Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Кастро, Р. Куллок, О физике $so_q(4)$ -симметрии атома водорода, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 2, 361–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 04:53:15

© 2015 г.

П. Г. Кастро*, Р. Куллок†

О ФИЗИКЕ $so_q(4)$ -СИММЕТРИИ АТОМА ВОДОРОДА

С помощью теории квантовой группы $su_q(2)$ исследуется q -деформация динамической $so(4)$ -симметрии атома водорода. Физически непротиворечивым способом получен энергетический спектр и найдено нарушение вырождения, а также меньшее гильбертово пространство. Показано, что использование деформированного оператора Казимира, как делалось ранее, приводит к противоречиям в физической интерпретации теории.

Ключевые слова: атом водорода, квантовая группа, динамическая симметрия.

DOI: 10.4213/tmf8883

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе с помощью квантовой группы $su_q(2)$ исследуется деформация атома водорода. При замене изначальной алгебры ее деформированной версией по-прежнему можно использовать канонический подход к нахождению энергетических уровней, которые теперь зависят от одного дополнительного квантового числа. Новая связь, возникающая вследствие ортогональности вектора Рунге–Ленца и вектора углового момента, приводит к меньшему гильбертову пространству. Кроме того, более подробно исследована физическая интерпретация общепринятых построений с помощью деформированных операторов Казимира.

Квантовые группы и их деформации приобрели известность в физике и применяются к разнообразным объектам, например в квантовой теории поля в некоммутативных пространствах [1], [2]. Возможно, первоначально они исследовались в приложении к квантовому уравнению Янга–Бакстера в качестве способа получения его решений, но они также представляют собой математический аппарат, используемый при исследовании идеи о минимальной длине [3], [4]. По этой причине большое внимание было уделено исследованию деформированных симметрий физических систем, таких как деформированная вращательная $su_q(2)$ -симметрия гармонического

Р. Кастро выражает признательность CNPq (Бразилия) за поддержку. Эта работа частично была выполнена в Венском университете (Р. Кастро).

*Escola Naval, Rio de Janeiro, Brazil. E-mail: paulo.castro@en.mar.mil.br

†Centre Brasileiro de Pesquisas Fisicas, Rio de Janeiro, Brazil. E-mail: ricardokl@cbpf.br

осциллятора [5]. Связь между q -деформацией и нелинейностью обсуждалась в работе [6], где показано, что частота классического аналога q -деформированного осциллятора зависит от амплитуды. В некоторых работах q -деформация реализуется на уровне уравнения Шредингера [7], [8], в этом случае анализируется только деформация вращательной симметрии. Недавно в работе [9] исследовался атом водорода в некоммутативном искривленном пространстве-времени.

Еще одна возможность заключается в исследовании деформированных динамических симметрий. Наиболее известным примером является связь между $so(4)$ -симметрией и спектром атома водорода, полученная с помощью вектора Рунге–Ленца, расширяющего группу симметрий. При этом спектр определяется сужением представления (i, j) до (i, i) .

К исследованию q -деформации динамической симметрии атома водорода применялись разнообразные подходы, такие как преобразование Кустаанхеймо–Штифеля [10], [11] и использование $\star$ -произведения мойаловского типа [12]. Авторы работ [13]–[16] исследовали деформацию с помощью разложения $so(4) = su(2) \oplus su(2)$, но не обратили внимание на наличие противоречий в физической интерпретации результатов, которые мы выявляем ниже.

Структура настоящей статьи следующая. Сначала мы кратко описываем вывод спектра атома водорода с помощью динамической $so(4)$ -симметрии и указываем на противоречия в физической интерпретации деформации, представленной в предыдущих работах. Затем мы вводим новую физически согласованную q -деформацию динамической симметрии атома водорода и получаем энергетический спектр, показывая, что имеется новая зависимость от квантовых чисел и редукция гильбертова пространства, а также обсуждаем частичное нарушение вырождения энергетических уровней. Мы показываем, что в обеих копиях $su(2)$ -симметрии должен быть использован один и тот же параметр деформации q .

2. НЕДЕФОРМИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

Начнем с краткого обзора метода получения спектра атома водорода с помощью его динамической $so(4)$ -симметрии [17]–[19].

Мы хотим решить уравнение Шредингера для кулоновского гамильтониана

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r},$$

где μ – приведенная масса, $k = e^2/4\pi\epsilon_0$ и e – заряд электрона. Из задачи Кеплера известно, что векторы $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (вектор углового момента) и $\mathbf{M} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - k\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ (вектор Рунге–Ленца) суть постоянные движения. Эти векторы взаимно ортогональны по построению.

Используя принцип соответствия и взяв эрмитову часть вектора $\mathbf{M}$, получим следующие коммутационные соотношения между L_i , M_i и H :

$$\begin{aligned} [L_i, H] &= [M_i, H] = 0, & [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \\ [L_i, M_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}M_k, & [M_i, M_j] &= -\frac{2i\hbar}{\mu}\epsilon_{ijk}L_kH, \end{aligned}$$

а из коммутационных соотношений между x_i и p_i следует, что также справедливы соотношения

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{M}^2 = k^2 + \frac{2}{\mu}(\mathbf{L}^2 + \hbar^2)H. \quad (2)$$

Если теперь ограничиться гильбертовым подпространством, соответствующим отрицательному собственному числу E гамильтониана H , то можно перемасштабировать вектор $\mathbf{M}$ как

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}} \mathbf{M}$$

и, следовательно, ввести операторы

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{L} + \widetilde{\mathbf{M}}}{2}, \quad \mathbf{J} = \frac{\mathbf{L} - \widetilde{\mathbf{M}}}{2},$$

которые образуют два несвязанных набора, удовлетворяющих алгебре $su(2)$:

$$\begin{aligned} [I_z, I_{\pm}] &= \pm I_{\pm}, & [I_+, I_-] &= 2I_z, \\ [J_z, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, & [J_+, J_-] &= 2J_z, \end{aligned}$$

так что в принципе мы имеем четыре квантовых числа i, m и j, p , диагонализующих соответственно операторы $\mathbf{I}^2$, I_z и $\mathbf{J}^2$, J_z .

Связать эти две алгебры с атомом водорода означает переписать соотношения (1) и (2) через $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ следующим образом:

$$(\mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2)|i, m, j, p\rangle = 0, \quad (3)$$

$$(\mathbf{I}^2 + \mathbf{J}^2)|i, m, j, p\rangle = -\left(\frac{\mu k^2}{4E} + \frac{\hbar^2}{2}\right)|i, m, j, p\rangle. \quad (4)$$

Поскольку

$$\mathbf{I}^2|i, m, j, p\rangle = i(i+1)\hbar^2|i, m, j, p\rangle, \quad \mathbf{J}^2|i, m, j, p\rangle = j(j+1)\hbar^2|i, m, j, p\rangle,$$

из выражения (3) получим $i = j$, а вследствие уравнения (4) имеем

$$2\hbar^2 j(j+1) = -\left(\frac{\mu k^2}{4E} + \frac{\hbar^2}{2}\right),$$

что приводит к формуле

$$E = -\frac{\mu k^2}{2\hbar^2(2j+1)^2}.$$

В результате можно отождествить $2j+1 = n$ с главным квантовым числом атома водорода. Поскольку $i = j$, гильбертово пространство имеет подходящую размерность.

Важно отметить, что j может принимать полуцелые значения, а каждая из проекций I_z и J_z может принимать $2j+1$ независимых значений, поэтому вырождение данного состояния, как и предполагалось, равно $(2j+1)^2 = n^2$.

3. q -ДЕФОРМИРОВАННАЯ $so(4)$ -СИММЕТРИЯ

Мы выбираем деформацию динамической симметрии типа $so(4) = su(2) \oplus su(2)$ атома водорода, заданную с помощью параметра q на основе хорошо обоснованной теории квантовой группы $su_q(2)$ [20]–[23], в которой коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [I_z, I_{\pm}] &= \pm I_{\pm}, & [I_+, I_-] &= [2I_z], \\ [J_z, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, & [J_+, J_-] &= [2J_z], \end{aligned}$$

где

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\text{sh}(sx)}{\text{sh } s}, \quad s = \ln q,$$

а q – действительный параметр. В этом разделе положим $\hbar = 1$. Отметим, что в принципе можно было бы выбрать два различных параметра, по одному на каждую копию группы $su(2)$. Этот вопрос будет обсуждаться ниже.

Что касается представления, то оно означает, что I_z и J_z действуют на гильбертовом пространстве точно так же, как и раньше, а для других операторов имеем

$$I_{\pm}|i, m, j, p\rangle = \sqrt{[i \pm m + 1][i \mp m]}|i, m \pm 1, j, p\rangle \quad (5)$$

и аналогично для $J_{\pm}$, поэтому соотношения типа

$$I_{\pm}I_{\mp}|i, m, j, p\rangle = ([i][i + 1] - [m][m \mp 1])|i, m, j, p\rangle \quad (6)$$

по-прежнему остаются диагональными в старом гильбертовом пространстве (при использовании того же базиса).

Поскольку операторы $I_{\pm}$ и $J_{\pm}$ имеют схожие коммутационные соотношения с I_z и J_z , они повышают и понижают свои собственные значения так же, как и раньше. Это означает, что гильбертово пространство имеет те же самые квантовые числа: одно связано с оператором Казимира, а второе – с z -компонентой углового момента.

3.1. Использование деформированных операторов Казимира. Центр алгебры изменяется при деформации коммутационных соотношений. Это означает, что если мы придерживаемся формальных аспектов получения спектра с помощью $so(4)$ -симметрии, что делалось в вышеупомянутых ранних работах, следует выбрать операторы Казимира деформированной алгебры в виде

$$\begin{aligned} C_2^I|i, m, j, p\rangle &= \left(\frac{1}{2}(I_+I_- + I_-I_+) + \frac{[2]}{2}[I_z]^2 \right)|i, m, j, p\rangle = [i][i + 1]|i, m, j, p\rangle, \\ C_2^J|i, m, j, p\rangle &= \left(\frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + \frac{[2]}{2}[J_z]^2 \right)|i, m, j, p\rangle = [j][j + 1]|i, m, j, p\rangle. \end{aligned}$$

Теперь условие ортогональности будет записываться как

$$C_2^I|i, m, j, p\rangle = C_2^J|i, m, j, p\rangle,$$

откуда следует только одно условие $i = j$, поэтому гильбертово пространство имеет тот же размер, что и в недеформированном случае. При такой постановке задачи энергия принимает вид

$$E_j = -\frac{\mu k^2}{8[j][j + 1]}, \quad (7)$$

в результате получим то же вырождение, что и раньше.

Заметим, однако, что, хотя генераторы двух алгебр $su_q(2)$ интерпретируются так же, как и в недеформированном случае, определяющие спектр уравнения имеют другой смысл. Условием ортогональности теперь будет соотношение

$$L_x \widetilde{M}_x + L_y \widetilde{M}_y + \frac{[2]}{2} [L_z] [\widetilde{M}_z] = 0$$

или, в более явном виде,

$$L_x \widetilde{M}_x + L_y \widetilde{M}_y + \frac{\text{sh}(2s) \text{sh}(sL_z) \text{sh}(s\widetilde{M}_z)}{2 \text{sh}^3 s} = 0.$$

Это означает, что векторы углового момента и Рунге–Ленца теперь неортогональны. Чтобы понять это, нужно взять первые элементы разложения гиперболического синуса и перегруппировать их в скалярное произведение, а все остальные ненулевые члены в явном виде дадут нарушение ортогональности. Это приводит к противоречивой ситуации, поскольку ортогональность вектора Рунге–Ленца и вектора углового момента в недеформированном случае вытекает непосредственно из их определений как векторных произведений.

Аналогично, при использовании деформированного оператора Казимира изменяется выражение для энергии, поэтому гамильтониан, который описывается данной q -деформированной системой, отличается от исходного, хотя общепринятый подход затрудняет обнаружение этого факта.

Энергия в неявном виде задается уравнением (2). Решая его в недеформированном случае, получим кулоновский потенциал. Неявное выражение в q -деформированном случае имеет вид

$$L_x^2 + L_y^2 - \frac{\mu}{2E} (M_x^2 + M_y^2) + \frac{\text{sh}(2s)}{2 \text{sh}^3 s} \left\{ \text{sh}^2 \left(s \left(L_z + \sqrt{-\frac{\mu}{2E}} M_z \right) \right) + \text{sh}^2 \left(s \left(L_z - \sqrt{-\frac{\mu}{2E}} M_z \right) \right) \right\} = -\frac{\mu k^2}{4E} + \frac{\hbar^2}{2}.$$

Теперь, если решить это уравнение относительно E , кулоновский потенциал не получится. Отметим, что все проблемные слагаемые включают в себя только z -направление, показывая тем самым, что система больше не описывается центральным потенциалом.

Из всего этого можно сделать вывод, что способ построения q -деформации атома водорода, использованный в предыдущих работах, имеет изъяны и противоречия в его физической интерпретации, наиболее значимые из которых – это потеря ортогональности между угловым моментом и вектором Рунге–Ленца и тот факт, что q -деформированный гамильтониан больше не может быть интерпретирован как гамильтониан, связанный с классическим кулоновским гамильтонианом. Последняя ситуация в некотором смысле аналогична описанной в работе [6], в которой q -деформированный гармонический осциллятор по сути является нелинейным.

В следующем пункте предложен способ, позволяющий обойти эти проблемы и ввести физически непротиворечивую q -деформацию атома водорода, приводящую к новым интересным особенностям.

3.2. Соотношение $\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0$ и энергетическая оболочка. Рассмотрим теперь соотношения (3) и (4). Это операторы Казимира недеформированной алгебры $so(4)$, и, более того, в соотношении (3) скрыто условие ортогональности между векторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$.

Используя выражения (5) и (6), легко деформировать соотношение (3) и увидеть, что из уравнения $(\mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2)|i, m, j, p\rangle = 0$ следует, что $i = j$ и $m^2 = p^2$. Заметим, что второе ограничение является абсолютно новым для деформированного случая. Это означает, что результирующее гильбертово пространство будет меньше, и при возвращении параметра деформации к $q = 1$ будет наблюдаться скачок его размерности. Это напоминает “фазовый переход”.

Исследование соотношения (4) показывает, что оно остается диагональным несмотря на то, что оно не определяет оператор Казимира деформированной алгебры. Налагая условие ортогональности, получим

$$(\mathbf{I}^2 + \mathbf{J}^2)|i, m, j, p\rangle = (2[j][j+1] - [m]([m+1] + [m-1]) + 2m^2)|i, m, j, p\rangle.$$

Это сразу дает деформированную энергию атома водорода:

$$E_{jm} = -\frac{\mu k^2}{8[j][j+1] - 4[m]([m+1] + [m-1]) + 8m^2 + 2}.$$

Легко понять, что это выражение имеет правильный предел при $q \rightarrow 1$. Поскольку энергия E_{jm} теперь зависит дополнительно от квантового числа m , часть вырождения энергетического спектра нарушается. Легко увидеть, что замена $m \rightarrow -m$ оставляет энергию инвариантной, и, таким образом, для каждого значения j существуют $j+1$ возможных энергетических уровней.

Найдем теперь вырождение каждого такого уровня. Поскольку результат не зависит от p , можно ожидать, что получится обычное $(2j+1)$ -кратное вырождение. Но этого не происходит из-за наличия условия связи $(\mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2)|i, m, j, p\rangle = 0$, которое приводит к соотношению $m^2 = p^2$ и, следовательно, $p = \pm m$. Это означает, что энергия E_{jm} имеет четырехкратное вырождение при $m \neq 0$ и невырождена при $m = 0$, поэтому каждому значению j соответствуют $4j+1$ состояний, в отличие от обычного $(2j+1)^2$ -кратного вырождения.

Интересно отметить, что вырождение спектра атома водорода в некоммутативном пространстве является хорошо исследованной проблемой. В зависимости от использованных построений оно может полностью [24] или частично [9] нарушаться или даже полностью сохраняться [25].

3.3. Различные параметры деформации. Поскольку мы имеем две копии $su(2)$ -симметрии, можно попытаться деформировать их с помощью различных параметров q и q' . В этом случае из условия ортогональности (с помощью деформированного оператора Казимира) получим

$$\frac{\text{sh}(si) \text{sh}(s(i+1))}{\text{sh}^2(s)} = \frac{\text{sh}(tj) \text{sh}(t(j+1))}{\text{sh}^2(t)},$$

где $s = \ln q$ и $t = \ln q'$. В главном порядке этого уравнения снова получим равенство $i(i+1) = j(j+1)$, как и в недеформированном случае, поэтому $i = j$. Используя

следующий (после главного) порядок, приходим к выводу, что $s = t$, следовательно $q = q'$. Другими словами, если попытаться использовать два различных параметра деформации, то деформированное условие ортогональности укажет, что они должны совпадать.

В новом подходе, использующем недеформированные операторы Казимира, ситуация аналогична. Из уравнений первого порядка имеем $i = j$, а второй порядок приводит или к $q = q'$ (как и раньше), или, для весьма специфических значений отношения s/t , к гильбертову пространству с одним собственным состоянием. Второй случай не представляет интереса. Это означает, что в рамках обоих подходов мы вынуждены использовать один и тот же параметр деформации для обеих копий группы $su_q(2)$.

4. ВЫВОДЫ

Построена физически непротиворечивая q -деформированная версия энергетического спектра атома водорода. Для этого применяется деформация коммутационного соотношения для динамической $so(4)$ -симметрии с использованием квантовой группы $su_q(2)$. При таких условиях действия операторов $I_{\pm}$ и $J_{\pm}$ аналогичны действию операторов в недеформированном случае с заменой коэффициентов на q -числа.

Результирующее гильбертово пространство меньше, а вырождение энергетического спектра частично нарушается из-за того, что, хотя операторы $\mathbf{I}^2$ и $\mathbf{J}^2$ по-прежнему диагональны, их собственные значения имеют дополнительную зависимость от m и p . Вырождение не снимается полностью из-за связи $m = \pm p$ и инвариантности энергии относительно преобразования $m \rightarrow -m$. Остаточное вырождение не зависит от j . Число состояний, соответствующее каждому значению квантового числа j , меньше, чем в обычном случае.

Можно сравнить спектр гильбертова пространства, найденный в нашем подходе, т.е. с помощью соотношения ортогональности и энергетического соотношения, со спектром, полученным с помощью деформированных операторов Казимира, когда гильбертово пространство имеет ту же размерность, что и в недеформированном случае, а энергетическое вырождение не затрагивается, но физическая интерпретация становится более сложной; при этом вектор Рунге–Ленца не ортогонален угловому моменту. Следует заметить, что вектор Рунге–Ленца по-прежнему является сохраняющейся величиной. Смысл гамильтониана также изменяется, но это понятие сложнее, потому что $so(4)$ -симметрия привлекается только после сужения на энергетическую оболочку.

На основе сделанных замечаний можно утверждать, что q -деформированное построение, изложенное в ранних работах, не связано в действительности с классическим кулоновским гамильтонианом и, таким образом, физически неверно, несмотря на математическую корректность.

Мы указали на невозможность использования разных параметров деформации в каждой из двух копий $su(2)$ -симметрии, из которых состоит $so(4)$ -симметрия.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ф. Топшану и В. Куприянову за информативные комментарии.

Список литературы

- [1] H. Grosse, J. Madore, H. Steinacker, *J. Geom. Phys.*, **38**:3–4 (2001), 308–342, arXiv: hep-th/0005273.
- [2] H. Grosse, J. Madore, H. Steinacker, *J. Geom. Phys.*, **43**:2–3 (2002), 205–240, arXiv: hep-th/0103164.
- [3] A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, *Phys. Rev. D*, **52**:2 (1995), 1108–1118, arXiv: hep-th/9412167.
- [4] C. Quesne, V.M. Tkachuk, *SIGMA*, **3** (2007), 016, 18 pp.
- [5] Y. J. Ng, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**:6 (1990), 1023–1027.
- [6] V. I. Man'ko, R. Vilela Mendes, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:28 (1998), 6037–6044, arXiv: quant-ph/9705039.
- [7] M. Micu, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:44 (1999), 7765–7777, arXiv: math-ph/9904011.
- [8] J. Zhang, *Phys. Lett. B*, **477**:1–3 (2000), 361–366, arXiv: hep-ph/0405009.
- [9] V. G. Kupriyanov, *J. Phys. A*, **46**:24 (2013), 245303, 7 pp., arXiv: 1209.6105.
- [10] P. Kustaanheimo, J. Stiefel, *J. Reine Angew. Math.*, **1965**:218 (1965), 204–219.
- [11] M. Boiteux, *Physica*, **65**:2 (1973), 381–395.
- [12] L. Rosa, P. Vitale, *Modern Phys. Lett. A*, **27**:35 (2012), 1250207, 15 pp., arXiv: 1209.2941.
- [13] M. Kibler, T. Négadi, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**:22 (1991), 5283–5289.
- [14] X.-C. Song, L. Liao, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**:3 (1992), 623–634.
- [15] J. Gora, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**:23 (1992), L1281–L1285.
- [16] Q.-G. Yang, B.-W. Xu, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:7 (1993), L365–L368.
- [17] W. Pauli, *Z. Phys.*, **36**:5 (1926), 336–363.
- [18] V. Fock, *Z. Phys.*, **98**:3–4 (1935), 145–154.
- [19] M. Bander, C. Itzykson, *Rev. Modern Phys.*, **38**:2 (1966), 330–345; 346–358.
- [20] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:21 (1989), 4581–4588.
- [21] L. C. Biedenharn, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:18 (1989), L873–L878.
- [22] C.-P. Sun, H.-C. Fu, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:21 (1989), L983–L986.
- [23] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**:9 (1990), L415–L419.
- [24] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.*, **86**:13 (2001), 2716–2719, arXiv: hep-th/0010175.
- [25] V. Gáliková, S. Kováčik, P. Prešnajder, *J. Math. Phys.*, **54**:12 (2013), 122106, 20 pp., arXiv: 1305.0970.

Поступила в редакцию 4.04.2015