1))g_1(x_1, x'_1, \mathbf{k}) = \delta(x_1 - x'_1), \quad (4.16)$$

необходимо проинтегрировать G_1 по x_2 . При обсуждении (2.69) было показано, что даже в случае нулевого потенциала этот интеграл не существует. Поэтому по аналогии с определениями (2.63) и (2.64) решений Йоста следует использовать предельную процедуру, которая в x -пространстве принимает вид

$$g_1(x_1, x'_1, \mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int dx_2 e^{i\varepsilon(x_2 - x'_2)} G_1(x, x', \mathbf{k}). \quad (4.17)$$

Когда $\tilde{u} = 0$, легко проверить, что эта регуляризация является не чем иным, как x -версией той, что использовалась в (2.67) и (2.68) при построении интегральных уравнений для решений Йоста. Определим теперь Δg_1 , применяя то же самое преобразование к ΔG_1 . Тогда по формуле (4.10) мы получаем

$$\frac{1}{4\pi i \kappa} \Delta g_1(x, x', \mathbf{k}) = -\operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\Im} e^{(\pm \kappa - \mathbf{k}_{\Im})(x_1 - x'_1)} \times \\ \times \tilde{\chi}_{1,\pm}(x_1) \tilde{\xi}_{1,\pm}(x'_1) \theta(\kappa - |\mathbf{k}_{\Im}|) \delta(\varepsilon + \kappa^2 - \mathbf{k}_{\Im}^2), \quad (4.18)$$

что есть тождественный ноль, т.к. нулю равно произведение θ - и δ -функций. Итак, как и должно быть, одномерная функция Грина не имеет ни дополнительного разреза в комплексной плоскости, ни логарифмических особенностей.

А. К. Погребков благодарит своих коллег из Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce (Италия) за гостеприимство и плодотворные научные дискуссии.

Работа частично поддержана M.U.R.S.T и Sezione INFN, Lecce (Италия), грантом РФФИ № 96-01-00344 и грантом INTAS № 93-166-ext.

Список литературы

- [1] В. С. Дрюма. Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 19. С. 219.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. С. 43.
- [3] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили. ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 753.
- [4] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. In: Lecture Notes Series. Cambridge: University of Cambridge, 1991. V. 49.
- [5] B. G. Konopelchenko. Solitons in Multidimensions. Singapore: World Scientific, 1993.
- [6] V. E. Zakharov, S. V. Manakov. Sov. Sci. Rev. 1979. V. A1. P. 133; S. V. Manakov. Physica D. 1981. V. 3. P. 420.
- [7] A. S. Fokas, M. J. Ablowitz. Stud. Appl. Math. 1983. V. 69. P. 211.
- [8] M. J. Ablowitz, J. Villarroel. Stud. Appl. Math. 1991. V. 85. P. 195.
- [9] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. Inverse Problems. 1994. V. 10. P. 505.
- [10] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 4683.
- [11] M. Boiti, J. Léon, F. Pempinelli. Phys. Lett. A. 1989. V. 141. P. 96.
- [12] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov. Inverse Problems. 1992. V. 8. P. 331.
- [13] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev. Phys. Rev. Lett. A. 1977. V. 63. P. 205.
- [14] Б. А. Дубровин, Т. М. Маланюк, И. М. Кричевер, В. Г. Мазаньков. ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. № 4. С. 631.
- [15] A. S. Fokas, V. E. Zakharov. J. Nonlinear Sci. 1992. V. 2. P. 109.
- [16] J. M. Ghidaglia, J. C. Saut. Nonlinearity. 1990. V. 3. P. 475.
- [17] M. Boiti, J. Léon, L. Martina, F. Pempinelli. Phys. Lett. A. 1988. V. 132. P. 432.
- [18] M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Chaos, Solitons and Fractals. 1995. V. 5. P. 2377.
- [19] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov. Resolvent approach for the non-stationary Schrödinger equation. Standard case of rapidly decreasing potential. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Eds M. Boiti, L. Martina, and F. Pempinelli. Singapore: World Scientific Pub. Co., 1992. P. 97.
- [20] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov. ТМФ. 1992. Т. 93. С. 181.
- [21] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. ТМФ. 1994. Т. 99. С. 185.
- [22] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. Spectral theory of solitons on a generic background for the KPI equation. In: Nonlinear Physics. Theory and Experiment. Eds E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, and F. Pempinelli. Singapore: World Scientific Pub. Co., 1996. P. 37.
- [23] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. Inverse Problems. 1997. V. 13. P. L7.
- [24] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer, 1991.
- [25] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov. Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 43.
- [26] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. Physica D. 1995. V. 87. P. 123.
- [27] A. S. Fokas, A. K. Pogrebkov (unpublished).
- [28] В. Г. Липовский. Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. С. 35–45.
- [29] Xin Zhou. Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 551.
- [30] M. Boiti, B. Konopelchenko, F. Pempinelli. Inverse Problems. 1985. V. 1. P. 33.
- [31] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции. Т. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 15.XII.1997 г.