Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Кляцкин, К. В. Кошель, К статистической теории структурообразования в параметрически возбуждаемых динамических системах с гауссовой накачкой, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 3, 475–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:22:24

© 2016 г.

В. И. Кляцкин*, К. В. Кошель^{†‡}

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ГАУССОВОЙ НАКАЧКОЙ

На основе идей статистической топографии анализируется проблема возникновения стохастического структурообразования в линейной и квазилинейной задачах, описываемых уравнениями в частных производных первого порядка. Особенностью рассматриваемых задач является возникновение параметрического возбуждения на фоне гауссовой накачки. Получены уравнения для плотности вероятностей решений этих уравнений, из которых следует, что стохастическое структурообразование возможно с вероятностью единица, т. е. почти в каждой реализации случайных параметров среды.

Ключевые слова: уравнение Лиувилля, диффузионное приближение, плотность вероятностей, интегральная функция распределения вероятностей, кривая типичной реализации, статистическая топография, кластеризация.

DOI: 10.4213/tmf8882

1. ВВЕДЕНИЕ. О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Стохастическое структурообразование в случайных средах в виде кластеризации связано с параметрическим возбуждением различных физических полей в этих средах. Кластеризация какого-либо положительного поля $f(\mathbf{r}, t)$ – это возникновение

Работа проводилась при поддержке РФФИ (проект № 13-05-00004) и частично поддержана Дальневосточным федеральным университетом (проект НФ15-01-12_и).

*Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Москва, Россия.
E-mail: klyatskin@yandex.ru

[†]Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Россия. E-mail: kvkoshel@poi.dvo.ru

[‡]Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия

компактных областей с большими величинами данного поля на фоне окружающих областей с относительно низкими их значениями. При статистическом усреднении вся информация о кластеризации, естественно, пропадает. Такие задачи имеют место в гидродинамике (пассивная скалярная примесь в турбулентном потоке), в магнитной гидродинамике (пассивная векторная примесь – магнитное поле в турбулентном потоке) и при изучении распространения волн различной природы (акустические, радиоволны, свет и лазерное излучение) в случайных средах. Все эти задачи обычно рассматриваются в кинематическом приближении и характеризуются двумя важнейшими свойствами.

1. В фиксированных точках пространства реализации поля во времени являются случайными процессами, которые имеют своеобразный характер: они представляют собой пики, появляющиеся в случайные моменты времени. Промежутки между ними характеризуются малой интенсивностью и большой протяженностью (перемежаемость). Такая реализация случайного процесса во времени для любой точки пространства обусловлена логнормальным одновременным распределением вероятностей, имеющим пологий хвост. Большие, но редкие выбросы (флуктуации) обусловлены этими хвостами. При этом основными статистическими характеристиками случайного процесса $z(t)$ являются, во-первых, одновременная плотность вероятностей $P(z, t) = \langle \delta(z(t) - z) \rangle$, где дельта-функция Дирака $\varphi(z, t) = \delta(z(t) - z)$, стоящая под знаком усреднения, называется *индикаторной функцией*, и, во-вторых, интегральная функция распределения вероятностей, определяющая вероятность того, что $z(t) < Z$ в момент времени t ,

$$F(t, Z) = P(z(t) < Z) = \int_{-\infty}^Z dz P(z, t).$$

Следовательно, $F(t, Z) = \langle \theta(Z - z(t)) \rangle$, где $\theta(z)$ – функция Хевисайда, $F(t, \infty) = 1$. Соответственно, интегральная функция распределения вероятностей, определяющая вероятность того, что $z(t) > Z$ в момент времени t , имеет вид

$$\Phi(t, Z) = P(z(t) > Z) = \int_Z^{\infty} dz P(z, t) = \langle \theta(z(t) - Z) \rangle = 1 - F(t, Z).$$

Другими важными характеристиками являются одновременные моментные функции $\langle z^n(t) \rangle$, кривая типичной реализации $z^*(t)$, которая характеризует основные особенности поведения реализаций случайных процессов. Она является медианой интегральной функции распределения вероятностей и определяется как решение алгебраического уравнения

$$\Phi(t, z^*(t)) = \int_{z^*(t)}^{\infty} dz P(z, t) = \frac{1}{2}.$$

При этом кривая типичной реализации гауссова случайного процесса $z(t)$ совпадает со средним значением этого процесса, а кривая типичной реализации положительно логнормального случайного процесса совпадает с ляпуновской экспонентой этого процесса, а именно $z^*(t) = e^{\langle \ln(z(t)) \rangle}$.

2. Структурообразование стохастического поля происходит в физическом пространстве, и для его описания применяется статистический анализ на основе идей

статистической топографии стохастического поля. При этом в простейшей постановке задачи, при наличии пространственной статистической однородности, все одноточечные статистические характеристики случайного поля не зависят от пространственной точки. Следовательно, уравнение для одноточечной плотности вероятностей случайного поля совпадает по форме с уравнением для плотности вероятностей случайного процесса в каждой фиксированной точке, хотя смысл этих уравнений совершенно различный. Соответственно и статистический анализ уравнений должен быть разным в этих случаях. Подробное обсуждение этих вопросов содержится в монографиях [1]–[4] и работах [5]–[9].

Кластеризация случайных физических полей в первую очередь возникает в задачах турбулентного переноса в случайном поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Исходными простейшими стохастическими уравнениями математической физики для них являются уравнения в частных производных первого порядка, такие как уравнение непрерывности для поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r}, t)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (1)$$

и уравнение индукции для бездивергентного магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \left(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – поле турбулентной скорости, которое мы считаем однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени, с заданными статистическими свойствами.

Динамические системы (1), (2) консервативны, и в них сохраняются такие интегральные характеристики, как общая масса примеси $M = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, t)$ и поток магнитного поля $\int d\mathbf{r} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$.

Для однородных начальных условий $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0$, $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0$ и статистически однородных в пространстве случайных параметров из консервативности динамических систем (1), (2) вытекают равенства

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho_0, \quad \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathbf{H}_0.$$

Особенностями уравнений (1) и (2) являются параметрическое возбуждение со временем поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ в каждой реализации (для сжимаемого потока жидкости) [10]–[12] и параметрическое возбуждение энергии магнитного поля $E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)$ (для стохастического потока жидкости) [13]. Для магнитного поля этот процесс называется *стохастическим динамо*. Такое параметрическое возбуждение сопровождается на начальных стадиях эволюции динамических систем возрастанием со временем всех традиционных статистических характеристик решения задачи типа моментных функций поля плотности $\langle \rho^n(\mathbf{r}, t) \rangle$ и энергии магнитного поля $\langle E^n(\mathbf{r}, t) \rangle$, а также их корреляционных функций любого порядка. При этом при определенных условиях практически в каждой реализации соответствующих полей и могут зарождаться пространственные структурные образования! Условия возникновения кластерных структур, связанные со статистическими характеристиками поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, подробно обсуждаются в монографиях [1]–[4] и работах [5]–[9].

1.1. Статистические характеристики случайного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Будем считать, что случайное поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ является гауссовым, статистически однородным и изотропным в пространстве и статистически стационарным во времени, а его корреляционная и спектральная функции имеют вид

$$B_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} E_{ij}(\mathbf{k}, t - t') e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),} \quad (3)$$

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} B_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

В общем случае произвольного случайного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ спектральная функция $E_{ij}(\mathbf{k}, t)$ имеет структуру

$$E_{ij}(\mathbf{k}, t) = E^s(k, t) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \frac{k_i k_j}{k^2} E^p(k, t), \quad (4)$$

где $E^s(k, t)$ и $E^p(k, t)$ описывают соответственно соленоидальную и потенциальную компоненты спектральной функции поля скорости. Дисперсия поля скорости при этом равна

$$\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}(\mathbf{0}, 0) = \int d\mathbf{k} E_{ii}(\mathbf{k}, 0) = \int d\mathbf{k} [(d-1)E^s(k, 0) + E^p(k, 0)], \quad (5)$$

где d – размерность пространства, а по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Введем важную для дальнейшего статистического анализа функцию

$$B_{ij}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{r}, \tau), \quad (6)$$

которая определяет все статистические характеристики решения задачи в диффузионном приближении (см., например, монографии [1]–[4]). При этом

$$B_{ii}(\mathbf{0}) = \int_0^\infty d\tau B_{ii}(\mathbf{0}, \tau) = \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} E_{ii}(\mathbf{k}, \tau) = \sigma_s^2 \tau_s + \sigma_p^2 \tau_p, \quad (7)$$

где σ_s^2 и σ_p^2 – дисперсии соленоидальной и потенциальной компонент поля скорости, а τ_s и τ_p – их временные радиусы корреляции.

Далее при статистическом анализе задачи нам понадобятся вторые пространственные производные корреляционной функции случайного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в нуле. Для этих производных в силу сделанных предположений о свойствах случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ имеет место тензорное равенство

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}(0)}{\partial r_k \partial r_l} = \frac{D^s}{d(d+2)} [(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{kj}\delta_{li}] +$$

$$+ \frac{D^p}{d(d+2)} [\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}], \quad (8)$$

где

$$D^s = \int d\mathbf{k} k^2 E^s(k) = 4\pi \int_0^\infty dk k^4 E^s(k) = \frac{1}{d-1} \int_0^\infty d\tau \langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t + \tau) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

$$D^p = \int d\mathbf{k} k^2 E^p(k) = 4\pi \int_0^\infty dk k^4 E^p(k) = \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t + \tau)}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle \quad (9)$$

и $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – вихрь, а $\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial \mathbf{r}$ – дивергенция поля скорости.

1.2. Простейшая модель поля скорости, допускающая решение задачи в аналитическом виде. Рассмотрим простейшее модельное поле скорости вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)f(\mathbf{kr}),$$

где $\mathbf{v}(t)$ – гауссов векторный случайный процесс белого шума, а $f(\mathbf{kr})$ – периодическая функция. Выбирая ось x в направлении вектора $\mathbf{k}$, видим, что в рамках этой модели поле скорости зависит от одной пространственной переменной, $f(\mathbf{kr}) = f(kx)$. Отметим, что модель поля скорости вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t) \sin 2(\mathbf{kr}), \quad (10)$$

впервые предложенная в работе [14], позволила получить как аналитическое решение уравнения непрерывности (1) для скалярного поля плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$, так и решение уравнения (2) для векторного магнитного поля и, следовательно, проследить возникновение и эволюцию кластеризации этих полей в отдельных реализациях случайного поля скорости. Отметим, что такой вид функции $f(\mathbf{kr})$ соответствует первому члену ряда разложения функции $f(\mathbf{kr})$ по гармоническим составляющим и обычно используется при численном моделировании задачи.

В рассматриваемом случае решение уравнения для поля плотности имеет вид

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho_0} = \frac{1}{e^{T(t)} \cos^2(kx) + e^{-T(t)} \sin^2(kx)}, \quad (11)$$

где

$$T(t) = 2k \int_0^t d\tau v_x(\tau) \quad (12)$$

– винеровский случайный процесс. Из выражения (11) видно, что величина поля плотности везде мала, кроме окрестностей точек $kx = n\pi/2$, в которых мы имеем $\rho(x, t)/\rho_0 = e^{\pm T(t)}$, и, следовательно, значение плотности достаточно велико при соответствующем знаке случайного фактора $T(t)$. Таким образом, для рассматриваемой задачи кластерная структура поля плотности в эйлеровом описании формируется в окрестностях точек

$$kx = n \frac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Аналогичным образом для магнитного поля видим, что в рамках рассматриваемой модели (10) x -компонента магнитного поля сохраняется, т.е. $H_x(\mathbf{r}, t) = H_{x0}$, а поперечная составляющая магнитного поля $\mathbf{H}_\perp(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right) \mathbf{H}_\perp(x, t) = \mathbf{v}_\perp(t) \frac{\partial f(x)}{\partial x} H_{x0} \quad (13)$$

с начальным условием $\mathbf{H}_\perp(x, 0) = \mathbf{H}_{\perp 0}$, решение которого можно записать в статистически эквивалентном виде (при $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$)

$$\mathbf{H}_\perp(x, t) = 2kH_{x0} \int_0^t d\tau \frac{e^{T(\tau)} \cos^2(kx) - e^{-T(\tau)} \sin^2(kx)}{[e^{T(\tau)} \cos^2(kx) + e^{-T(\tau)} \sin^2(kx)]^2} v_x(\tau) \mathbf{v}_\perp(\tau). \quad (14)$$

Выражение в правой части равенства описывает генерацию магнитного поля в поперечной (y, z) -плоскости, вызванную наличием начального поля H_{x0} . При $\mathbf{H}_{\perp 0} = 0$

Рис. 1. Динамика исчезновения кластера в точке 0 и возникновения кластера в точке $\pi/2$. Кривые, маркированные кружком, отвечают моменту времени $t = 10.4$, треугольником – моменту времени $t = 10.8$, квадратом – моменту времени $t = 11.8$.

это выражение, пропорциональное квадрату случайного поля скорости, определяет ситуацию. Данное поле подобно полю плотности также кластеризуется, что наблюдалось в результатах численного моделирования (см. работы [13], [15] и монографии [1]–[4]), представленных на рис. 1а, где в процентном отношении представлена доля энергии генерируемого магнитного поля, содержащаяся в кластере, по отношению ко всей энергии в слое в рассматриваемый момент времени. На рис. 1б видна динамика перетекания возмущений магнитной энергии от одной границы области к другой.

Отметим особенность уравнения (13). В этом случае параметрическое возбуждение магнитного поля сопровождается гауссовой генерацией самого магнитного поля. Перейдем к статистическому анализу этой простейшей задачи.

2. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ГАУССОВОЙ НАКАЧКОЙ

Линейному уравнению (13) соответствует уравнение для одноточечной в пространстве и одновременной во времени плотности вероятностей энергии магнитного поля как функции от безразмерного времени (см. работы [13], [15] и монографии [1]–[4])

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; E) = \left(\frac{\partial}{\partial E} E + 2 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} E + 2 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} \right) P(\tau; E) \quad (15)$$

с начальным условием $P(0; E) = \delta(E - \beta)$.

Для этого уравнения при больших временах для моментов энергии магнитного поля была получена асимптотика $\langle E^n(\tau) \rangle \sim A_n e^{n(2n-1)\tau}$, что соответствует логнормальному закону для плотности вероятностей с поправкой на гауссову генерацию. Также было получено выражение $e^{\langle \ln E(\tau) \rangle} = \beta e^{-\tau}$ для ляпуновской экспоненты,

свидетельствующее об убывании энергии магнитного поля почти в каждой точке пространства, т. е. о существовании кластеризации. Уравнение (15) содержит член, отвечающий за генерацию гауссова поля, который и определяет генерацию энергии при малых временах. Приведем соответствующее уравнение и решения для малых времен, ограничиваясь, разумеется, интересующим нас двумерным случаем.

В случае пространственно-однородной задачи уравнение для плотности вероятностей гауссова двумерного векторного поля $\mathbf{H}_\perp(\mathbf{R}, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; \mathbf{H}_\perp) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{H}_\perp^2} P(\tau; \mathbf{H}_\perp),$$

а его решение задается формулой

$$P(\tau; \mathbf{H}_\perp) = \frac{1}{2\pi\tau} e^{-\mathbf{H}_\perp^2/2\tau}.$$

Соответственно, на этом временном интервале плотность вероятностей

$$P(\tau; E) = \frac{1}{2\tau} e^{-E/2\tau} \quad (16)$$

поперечной энергии $E = \mathbf{H}_\perp^2(\mathbf{R}, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; E) = 2 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} P(\tau; E).$$

Следовательно, интегральная функция распределения вероятностей описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau; E) = 2E \frac{\partial^2}{\partial E^2} \Phi(\tau; E),$$

решение которого имеет вид

$$\Phi(\tau; E) = 1 - e^{-E/2\tau}. \quad (17)$$

Из последнего соотношения сразу же следует выражение для кривой типичной реализации: $E^*(\tau) = (2 \ln 2)\tau$.

Понятно, что, для того чтобы имела место кластеризация, кривая типичной реализации соответствующего процесса должна убывать по сравнению с линейным ростом для гауссова процесса. На рис. 2 приведены результаты численного решения уравнения (15). Из этого рисунка видно, что на начальном этапе плотность вероятностей энергии магнитного поля убывает, примерно как гауссово распределение, и скорость убывания уменьшается со временем, т. е. процесс генерации гауссова поля превалирует. На временах порядка $\tau = 1.7$ ситуация меняется, и при больших временах начинает играть роль кластеризация, т. е. скорость убывания плотности вероятностей с ростом энергии начинает расти со временем так же, как и значение в нуле.

Рассмотрим теперь интегральную функцию распределения вероятностей энергии магнитного поля. Из уравнения (15) обычным образом получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau; E) = \left(E + 2E \frac{\partial}{\partial E} (E + 1) \right) \frac{\partial}{\partial E} \Phi(\tau; E), \quad (18)$$

Рис. 2. Плотность вероятностей (15) для различных времен: $\tau = 0.3$ (кривая 1), $\tau = 1.7$ (кривая 2 на обоих рисунках), $\tau = 5.0$ (кривая 3), $\tau = 8.3$ (кривая 4). Тонкие линии на рисунке “а” соответствуют гауссову распределению (16) для времен $\tau = 0.3$ (кривая 1') и $\tau = 1.7$ (кривая 2').

Рис. 3. Интегральная функция вероятностей (18) для трех моментов безразмерного времени (а): для $\tau = 0.3$ (кривая 1), $\tau = 1.7$ (кривая 2), $\tau = 5.0$ (кривая 3); тонкие линии 1', 2' и 3' соответствуют гауссову распределению для тех же времен. Кривые типичной реализации (б) для энергии магнитного поля (кривая 1) и гауссова процесса (кривая 1').

численное решение которого приведено на рис. 3а, где также изображена кривая типичной реализации (см. рис. 3б). Из этого рисунка видно, что при относительно малых временах, примерно до $\tau = 1.7$, с ростом времени скорость возрастания интегральной функции убывает, что характерно для гауссова распределения. При больших временах скорость возрастания начинает увеличиваться, что характерно для логнормального распределения. Более наглядно этот вывод иллюстрирует кри-

Рис. 4. Удельная площадь областей для распределения (15), в которых уровень энергии магнитного поля $E > 2$ (а). Удельная энергия, сосредоточенная в областях, эволюция общей площади которых приведена на рис. “а”, также при $E > 2$ (б).

вая типичной реализации. На рис. 3б видим, что при $\tau \geq 3.0$ кривая типичной реализации для процесса, описывающегося уравнением (15), убывает, что свидетельствует о кластеризации. Вообще говоря, процесс кластеризации начал проявляться раньше, но преобладает над генерацией примерно с этого момента времени.

На рис. 4а приведена зависимость от времени удельной площади $\langle s(\tau, E) \rangle$ для тех областей, в которых энергия магнитного поля превышает уровень максимума кривой типичной реализации, т.е. при $E > 2$ (см., например, монографии [1]–[4]). В случае гауссова распределения эта площадь стремится к единице, что свидетельствует об отсутствии кластеризации, а в случае магнитного поля площадь начинает убывать, что свидетельствует о начале процесса кластеризации на временах $\tau \sim 1.7$. На рис. 4б приведена динамика во времени удельной энергии (нормированной на полную энергию в соответствующий момент времени), сосредоточенной в этих областях, подтверждающая явление кластеризации.

Рассмотрим теперь более сложную задачу о стохастическом структурообразовании в рамках квазилинейного уравнения с гауссовой накачкой. Постановка такой задачи была предложена в работе [16] (см. также монографию [3]).

3. КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ГАУССОВОЙ НАКАЧКОЙ

Пусть $\mathbf{r} = \{r_i\}$ – трехмерная пространственная координата, здесь $i = 1, 2, 3$. Обозначим через $z = r_3$ вертикальную координату, а через R_α, R_β – координаты в горизонтальной плоскости, перпендикулярной оси z , здесь $\alpha, \beta = 1, 2$. Тогда $\mathbf{r} = \{\mathbf{R}, z\}$. Пусть также слой неоднородной среды, заполненный случайным полем скорости

Рис. 5. Возмущение свободной поверхности.

$\mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$, в начальный момент времени $t = 0$ ограничен с одной стороны свободной поверхностью $z = \xi_0(\mathbf{R})$, а с другой стороны – жесткой топографической поверхностью $z = -H_0 + H(\mathbf{R})$.

Соответственно трехмерное поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}; t)$ мы представим в виде совокупности горизонтальной и вертикальной составляющих поля скорости:

$$\{u_i(\mathbf{r}; t)\} = \{u_\alpha(\mathbf{R}, z; t), w(\mathbf{R}, z; t)\}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2.$$

Смещение свободной поверхности зададим в виде кинематического краевого условия на поверхности $z = \xi(\mathbf{R}, t)$ (см. рис. 5), которое имеет вид

$$\frac{d}{dt}\xi(\mathbf{R}, t) = w(\mathbf{R}, z; t)|_{z=\xi(\mathbf{R}, t)}. \quad (19)$$

Здесь $\frac{d\xi(\mathbf{R}, t)}{dt}$ – полная производная смещения поверхности.

Краевое условие (19) будем рассматривать как замкнутое стохастическое квазилинейное уравнение в рамках кинематического приближения, т.е. при заданных статистических характеристиках полей скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{R}, z; t)$ и $w(\mathbf{R}, z; t)$:

$$\frac{\partial \xi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} + u_\alpha(\mathbf{R}, \xi(\mathbf{R}, t), t) \frac{\partial \xi(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\alpha} = w(\mathbf{R}, \xi(\mathbf{R}, t); t) \quad (20)$$

с начальным условием $\xi(\mathbf{R}, 0) = \xi_0(\mathbf{R})$. Уравнение (20) при этом описывает смещение свободной поверхности, вызванное вертикальной составляющей поля скорости.

Дифференцируя уравнение (20) по $\mathbf{R}$, получаем уравнение для градиента смещения поверхности $p_\beta(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial \xi(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\beta}$, характеризующего наклон свободной поверхности,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\beta(\mathbf{R}, t)}{\partial t} + \left[\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{R}, z; t)}{\partial R_\beta} + \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{R}, z; t)}{\partial z} p_\beta(\mathbf{R}, t) \right]_{z=\xi(\mathbf{R}, t)} p_\alpha(\mathbf{R}, t) + \\ + u_\alpha(\mathbf{R}, \xi(\mathbf{R}, t), t) \frac{\partial p_\alpha(\mathbf{R}, t)}{\partial R_\beta} = \\ = \left[\frac{\partial w(\mathbf{R}, z; t)}{\partial R_\beta} + \frac{\partial w(\mathbf{R}, z; t)}{\partial z} p_\beta(\mathbf{R}, t) \right]_{z=\xi(\mathbf{R}, t)} p_\alpha(\mathbf{R}, t), \end{aligned} \quad (21)$$

с начальным условием

$$\mathbf{p}(\mathbf{R}, 0) = \mathbf{p}_0(\mathbf{R}) = \frac{\partial \xi_0(\mathbf{R})}{\partial \mathbf{R}}.$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи имеется и второе краевое условие, связанное с неоднородностями топографии жесткого дна (см. рис. 5). В рамках кинематического приближения это краевое условие проявляется в функциональном виде, а именно для вариационных производных решений $\xi(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ нашей задачи имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\delta \xi(\mathbf{R}, t)}{\delta \mathbf{u}(\mathbf{R}', z', t')} &\sim \theta(z' + H_0 - H(\mathbf{R})) \theta(t - t'), \\ \frac{\delta \mathbf{p}(\mathbf{R}, t)}{\delta \mathbf{u}(\mathbf{R}', z', t')} &\sim \theta(z' + H_0 - H(\mathbf{R})) \theta(t - t').\end{aligned}\quad (22)$$

3.1. Уравнение Лиувилля. Введем совместную индикаторную функцию смещения поверхности и ее градиента:

$$\varphi(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) = \delta(\xi(\mathbf{R}, t) - \xi) \delta(\mathbf{p}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{p}). \quad (23)$$

Исходя из динамических уравнений задачи можно получить для нее линейное уравнение Лиувилля [3], [16]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p})}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial \xi} w(\mathbf{R}, \xi; t) \varphi(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) - \\ & - \left[u_\alpha(\mathbf{R}, \xi; t) \frac{\partial}{\partial R_\alpha} - \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{R}, \xi; t)}{\partial \xi} p_\alpha \right] \varphi(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) - \\ & - \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left[\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{R}, \xi; t)}{\partial R_\beta} + \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{R}, \xi; t)}{\partial \xi} p_\beta \right] p_\alpha \varphi(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) - \\ & - \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left[\frac{\partial w(\mathbf{R}, \xi; t)}{\partial R_\beta} + \frac{\partial w(\mathbf{R}, \xi; t)}{\partial \xi} p_\beta \right] \varphi(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p})\end{aligned}\quad (24)$$

с начальным условием

$$\varphi(\mathbf{R}, 0; \xi, \mathbf{p}) = \delta(\xi - \xi_0(\mathbf{R})) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(\mathbf{R})).$$

Отметим, что уравнение (24) описывает совместную плотность вероятностей для смещения поверхности и его пространственного градиента при детерминированных параметрах динамической системы после усреднения по статистике случайных начальных условий.

3.1.1. Корреляционные функции полей $u_\alpha(\mathbf{R}, \xi; t)$ и $w(\mathbf{R}, \xi; t)$. В уравнение Лиувилля (24) входят проекции $u_\alpha(\mathbf{R}, \xi; t)$ и $w(\mathbf{R}, \xi; t)$ поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, статистические характеристики которых определяют статистические характеристики решения задачи.

Формулы для корреляционных функций, фигурирующих в наших рассуждениях, вытекают из выражения (4), записанного в терминах двумерного вектора $\mathbf{K} = \{K_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$, где $\mathbf{k} = \{\mathbf{K}, k_z\}$, и одномерной проекции $z = \xi$:

$$\begin{aligned}B_{\alpha\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi', t - t') &= \langle u_\alpha(\mathbf{R}, \xi; t) u_\beta(\mathbf{R}', \xi'; t') \rangle = \\ &= \int d\mathbf{k} \left[E^s(k, t - t') \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{K_\alpha K_\beta}{k^2} \right) + E^p(k, t - t') \frac{K_\alpha K_\beta}{k^2} \right] e^{i\mathbf{K}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + ik_z(\xi - \xi')},\end{aligned}\quad (25)$$

где $k = \sqrt{\mathbf{K}^2 + k_z^2}$.

Аналогичные формулы имеем и для корреляций $B_{\alpha w}$, B_{ww} :

$$\begin{aligned} B_{\alpha w}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi'; t - t') = \\ = - \int d\mathbf{k} [E^s(k, t - t') - E^p(k, t - t')] \frac{K_\alpha k_z}{k^2} e^{i\mathbf{K}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + ik_z(\xi - \xi')}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} B_{ww}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi'; t - t') = \\ = \int d\mathbf{k} \left[E^s(k, t - t') \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right) + E^p(k, t - t') \frac{k_z^2}{k^2} \right] e^{i\mathbf{K}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') + ik_z(\xi - \xi')}. \end{aligned} \quad (27)$$

Для второй производной корреляционной функции $B_{\alpha\beta}(\mathbf{R}, \xi)$ в нуле из выражения (25) получаем равенство

$$\frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\delta} = - \int d\mathbf{k} K_\gamma K_\delta \left[E^s(k) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{K_\alpha K_\beta}{k^2} \right) + E^p(k) \frac{K_\alpha K_\beta}{k^2} \right], \quad (28)$$

а для других корреляционных функций имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{\alpha w}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial \xi} &= \int d\mathbf{k} \frac{K^2 k_z^2}{k^2} [E^s(k) - E^p(k)], \\ \frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} &= - \int d\mathbf{k} \left[E^s(k) \left(2k_z^2 - \frac{K^2 k_z^2}{k^2} \right) + E^p(k) \frac{K^2 k_z^2}{k^2} \right], \\ \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\gamma} &= - \int d\mathbf{k} \left[E^s(k) \left(K^2 - \frac{K^2 k_z^2}{k^2} \right) + E^p(k) \frac{K^2 k_z^2}{k^2} \right], \\ \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} &= - \int d\mathbf{k} \left[E^s(k) \left(k_z^2 - \frac{k_z^4}{k^2} \right) + E^p(k) \frac{k_z^4}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Разумеется, все эти статистические характеристики проекций поля скорости связаны со статистическими характеристиками поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Для получения такой связи достаточно перейти к полярным координатам $k_z = k \cos \theta$, $K^2 = k^2 \sin^2 \theta$ и проинтегрировать по угловым переменным.

4. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Совместная плотность вероятностей смещения свободной поверхности и ее градиента равна индикаторной функции (23), усредненной по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$:

$$P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) = \langle \varphi(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) \rangle_{\mathbf{u}}. \quad (30)$$

Получим уравнение для совместной плотности вероятностей смещения поверхности и его градиента. Для этого усредним уравнение Лиувилля (24) по ансамблю случайного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. При этом размыкание корреляции поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ с произвольным функционалом от него осуществляется на основе формулы Фурутцу–Новикова (см., например, монографии [1]–[4]) с учетом топографических неоднородностей $H(\mathbf{R})$ морского дна (см. рис. 5 и выражения (22)) [3], [16]:

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{R}, \xi, t) R[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)] \rangle_{\mathbf{u}} &= \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' \theta(\xi' + H_0 - H(\mathbf{R})) \times \\ &\times \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi', t - t') \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)]}{\delta u_j(\mathbf{R}', \xi', t')} \right\rangle_{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Предполагая, что топография дна также задана статистически с нулевым средним значением, мы должны усреднить формулу (31) по ансамблю ее реализаций. Считая при этом, что топографические неоднородности дна статистически не зависят от поля скорости, получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{R}, \xi, t) R[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)] \rangle_{\mathbf{u}} &= \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' \langle \theta(\xi' + H_0 - H(\mathbf{R})) \rangle_H \times \\ &\times \int_0^t dt' B_{ij}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi', t - t') \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)]}{\delta u_j(\mathbf{R}', \xi', t')} \right\rangle_{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (32)$$

где функция $\langle \theta(\xi + H_0 - H(\mathbf{R})) \rangle_H$ является интегральной функцией распределения вероятностей топографических неоднородностей $H(\mathbf{R})$, т. е.

$$\langle \theta(\xi + H_0 - H(\mathbf{R})) \rangle_H = P\{\xi > -H_0 + H(\mathbf{R})\}.$$

Для статистического однородного случайного поля $H(\mathbf{R})$ эта функция, конечно, не зависит от пространственной точки $\mathbf{R}$, и мы положим далее

$$\langle \theta(\xi + H_0 - H(\mathbf{R})) \rangle = P(H_0; \xi).$$

Отметим, что $P(H_0; \xi) \rightarrow 1$ для бесконечного глубокого слоя (при $H_0 \rightarrow \infty$ на рис. 5).

В общем случае в рамках диффузионного приближения (см., например, монографии [1]–[4]) формула (32) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{R}, \xi, t) R[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)] \rangle_{\mathbf{u}} &= \\ &= \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{ij}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \left\langle \frac{\delta R[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)]}{\delta u_j(\mathbf{R}', \xi', t - 0)} \right\rangle_{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

где функция $B_{ij}(\mathbf{r})$ задается равенством (6):

$$B_{ij}(\mathbf{R}, \xi) = \int_0^\infty d\tau B_{ij}(\mathbf{R}, \xi, \tau). \quad (33)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \langle u_\alpha(\mathbf{R}, \xi, t) \varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)] \rangle_{\mathbf{u}} &= \\ &= \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{\alpha\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \left\langle \frac{\delta \varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t - 0)} \right\rangle_{\mathbf{u}} + \\ &+ \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{\alpha w}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \left\langle \frac{\delta \varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t - 0)} \right\rangle_{\mathbf{u}}, \\ \langle w(\mathbf{R}, \xi, t) \varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)] \rangle_{\mathbf{u}} &= \\ &= \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{w\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \left\langle \frac{\delta \varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t - 0)} \right\rangle_{\mathbf{u}} + \\ &+ \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{ww}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \left\langle \frac{\delta \varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\xi}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t - 0)} \right\rangle_{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение для плотности вероятностей (30) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(t; \xi, \mathbf{p})}{\partial t} = & - \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{\alpha\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle - \\
 & - \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{\alpha w}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle + \\
 & + \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{\alpha\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial \xi} p_\alpha \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle + \\
 & + \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{\alpha w}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial \xi} p_\alpha \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle - \\
 & - \frac{\partial}{\partial \xi} \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{w\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle - \\
 & - \frac{\partial}{\partial \xi} \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') B_{ww}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi') \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle + \\
 & + \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{\alpha\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial R_\gamma} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\alpha \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle + \\
 & + \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{\alpha w}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial R_\gamma} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\alpha \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle + \\
 & + \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{\alpha\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma p_\alpha \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle + \\
 & + \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{\alpha w}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma p_\alpha \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle - \\
 & - \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{w\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial R_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle - \\
 & - \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{ww}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial R_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle - \\
 & - \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{w\beta}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\beta} p_\beta \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle - \\
 & - \int d\mathbf{R}' \int_{-\infty}^{\xi+0} d\xi' P(H_0; \xi') \frac{\partial B_{ww}(\mathbf{R} - \mathbf{R}', \xi - \xi')}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\beta} p_\beta \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Записывая уравнение Лиувилля (24) в виде интегрального уравнения, легко получить выражения для соответствующих вариационных производных [3], [16]:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle_{\mathbf{u}} = & \\ = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \left[-\delta(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial R_\beta} + \frac{\partial\delta(\xi - \xi')}{\partial\xi} p_\beta \right] P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) + & \\ + \frac{\partial\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{\partial R_\gamma} \delta(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\beta P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) + & \\ + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \frac{\partial\delta(\xi - \xi')}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma p_\beta P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}), & \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle_{\mathbf{u}} = & -\frac{\partial}{\partial\xi} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \delta(\xi - \xi') P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) - \\ - \frac{\partial\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{\partial R_\gamma} \delta(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial p_\gamma} P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) - & \\ - \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \frac{\partial\delta(\xi - \xi')}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}). & \end{aligned} \quad (36)$$

Отметим, что для однородных начальных условий $\xi_0(\mathbf{R}) = 0$ и $\mathbf{p}_0(\mathbf{R}) = 0$ все одноточечные статистические характеристики не зависят от пространственной координаты $\mathbf{R}$ и, следовательно,

$$P(\mathbf{R}, t; \xi, \mathbf{p}) \equiv P(t; \xi, \mathbf{p}).$$

В этом случае формулы (35) и (36) также упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta u_\beta(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle_{\mathbf{u}} = & \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \frac{\partial\delta(\xi - \xi')}{\partial\xi} p_\beta P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\ + \frac{\partial\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{\partial R_\gamma} \delta(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\beta P(t; \xi, \mathbf{p}) + & \\ + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \frac{\partial\delta(\xi - \xi')}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma p_\beta P(t; \xi, \mathbf{p}), & \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta\varphi[\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{z}, \tau)]}{\delta w(\mathbf{R}', \xi', t-0)} \right\rangle_{\mathbf{u}} = & -\frac{\partial}{\partial\xi} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \delta(\xi - \xi') P(t; \xi, \mathbf{p}) - \\ - \frac{\partial\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')}{\partial R_\gamma} \delta(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial p_\gamma} P(t; \xi, \mathbf{p}) - & \\ - \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \frac{\partial\delta(\xi - \xi')}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma P(t; \xi, \mathbf{p}). & \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим также, что в этом случае уравнение для функции $P(t; \xi, \mathbf{p})$ можно упростить и перейти к плотностям вероятностей скалярных величин $P(t; \xi, p)$ или $P(t; \xi, I)$, где $p = |\mathbf{p}|$, $I = |\mathbf{p}|^2$.

Далее будем рассматривать случай однородных начальных условий. Наличие пространственных неоднородностей приводит к диффузии в $\{\mathbf{r}\}$ -пространстве, а нас

интересует возможность пространственного структурообразования, которое обусловлено диффузией в фазовом пространстве $\{\xi, \mathbf{p}\}$. В этом случае, подставляя равенства (37) и (38) в уравнение (34) и интегрируя по пространственным координатам $\mathbf{R}'$ и ξ' , приходим к искомому уравнению:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(t; \xi, \mathbf{p})}{\partial t} = & -\frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\
 & + P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{\alpha w}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma P(t; \xi, \mathbf{p}) - \\
 & - \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma p_\beta^2 P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\
 & + \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{\alpha w}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\
 & + B_{ww}(\mathbf{0}, 0) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [P(H_0; \xi) P(t; \xi, \mathbf{p})] + \\
 & + B_{ww}(\mathbf{0}, 0) \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial P(H_0; \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta P(t; \xi, \mathbf{p}) \right\} - \\
 & - P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\delta} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\beta P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\
 & + \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial B_{\alpha w}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma + \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta \right] P(t; \xi, \mathbf{p}) - \\
 & - \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta p_\beta p_\beta P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\
 & + \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial B_{\alpha w}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial \xi} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma p_\delta \frac{\partial}{\partial p_\delta} P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\
 & + \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{w\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\beta \partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma + \frac{\partial}{\partial p_\gamma} \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta p_\gamma \right] P(t; \xi, \mathbf{p}) - \\
 & - \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\gamma} \frac{\partial}{\partial p_\delta} \frac{\partial}{\partial p_\delta} P(t; \xi, \mathbf{p}) + \\
 & + \frac{1}{2} P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{w\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial R_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta P(t; \xi, \mathbf{p}) - \\
 & - P(H_0; \xi) \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma + \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta \right] P(t; \xi, \mathbf{p}). \quad (39)
 \end{aligned}$$

Заметим, что в рамках кинематического приближения случайные неоднородности топографии дна присутствуют в уравнении для плотности вероятностей в виде монотонной функции $P(H_0; \xi)$, входящей в коэффициенты диффузии. Поэтому ясно, что эта функция оказывает максимальный эффект для бесконечной глубины слоя, т. е. при $P(\infty; \xi) = 1$. Далее мы ограничимся этим случаем.

5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

5.1. Плотность вероятностей для величины смещения свободной поверхности. В случае бесконечной глубины слоя смещение свободной поверхности не коррелирует с ее градиентом, и, интегрируя уравнение (39) по $\mathbf{p}$, мы получаем крайне неожиданный результат:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t; \xi) = B_{ww}(\mathbf{0}, 0) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P(t; \xi). \quad (40)$$

Таким образом, плотность вероятностей для случайного поля смещения свободной поверхности $\xi(\mathbf{R}, t)$ есть гауссова плотность распределения

$$P(t; \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t}\right\},$$

не зависящая от нелинейности исходного уравнения (20), с дисперсией

$$\langle \xi^2(\mathbf{R}, t) \rangle = 2B_{ww}(\mathbf{0}, 0)t.$$

При этом коэффициент диффузии $B_{ww}(\mathbf{0}, 0)$ в уравнении (40) естественным образом связан с дисперсией случайного трехмерного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ (5), а именно

$$B_{ww}(\mathbf{0}, 0) = \frac{1}{3} \int d\mathbf{k} [2E^s(k, 0) + E^p(k, 0)] = \frac{1}{3} \sigma_{\mathbf{u}}^2.$$

В заключение этого пункта можно сказать, что сложная структура поля скорости в нижнем полупространстве не может быть прямой причиной стохастического структурообразования смещения свободной поверхности.

5.2. Плотность вероятностей для градиента смещения свободной поверхности. Интегрируя теперь уравнение (39) по ξ , для плотности вероятностей градиента смещения свободной поверхности $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; \mathbf{p}) = & -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta P(t; \mathbf{p}) + \\ & + \frac{\partial^2 B_{\alpha w}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial \xi} \left[2 \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma + 2 \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta \right] P(t; \mathbf{p}) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma p_\beta^2 + \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta p_\beta^2 \right] P(t; \mathbf{p}) - \\ & - \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\delta} \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\beta P(t; \mathbf{p}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\gamma} \frac{\partial}{\partial p_\delta} \frac{\partial}{\partial p_\delta} P(t; \mathbf{p}) - \\ & - \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} \left[\frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma + \frac{\partial}{\partial p_\gamma} p_\gamma \frac{\partial}{\partial p_\delta} p_\delta \right] P(t; \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (41)$$

Упростим анализ задачи. Перейдем от уравнения (41) к плотности вероятностей случайного поля $I(\mathbf{R}, t) = \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t)$. Для этого умножим уравнение (41) на $\delta(p_\mu^2 - I)$

и проинтегрируем по $\mathbf{p}$. В результате получаем для плотности вероятностей $P(t; I)$ уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(t; I) = & -\frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial R_\beta} \frac{\partial}{\partial I} IP(t; I) + 4 \frac{\partial^2 B_{\alpha\omega}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\alpha \partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial I} I + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I \right) P(t; I) - \\ & - \frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial I} I^2 + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I^2 \right) P(t; I) + \\ & + 2 \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\delta} \frac{\partial}{\partial I} \int d\mathbf{p} (\delta_{\gamma\delta} p_\alpha p_\beta + \delta_{\alpha\delta} p_\gamma p_\beta) \delta(p_\mu^2 - I) P(t; I) - \\ & - 4 \frac{\partial^2 B_{\alpha\beta}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\delta} \frac{\partial}{\partial I} \frac{\partial}{\partial I} \int d\mathbf{p} p_\gamma p_\alpha p_\delta p_\beta \delta(p_\mu^2 - I) P(t; I) - \\ & - 2 \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial R_\gamma \partial R_\gamma} \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} P(t; I) - 2 \frac{\partial^2 B_{ww}(\mathbf{0}, 0)}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial}{\partial I} I \left(1 + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \right) P(t; I). \end{aligned} \quad (42)$$

Подставим теперь в это уравнение выражения (28) и (29) для вторых производных корреляционных функций проекций поля скорости и перейдем к сферическим координатам вектора $\mathbf{k}$. Интегрируя затем по угловым переменным, получим окончательное универсальное уравнение для плотности вероятностей $P(t; I)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; I) = & \frac{\partial}{\partial I} IP(\tau; I) + 4 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} IP(\tau; I) + \\ & + \frac{\partial}{\partial I} I^2 P(\tau; I) + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} I^2 P(\tau; I) + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} P(\tau; I), \end{aligned} \quad (43)$$

где введено безразмерное время $\tau = (2/15)(4D^s + D^p)t$, а величины D^s и D^p задаются равенствами (9) при $d = 3$. Уравнение (43) можно записать также в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau; I) = \frac{\partial}{\partial I} I(1 + I)P(\tau; I) + 2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} (1 + I)^2 P(\tau; I).$$

6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТОПОГРАФИЯ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ГРАДИЕНТА СМЕЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Прежде всего отметим, что уравнение для плотности вероятностей случайного поля $I(\tau; \mathbf{R})$, полученное выше, при условии пространственной однородности задачи описывает статистические свойства именно поля градиента смещения свободной поверхности. Для любой фиксированной точки $\tilde{\mathbf{R}}$ функция $I(\tau; \tilde{\mathbf{R}})$ является случайным процессом во времени, одновременная плотность вероятностей которого, не зависящая от $\tilde{\mathbf{R}}$, описывается полученным уравнением. Наряду с этим в физическом пространстве $\{\mathbf{R}\}$ может происходить процесс структурообразования самого поля $I(\tau; \mathbf{R}) = |\mathbf{p}(\tau; \mathbf{R})|^2$ как физического объекта: будут возникать замкнутые области повышенной концентрации градиента – иметь место кластеризация, которая также описывается полученным уравнением. Это уравнение достаточно сложное и содержит два “интерферирующих” эффекта. Во-первых, поле $I(\tau; \mathbf{R})$ генерируется случайным полем скорости из нулевого состояния (гауссова накачка), во-вторых, в силу динамики исходных стохастических уравнений происходит параметрическое возбуждение поля. Некоторые принципиально важные качественные особенности, характеризующие такое возбуждение в отдельных реализациях случайного поля $I(\tau; \mathbf{R})$, удастся получить аналитическим путем.

Рассмотрим n -ю моментную функцию $\langle I^n(\tau; \mathbf{R}) \rangle$ поля $I(\tau; \mathbf{R})$. Умножая уравнение для плотности вероятностей $P(\tau; I)$ на I^n и интегрируя по I , получаем рекуррентное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle I^n(\tau; \mathbf{R}) \rangle = n(4n-1) \langle I^n(\tau; \mathbf{R}) \rangle + n(2n-1) \langle I^{n+1}(\tau; \mathbf{R}) \rangle + 2n^2 \langle I^{n-1}(\tau; \mathbf{R}) \rangle. \quad (44)$$

В частности, имеем при $n=1$ для величины $\langle I(\tau; \mathbf{R}) \rangle = \sigma_{\mathbf{p}}^2(\tau; \mathbf{R})$, дисперсии градиента смещения свободной поверхности, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle I(\tau; \mathbf{R}) \rangle = 3 \langle I(\tau; \mathbf{R}) \rangle + \langle I^2(\tau; \mathbf{R}) \rangle + 2,$$

из которого ясно, что стационарного распределения при $\tau \rightarrow \infty$ существовать не может. Отметим, однако, что формально существует стационарное распределение вероятностей

$$P(\infty, I) = \frac{3}{2} \frac{1}{(1+I)^{5/2}}, \quad (45)$$

и, по-видимому, только хвост этого распределения совпадает в какой-то мере с поллогим хвостом распределения вероятностей при больших временах.

Аналогичным образом получаем уравнение для ляпуновского характеристического параметра $\partial \langle \ln I(\tau) \rangle / \partial \tau$:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle \ln I(\tau; \mathbf{R}) \rangle = -1 - \langle I(\tau; \mathbf{R}) \rangle,$$

т. е. ляпуновская экспонента убывает во времени очень быстро при $\tau \rightarrow \infty$,

$$e^{\langle \ln I(\tau; \mathbf{R}) \rangle} \sim \exp \left\{ -\tau - \int_0^\tau d\tau' \langle I(\tau'; \mathbf{R}) \rangle \right\}. \quad (46)$$

Отсюда следует, что с ростом времени τ поле $I(\tau; \mathbf{R})$ (квадрат градиента смещения, положительная величина) убывает очень быстро в реализациях поля почти во всех точках пространства и, следовательно, должно кластеризоваться в какой-то малой части пространства. Это подтверждается также анализом интегральной функции распределения вероятностей на основе идей статистической топографии.

Подставляя $P(\tau; I) = \partial \Phi(\tau, I) / \partial I$ в уравнение (43) и интегрируя по I , приходим к уравнению для интегральной функции распределения вероятностей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, I) &= I \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I) + 4I \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I) + \\ &+ I^2 \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I) + 2I \frac{\partial}{\partial I} I^2 \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I) + 2I \frac{\partial^2}{\partial I^2} \Phi(\tau, I) \end{aligned} \quad (47)$$

с начальным условием $\Phi(0, I) = 1$ и с краевыми условиями

$$\Phi(\tau, 0) = 0, \quad \Phi(\tau, \infty) = 1.$$

Уравнение (47) можно записать также в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, I) = I(1+I) \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I) + 2I \frac{\partial}{\partial I} (1+I)^2 \frac{\partial}{\partial I} \Phi(\tau, I). \quad (48)$$

Отметим, что кривая типичной реализации $I^*(\tau)$, являющаяся основной характеристикой эволюции во времени случайных процессов в конкретных реализациях, определяется при этом как сечение, при котором

$$\Phi(\tau, I^*(\tau)) = \frac{1}{2}. \quad (49)$$

Значение интегральной функции распределения вероятностей для плотности вероятностей $P(\tau; I)$ равно $P(I(\tau; \mathbf{R}) < I)$. В силу параметрического возбуждения эта функция с ростом времени быстро стремится к единице. Следовательно, удельная величина

$$s_{\text{hom}}(\tau, \bar{I}) = \langle \theta(I(\tau; \mathbf{R}) - \bar{I}) \rangle_{\mathbf{u}} = 1 - \langle \theta(\bar{I} - I(\tau; \mathbf{R})) \rangle_{\mathbf{u}} \quad (50)$$

равна $P(I(\tau; \mathbf{R}) > \bar{I})$. Согласно положениям статистической топографии случайных полей эта функция для статистически однородного поля имеет геометрический смысл удельной (т. е. приходящейся на единицу площади) площади области, где поле $I(\tau; \mathbf{R})$ больше любой заданной величины $\bar{I}$ (см., например, монографии [1]–[4]). При убывании поля почти во всех точках пространства эта вероятность стремится к нулю, что соответствует концентрации в этой малой площади основных статистических характеристик типа моментных функций. При этом удельный квадрат модуля градиента, сосредоточенный в этой области, описывается равенством

$$\langle i(\tau; I > \bar{I}) \rangle = \langle I(t) \rangle - \int_0^{\bar{I}} dI I P(\tau; I). \quad (51)$$

Это означает, что в данной малой части пространства мощный градиент при уменьшении площади, где он сосредоточен, должен, по-видимому, просто “выдавливать” свободную поверхность как вверх (т. е. создавать высокие узкие пики), так и вниз (т. е. создавать глубокие узкие провалы свободной поверхности), что соответствует очень редким большим флуктуациям гауссова поля смещения свободной поверхности $\xi(\mathbf{R}, t)$. Подтверждением должны послужить численные решения полученных уравнений как для самой плотности вероятностей, так и для интегральной функции распределения вероятностей.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат настоящей работы состоит в получении уравнений для совместной одновременной плотности вероятностей полей возмущения свободной поверхности $\xi(\mathbf{R}, t)$ и его градиента $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ под действием поля скорости и в анализе свойств их решений. При этом оказалось, что для пространственно-однородной среды в случае бесконечно глубокого слоя возмущение свободной поверхности является гауссовым случайным полем. Сложная структура поля скорости в этом случае не может быть прямой причиной стохастического структурообразования свободной поверхности. При этом поля $\xi(\mathbf{R}, t)$ и $\mathbf{p}(\mathbf{R}, t)$ не коррелируют между собой, а уравнения (43), (47) для плотности вероятностей и интегральной функции вероятностей положительного поля $I(\mathbf{R}, t) = \mathbf{p}^2(\mathbf{R}, t)$ имеют сложный вид и не зависят (в рамках использованных приближений) от статистической структуры поля скорости. Исходя из этих уравнений мы получили рекуррентное уравнение для моментов поля $I(\mathbf{R}, t)$ и уравнение для ляпуновского характеристического параметра. Из этих уравнений следует, что все статистические моменты растут со временем, а асимптотика ляпуновской экспоненты при больших временах быстро убывает во времени.

С одной стороны, для любой фиксированной точки пространства $\tilde{\mathbf{R}}$ случайная функция $I(\tau; \tilde{\mathbf{R}})$ есть случайный процесс во времени, одновременная плотность вероятностей которого, не зависящая от $\tilde{\mathbf{R}}$, описывается уравнением (43), являющимся уравнением Фоккера–Планка для этого марковского процесса. Поведение во времени этого случайного процесса описывается кривой типичной реализации (см. монографии [1]–[4]), которую вычислить в аналитическом виде не удастся. Поведение

ляпуновской экспоненты во времени дает косвенное указание на то, что реализация случайного процесса $I(\tau; \tilde{\mathbf{R}})$ убывает почти в каждой точке пространства с вероятностью единица и, следовательно, поле $I(\tau; \mathbf{R})$ должно кластеризоваться в какой-то малой части пространства. При этом, конечно, имеются редкие, но большие флуктуации этого процесса относительно кривой типичной реализации (перемежаемость). Эти флуктуации и вызывают рост всех моментных функций во времени.

С другой стороны, в физическом пространстве $\{\mathbf{R}\}$ может происходить также процесс структурообразования самого поля $I(\tau; \mathbf{R}) = |\mathbf{p}(\tau; \mathbf{R})|^2$ как физического объекта: происходит кластеризация (образуются замкнутые области повышенной концентрации градиента), которая также описывается полученными уравнениями (43), (47). Это означает, что в этой части пространства мощный градиент при уменьшении площади, где он сосредоточен, по-видимому, должен просто “выдавливать” свободную поверхность как вверх (т.е. создавать высокие узкие пики), так и вниз (т.е. создавать глубокие узкие провалы). Это соответствует очень редким большим флуктуациям гауссова поля смещения свободной поверхности $\xi(\mathbf{R}, t)$. Конечно, вопрос о влиянии кластеризации поля квадрата градиента смещения свободной поверхности на саму деформацию свободной поверхности должен рассматриваться отдельно, вне рамок настоящей работы.

Уравнения (43), (47) достаточно сложны и содержат два эффекта. Во-первых, поле $I(\tau; \mathbf{R})$ генерируется случайным гауссовым полем скорости, во-вторых, в силу динамики исходных стохастических уравнений происходит параметрическое возбуждение этого поля.

Список литературы

- [1] V. I. Klyatskin, *Lectures on Dynamics of Stochastic Systems*, Elsevier, Boston, MA, 2010.
- [2] В. И. Кляцкин, *Очерки по динамике стохастических систем*, Эдиториал УРСС, М., 2012.
- [3] V. I. Klyatskin, *Stochastic Equations: Theory and Applications in Acoustics, Hydrodynamics, Magnetohydrodynamics, and Radiophysics*, Springer, New York, 2014.
- [4] В. И. Кляцкин, *Статистический анализ когерентных явлений в стохастических динамических системах*, Эдиториал УРСС, М., 2015.
- [5] В. И. Кляцкин, *УФН*, **182**:11 (2012), 1235–1237.
- [6] V. I. Klyatskin, “On the criterion of stochastic structure formation in random media”, *Chaos and Complex Systems*, Proceedings of the 4th International Interdisciplinary Chaos Symposium (Antalya, Turkey, April 29 – May 2, 2012), eds. S. G. Stavrinos, S. Banerjee, S. H. Caglar, M. Ozer, Springer, Berlin, 2013, 69–74.
- [7] В. И. Кляцкин, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 494–512.
- [8] V. I. Klyatskin, *Rus. J. Math. Phys.*, **20**:3 (2013), 295–314.
- [9] В. И. Кляцкин, *Динамические системы*, **4**(32):3–4 (2014), 193–236.
- [10] В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, *ЖЭТФ*, **111**:4 (1997), 1297–1313.
- [11] В. И. Кляцкин, Т. Эльперин, *ЖЭТФ*, **122**:2(8) (2002), 328–340.
- [12] В. И. Кляцкин, *ЖЭТФ*, **126**:5(11) (2004), 1153–1166.
- [13] В. И. Кляцкин, О. Г. Чхетиани, *ЖЭТФ*, **136**:2(8) (2009), 400–413.
- [14] В. И. Кляцкин, К. В. Кошель, *УФН*, **170**:7 (2000), 771–778.
- [15] В. И. Кляцкин, *УФН*, **181**:5 (2011), 457–482.
- [16] В. И. Кляцкин, *ТМФ*, **180**:1 (2014), 112–124.