Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Ильин, Симметрии и инвариантные решения одномерного уравнения Больцмана для неупругих столкновений, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 221–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8884>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:50:52

© 2016 г.

О. В. Ильин*

СИММЕТРИИ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ НЕУПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Рассматривается одномерное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана для максвелловских частиц с неупругими столкновениями. Показано, что уравнение обладает пятимерной алгеброй точечных симметрий для всех значений параметров диссипации. Получена оптимальная система одномерных подалгебр и классы инвариантных решений.

Ключевые слова: уравнение Больцмана для неупругих столкновений, симметрии Ли, инвариантные решения, оптимальная система подалгебр.

DOI: 10.4213/tmf8884

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория нахождения групп симметрий Ли для дифференциальных уравнений является хорошо разработанной к настоящему времени [1]–[4], но приложение теории Ли к более сложным объектам математической физики, таким как дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, интегро-дифференциальные и стохастические уравнения, представляет более сложную задачу [5]. Настоящая работа посвящена нахождению точечных симметрий одномерного интегро-дифференциального уравнения Больцмана в фурье-представлении по скоростной координате для неупруго сталкивающихся максвелловских молекул.

Случай уравнения Больцмана для упругих столкновений подробно исследовался в работах разных авторов. В статьях [6], [7] было показано, что уравнение Больцмана допускает одиннадцатипараметрическую группу симметрий, а также то, что для некоторых типов потенциалов столкновений возможны дополнительные расширения данной группы. Позднее было показано, что найденная группа симметрий полна [8]. Естественным продолжением исследований была последующая классификация путем разбиения множества инвариантных решений на неэквивалентные

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00870).

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия.
E-mail: oilyin@gmail.com

классы, т. е. на такие решения, которые нельзя получить одно из другого с помощью преобразований из группы симметрий [9]. Поиск редуцированных уравнений (фактор-уравнений) для инвариантных решений в явном виде для полного уравнения Больцмана представляет собой сложную задачу, поскольку аналитическая форма инвариантных решений известна только для очень ограниченного числа случаев (которые фактически сводятся к известному решению Бобылева–Крука–Ву [10], [11]). Связь между групповыми свойствами уравнений газовой динамики и уравнением Больцмана показана в работе [12]. Особая роль проективной симметрии рассмотрена в статье [13]. Также группы симметрий были вычислены для уравнения Больцмана в случае газовой смеси [14].

Рассмотрим процесс неупругих столкновений двух частиц единичной массы, движущихся вдоль прямой. Пусть до столкновения частицы имеют скорости v_1 и v_2 , тогда после столкновения скорости частиц равны $v'_{1,2} = v_{1,2} \mp (1-p)g$, где $p \in (0, 1/2)$ – параметр диссипации, $g = v_1 - v_2$ (см. работу [15]). Очевидно, что закон сохранения импульса выполняется, но в результате столкновения происходит уменьшение кинетической энергии системы двух частиц на величину $\Delta E = -p(1-p)g^2$. Случай $p = 0$ отвечает упругим столкновениям, случай $p = \frac{1}{2}$ отвечает полностью неупругим столкновениям.

Эволюция плотности $P(t, v, x)$ распределения частиц, в которой t – временная переменная, x – пространственная координата, v – скорость, удовлетворяет интегродифференциальному уравнению [15], [16]

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{K}{(1-p)} \int_{\mathbb{R}} du P(u) P\left(\frac{v-pu}{1-p}\right) - KP \int_{\mathbb{R}} du P(u), \quad (1)$$

где введены следующие обозначения:

$$P = P(t, v, x), \quad P(u) = P(t, u, x), \quad P\left(\frac{v-pu}{1-p}\right) = P\left(t, \frac{v-pu}{1-p}, x\right),$$

а параметр K отвечает за частоту столкновений. В общем случае параметр K может зависеть от скорости, например, для частиц твердых шаров K пропорционален модулю разности скоростей сталкивающихся частиц и должен находиться под знаком интеграла. Для так называемых максвелловских частиц параметр K не зависит от скорости. В настоящей работе мы ограничимся случаем постоянной частоты столкновений и без ограничения общности положим $K = 1$.

Уравнение (1) можно упростить, если рассмотреть фурье-преобразование плотности $P(t, v, x)$ по скоростной переменной. Определим характеристическую функцию $\varphi(t, k, x) = \int_{\mathbb{R}} dv P(t, v, x) e^{ikv}$, которая удовлетворяет уравнению [16]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial x} = \varphi(pk) \varphi((1-p)k) - \varphi(0) \varphi(k), \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(k) = \varphi(t, k, x), & \varphi(0) &= \varphi(t, 0, x), \\ \varphi(pk) &= \varphi(t, pk, x), & \varphi((1-p)k) &= \varphi(t, (1-p)k, x). \end{aligned}$$

Симметрии уравнения (2) являются предметом исследования настоящей статьи.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем рассматривать векторное поле точечных симметрий в канонической форме Ли–Беклунда (см., например, работу [5]):

$$X = Q\partial_\varphi, \quad Q = \eta - A\varphi_x - B\varphi_k - C\varphi_t,$$

где $A = A(t, k, x, \varphi)$, $B = B(t, k, x, \varphi)$, $C = C(t, k, x, \varphi)$ и $\eta = \eta(t, k, x, \varphi)$.

Теперь требуется решить два вопроса. Во-первых, необходимо определить действие оператора X на производные от функции φ , во-вторых, продолжить действие оператора X на нелокальные члены.

Действие оператора X на φ_t , φ_{kx} определяется с помощью стандартных формул продолжения [1]–[5]

$$X_2 = Q\partial_\varphi + D_t(Q)\partial_{\varphi_t} + D_k D_x(Q)\partial_{\varphi_{kx}},$$

где D_t, D_x, D_k суть операторы полного дифференцирования. Например,

$$D_x = \partial_x + \varphi_x \partial_\varphi + \varphi_{xx} \partial_{\varphi_x} + \varphi_{kx} \partial_{\varphi_k} + \dots$$

Перейдем ко второму вопросу. Сначала рассмотрим произвольную функцию $h(k) = h(t, k, x)$ и введем для сокращения записи следующие обозначения

$$h(k)^+ \equiv h(pk), \quad h(k)^- \equiv h((1-p)k), \quad h(k)^0 \equiv h(k)|_{k=0}.$$

Необходимо отметить, что взятие производной по переменной k и операции $\pm, 0$, определенные выше, некоммутативны. Далее в работе выражения вида $\varphi_k^\pm$, φ_k^0 будут означать, что сначала берется производная по k , затем применяются преобразования $\pm, 0$. Обратный порядок действия специально выделяется скобками, например, $(\varphi^+)_k$ означает, что сначала производится операция $+$, затем к результату применяется дифференцирование по k . Очевидно, имеют место равенства

$$(\varphi^+)_k = p(\varphi^+)_{k+} = p(\varphi_k)^+ \equiv p\varphi_k^+. \quad (3)$$

Оператор $Q\partial_\varphi$ соответствует следующему инфинитезимальному преобразованию функции φ : $\varphi \rightarrow \varphi + aQ + o(a)$, где $a > 0$. Тогда, например, функция $\varphi^+ = \varphi(t, pk, x)$ преобразуется по закону $\varphi^+ \rightarrow \varphi^+ + aQ^+ + o(a)$, которому соответствует векторное поле $Q^+\partial_{\varphi^+}$, т.е. оператор X продолжается на φ^+ как $Q^+\partial_{\varphi^+}$.

Рассмотрим подробнее Q^+ . С учетом (3) получим:

$$Q^+ = \eta^+ - A^+\varphi_x^+ - B^+\varphi_{k+}^+ - C^+\varphi_t^+ = \eta^+ - A^+\varphi_x^+ - p^{-1}B^+(\varphi^+)_k - C^+\varphi_t^+.$$

Аналогично получим для φ^- , φ^0 :

$$\begin{aligned} Q^- &= \eta^- - A^-\varphi_x^- - B^-\varphi_{k-}^- - C^+\varphi_t^- = \eta^- - A^-\varphi_x^- - (1-p)^{-1}B^-(\varphi^-)_k - C^-\varphi_t^-, \\ Q^0 &= \eta^0 - A^0\varphi_x^0 - B^0\varphi_k^0 - C^0\varphi_t^0. \end{aligned}$$

Отметим также, что формулы действия поля симметрий на нелокальные члены можно получить, используя формализм работы [8], а именно, оператор ∂_φ продолжается на φ^+ , φ^- , φ^0 как вариационная производная. Например,

$$Q \frac{\delta}{\delta \varphi}(\varphi^0) = \int dk Q(k) \frac{\delta \varphi(0)}{\delta \varphi(k)} = \int dk Q(k) \delta(k) = Q^0.$$

Введем для удобства оператор F по правилу

$$F(\varphi) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial x} - (\varphi^+ \varphi^- - \varphi^0 \varphi). \quad (4)$$

Если φ – решение уравнения (2), то выполняется равенство $F(\varphi) = 0$.

В будущем при построении определяющих уравнений для симметрий будут встречаться члены вида $(\varphi^+)_t$, $(\varphi^-)_t$, $(\varphi^0)_t$. Если φ есть решение уравнения (2), тогда $(\varphi^+)_t$, $(\varphi^-)_t$, $(\varphi^0)_t$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial(\varphi^+)}{\partial t} = \varphi^{++} \varphi^{+-} - \varphi^0 \varphi^+ - i \frac{\partial^2(\varphi^+)}{\partial k^+ \partial x} = \varphi^{++} \varphi^{+-} - \varphi^0 \varphi^+ - i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial x} \right)^+, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\varphi^-)}{\partial t} = \varphi^{-+} \varphi^{--} - \varphi^0 \varphi^- - i \frac{\partial^2(\varphi^-)}{\partial k^- \partial x} = \varphi^{-+} \varphi^{--} - \varphi^0 \varphi^- - i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial x} \right)^-, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\varphi^0)}{\partial t} = -i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial k \partial x} \right)^0. \quad (7)$$

Отметим, что последнее уравнение есть уравнение непрерывности, записанное в схематичной форме (φ^0 – плотность газа).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

В настоящем разделе доказывается следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для каждого $p \in (0, \frac{1}{2})$ уравнение (2) имеет пятимерную группу симметрий, ее алгебра Ли порождена операторами

$$X_1 = -ik\varphi\partial_\varphi + t\partial_x, \quad X_2 = \varphi\partial_\varphi - k\partial_k - t\partial_t, \quad (8)$$

$$X_3 = x\partial_x - k\partial_k, \quad X_4 = \partial_x, \quad X_5 = \partial_t. \quad (9)$$

Оптимальная система одномерных подалгебр представляется в следующем виде:

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_1 \pm X_5, X_2 + aX_3 (a \neq 0), X_3 \pm X_5\}. \quad (10)$$

Инвариантные решения, соответствующие операторам оптимальной системы подалгебр, имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 : g(k, t)e^{-ikx/t}, \quad X_2 : t^{-1}g(kt^{-1}, x), \quad X_3 : g(t, kx), \quad X_4 : g(k, t), \\ X_5 : g(k, x), \quad X_1 \pm X_5 : g(\pm 2^{-1}t^2 - x, k)e^{\mp ikt}, \\ X_2 + aX_3 : t^{-1}g(t^a x, k^a x^{a+1}), \quad X_3 \pm X_5 : g(kx, xe^{\mp t}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Векторное поле X является симметрией уравнения (2), если выполняются условия

$$\tilde{X}_2(F(\varphi))|_{F(\varphi)=0} = 0, \quad \tilde{X}_2 = X_2 + Q^+ \partial_{\varphi^+} + Q^- \partial_{\varphi^-} + Q^0 \partial_{\varphi^0}, \quad (11)$$

где F определено равенством (4). Рассмотрим выражение $\tilde{X}_2(F(\varphi))$ подробнее:

$$\tilde{X}_2(F(\varphi)) = D_t(Q) + iD_k D_x(Q) - (Q^+ \varphi^- + Q^- \varphi^+ - Q^0 \varphi - Q\varphi^0). \quad (12)$$

Тогда уравнение (11) запишется в виде

$$D_t(Q) + iD_k D_x(Q) = Q^+ \varphi^- + Q^- \varphi^+ - Q^0 \varphi - Q\varphi^0, \quad (13)$$

при условии, что φ удовлетворяет равенству $F(\varphi) = 0$. Теперь, раскрывая выражения для полных дифференциалов и функции Q , получим для первого слагаемого левой части (13) следующее равенство:

$$\begin{aligned} D_t(Q) = & \eta_t + \eta_\varphi \varphi_t - A_t \varphi_x - A_\varphi \varphi_x \varphi_x - A \varphi_{tx} - \\ & - B_t \varphi_k - B_\varphi \varphi_k \varphi_t - B \varphi_{tk} - C_t \varphi_t - C_\varphi \varphi_t \varphi_t - C \varphi_{tt}. \end{aligned} \quad (14)$$

Второе слагаемое левой части (13) имеет вид

$$\begin{aligned} D_k D_x(Q) = & \eta_{kx} + \eta_{x\varphi} \varphi_k + \eta_{k\varphi} \varphi_x + \eta_{\varphi\varphi} \varphi_k \varphi_x + \eta_\varphi \varphi_{kx} - \\ & - A_{kx} \varphi_x - A_{x\varphi} \varphi_k \varphi_x - A_x \varphi_{kx} - A_{k\varphi} \varphi_x^2 - A_{\varphi\varphi} \varphi_k \varphi_{xx} - \\ & - 2A_\varphi \varphi_x \varphi_{kx} - A_k \varphi_{\varphi xx} - A_\varphi \varphi_k \varphi_{xx} - A \varphi_{kxx} - \\ & - B_{kx} \varphi_k - B_{x\varphi} \varphi_k^2 - B_x \varphi_k k - B_{k\varphi} \varphi_k \varphi_x - B_{\varphi\varphi} \varphi_x \varphi_k^2 - \\ & - B_\varphi (\varphi_{kx} \varphi_k + \varphi_x \varphi_{kk}) - B_k \varphi_{kx} - B_\varphi \varphi_k \varphi_{kx} - B \varphi_{kkx} - \\ & - C_{kx} \varphi_t - C_{x\varphi} \varphi_k \varphi_t - C_x \varphi_{tk} - C_{k\varphi} \varphi_x \varphi_t - C_{\varphi\varphi} \varphi_k \varphi_x \varphi_t - \\ & - C_\varphi (\varphi_{kx} \varphi_t + \varphi_x \varphi_{kt}) - C_k \varphi_{tx} - C_\varphi \varphi_k \varphi_{tx} - C \varphi_{kxt}. \end{aligned} \quad (15)$$

Правая часть (13) записывается как

$$\begin{aligned} Q^+ \varphi^- + Q^- \varphi^+ - Q^0 \varphi - Q\varphi^0 = & (\eta^+ - A^+ \varphi_x^+ - p^{-1} B^+ (\varphi^+)_k - C^+ \varphi_t^+) \varphi^- + \\ & + (\eta^- - A^- \varphi_x^- - (1-p)^{-1} B^- (\varphi^-)_k - C^- \varphi_t^-) \varphi^+ - \\ & - (\eta^0 - A^0 \varphi_x^0 - B^0 \varphi_k^0 - C^0 \varphi_t^0) \varphi - (\eta - A \varphi_x - B \varphi_k - C \varphi_t) \varphi^0. \end{aligned} \quad (16)$$

Конечно, в выражениях (14)–(16) требуется дополнительно учесть, что φ удовлетворяет условию $F(\varphi) = 0$, т. е. $\varphi_t = \varphi^+ \varphi^- - \varphi^0 \varphi - i \varphi_{kx}$.

ШАГ 1. Покажем, что $C = C(t)$. Рассмотрим в равенствах (14), (15) последние слагаемые, получим равенство $-C \varphi_{tt} - i C \varphi_{kxt} = -C(\varphi^+ \varphi^- - \varphi^0 \varphi)_t$. Отметим, что только эти слагаемые левой части содержат члены φ_{kx}^+ , φ_{kx}^- , φ_{kx}^0 (а также $\varphi^{++} \varphi^{+-}$, $\varphi^{--} \varphi^{+-}$, см. соотношения (5)–(7)). Рассмотрим слагаемые правой части, содержащие такие члены; это, очевидно, слагаемые $\varphi_t^+ \varphi^- + \varphi_t^- \varphi^+$. Собирая по отдельности слагаемые с φ_{kx}^+ , φ_{kx}^- , φ_{kx}^0 в левой и правой частях, получим три уравнения

$$\varphi_{kx}^+ : \quad C = C^+, \quad (17)$$

$$\varphi_{kx}^- : \quad C = C^-, \quad (18)$$

$$\varphi_{kx}^0 : \quad C = C^0. \quad (19)$$

Из уравнений (17)–(19) следует, что $C_k = 0$, $C_\varphi = 0$. Далее рассмотрим члены с φ_{kxx} , φ_{kkx} и получим

$$\varphi_{kxx} : \quad iA - iA = 0, \quad \varphi_{kkx} : \quad iB - iB + iC_x = 0.$$

Первое из уравнений является тождеством, а из второго следует, что $C_x = 0$. Итак, показано, что $C = C(t)$.

ШАГ 2. Теперь соберем все члены при $\varphi_{kx}\varphi_k$, $\varphi_{kx}\varphi_x$ и получим

$$\varphi_{kx}\varphi_k : \quad iB_\varphi - iB_\varphi - iB_\varphi = 0, \quad \varphi_{kx}\varphi_x : \quad iA_\varphi - 2iA_\varphi = 0.$$

Из уравнений выше сразу выводим, что $B_\varphi = 0$, $A_\varphi = 0$. Далее рассмотрим члены при φ_{kk} , φ_{xx} , φ_{kx} :

$$\varphi_{kk} : \quad iB_x = 0, \quad \varphi_{xx} : \quad iA_k = 0, \quad \varphi_{kx} : \quad C_t = A_x + B_k. \quad (20)$$

Члены при φ_x^2 , φ_k^2 тождественно равны нулю, а обращение в ноль членов, стоящих при $\varphi_k\varphi_x$, дает равенство $\eta_{\varphi\varphi} = 0$. Слагаемые, стоящие при $\varphi_x^\pm\varphi^\mp$, $\varphi_x^0\varphi$, $\varphi_x\varphi^0$, дают уравнения $A = A^0 = A^+ = A^-$, которые выполняются тождественно, так как A есть функция только от t , x . Слагаемые, стоящие при $(\varphi^\pm)_k\varphi^\mp$, $\varphi_k^0\varphi$, $\varphi_k\varphi^0$, приводят к уравнениям $B = p^{-1}B^+ = (1-p)^{-1}B^-$, $B^0 = 0$, которые вместе с уравнением (20) означают, что B есть линейная функция от k :

$$B(t, k, x, \varphi) = B_1(t)k, \quad (21)$$

где $B_1(t)$ – неизвестная функция.

Соберем все результаты, полученные на данном шаге:

$$A = A_1(t)x + A_2(t), \quad B = B_1(t)k, \quad C = C(t), \quad (22)$$

$$\eta = \eta_1(t, k, x)\varphi + \eta_2(t, k, x), \quad (23)$$

$$C_t = A_x + B_k, \quad (24)$$

где $A_1(t)$, $A_2(t)$, $B_1(t)$, $C(t)$, $\eta_1(t, k, x)$, $\eta_2(t, k, x)$ – неизвестные функции, которые будут определены на следующем шаге.

ШАГ 3. Перепишем для наглядности уравнение (13) с учетом равенств (22), (23) (уравнение (24) рассмотрим позже):

$$D_t(Q) = \eta_{1,t}\varphi + \eta_{2,t} + \eta_1(\varphi^+\varphi^- - \varphi^0\varphi) - A_t\varphi_x - B_t\varphi_k - C_t(\varphi^+\varphi^- - \varphi^0\varphi), \quad (25)$$

$$iD_kD_x(Q) = i(\eta_{1,kx}\varphi + \eta_{2,kx} + \eta_{1,x}\varphi_k + \eta_{1,k}\varphi_x). \quad (26)$$

Правая часть (13) принимает вид

$$\begin{aligned} Q^+\varphi^- + Q^-\varphi^+ - Q^0\varphi - Q\varphi^0 = \\ = (\eta_1^+\varphi^+ + \eta_2^+)\varphi^- + (\eta_1^-\varphi^- + \eta_2^-)\varphi^+ - (\eta_1^0\varphi^0 + \eta_2^0)\varphi - (\eta_1\varphi + \eta_2)\varphi^0. \end{aligned} \quad (27)$$

Соберем члены при φ_k , φ_x , это даст уравнения

$$\varphi_x : \quad A_t = i\eta_{1,k}, \quad \varphi_k : \quad B_t = i\eta_{1,x}. \quad (28)$$

Из уравнений выше и из равенств (22), (23) можно заключить, что

$$\eta \equiv \eta_1\varphi + \eta_2 = (-iA_{1,t}kx - iA_{2,t}k + \lambda(t))\varphi + \eta_2, \quad (29)$$

где $\lambda(t)$ – неизвестная функция. Теперь, собирая слагаемые при $\varphi^+\varphi^-$, $\varphi\varphi^0$, получим

$$\varphi^+\varphi^- : \quad \eta_1 - C_t = \eta_1^+ + \eta_1^-, \quad \varphi\varphi^0 : \quad \eta_1 - C_t = \eta_1 + \eta_1^0,$$

откуда следует, что

$$C_t = -\lambda. \quad (30)$$

Рассмотрим члены, стоящие при φ : получим уравнение $\eta_{1,t} + i\eta_{1,kx} = 0$, из которого следует, что выполняются равенства

$$A_{1,tt} = 0, \quad A_{2,tt} = 0, \quad \lambda_t + iA_{1,t} = 0. \quad (31)$$

Осталось рассмотреть уравнения, получающиеся в результате группирования членов при φ^+ , φ^- , φ^0 и без φ . Эти уравнения сразу приводят к следующему результату:

$$\eta_2 = 0. \quad (32)$$

ШАГ 4. Решим систему дифференциальных уравнений, состоящую из соотношений (24), (28) и (30), (31):

$$A_{1,tt} = 0, \quad A_{2,tt} = 0, \quad \lambda_t + iA_{1,t} = 0, \quad (33)$$

$$C_t + \lambda = 0, \quad C_t = A_1 + B_1, \quad B_{1,t} = A_{1,t}. \quad (34)$$

Система уравнений (33), (34) имеет следующее решение:

$$A_1 = c_1, \quad A_2 = c_2t + c_3, \quad B_1 = c_4, \quad \lambda = -(c_1 + c_4), \quad C = (c_1 + c_4)t + c_5, \quad (35)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 – постоянные. Используя равенства (22), (23), (29) и (32) вместе с решениями (35), получим итоговую запись для алгебры симметрий в канонической форме:

$$X = (-(ic_2k + c_1 + c_4)\varphi - (c_1x + c_2t + c_3)\varphi_x - c_4k\varphi_k - ((c_1 + c_4)t + c_5)\varphi_t)\partial_\varphi.$$

Поле X , определенное выше, эквивалентно следующему полю симметрий в стандартной записи:

$$X = -(ic_2k + c_1 + c_4)\varphi\partial_\varphi + (c_1x + c_2t + c_3)\partial_x + c_4k\partial_k + ((c_1 + c_4)t + c_5)\partial_t.$$

Из последнего соотношения сразу следует справедливость равенств (8), (9).

ШАГ 5. Рассмотрим вопрос построения оптимальной системы подалгебр, т.е. элементов алгебры симметрий, неэквивалентных относительно присоединенного представления. Решения, инвариантные относительно разных элементов оптимальной подалгебры, не могут быть переведены одно в другое преобразованием из группы симметрий, т.е. множество таких решений образует оптимальную систему решений [2].

Оператор присоединенного представления Ad задается следующим образом [2]:

$$\text{Ad}(e^{\epsilon X_i})(X_j) = X_j - \epsilon[X_i, X_j] + \frac{\epsilon^2}{2}[X_i, [X_i, X_j]] + \dots, \quad (36)$$

где $X_i, X_j, i, j = 1, \dots, 5$, – поля из (8), (9). Рассматривая все возможные пары X_i, X_j и используя формулу (36), получим таблицу присоединенных представлений (см. табл. 1).

ТАБЛИЦА 1. Присоединенные представления $\text{Ad}(e^{\epsilon X_i})X_j$ алгебры симметрий (8), (9).

Ad	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	X_1	$X_2 - \epsilon X_1$	$X_3 - \epsilon X_1$	X_4	$X_5 + \epsilon X_4$
X_2	$e^\epsilon X_1$	X_2	X_3	X_4	$e^{-\epsilon} X_5$
X_3	$e^\epsilon X_1$	X_2	X_3	$e^\epsilon X_4$	X_5
X_4	X_1	X_2	$X_3 - \epsilon X_4$	X_4	X_5
X_5	$X_1 - \epsilon X_4$	$X_2 + \epsilon X_5$	X_3	X_4	X_5

Для построения оптимальной системы подалгебр используется стандартная техника, суть которой заключается в том, чтобы взять общий элемент Y из алгебры симметрий и, используя всевозможные присоединенные действия, привести Y к наиболее простой форме.

Рассмотрим элемент $Y = \sum_{j=1}^5 a_j X_j$, $a_j \neq 0$. Подействуем на него оператором $\text{Ad}(e^{-a_2^{-1} a_5 X_5})$:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{-a_2^{-1} a_5 X_5})Y &= a_1(X_1 + a_2^{-1} a_5 X_4) + a_2(X_2 - a_2^{-1} a_5 X_5) + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = \\ &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4' X_4. \end{aligned}$$

На получившийся результат подействуем оператором $\text{Ad}(e^{a_4' a_3^{-1} X_4})$, что даст

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3,$$

затем подействуем оператором $\text{Ad}(e^{(a_2+a_3)^{-1} a_1 X_1})$. В результате останется вектор

$$a_2 X_2 + a_3 X_3 = a_2(X_2 + a_2^{-1} a_3 X_3) \simeq X_2 + a X_3, \quad a \neq 0.$$

Очевидно, что дальнейшие упрощения невозможны, и в результате получился предпоследний член в системе (10). Далее следует рассмотреть вектор

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_4 X_4 + a_5 X_5,$$

т. е. $a_3 = 0$. Аналогично можно показать, что он сводится к X_2 . Вектор

$$a_1 X_1 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5, \quad a_2 = 0,$$

приводится к $X_3 \pm X_5$ или к X_3 (если $a_5 = 0$). Вектор

$$a_1 X_1 + a_4 X_4 + a_5 X_5, \quad a_2 = a_3 = 0,$$

упрощается до $X_1 \pm X_5$ или до X_1 (если $a_5 = 0$). Наконец, вектор

$$a_4 X_4 + a_5 X_5, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

приводится к X_5 или к X_4 (если $a_5 = 0$). Утверждение доказано.

В заключение следует отметить, что построение фактор-уравнений для инвариантных относительно оптимальной системы подалгебр решений является элементарной задачей. Таким образом, перспективным выглядит дальнейшее исследование редуцированных уравнений и нахождение в явном виде характеристических функций φ .

Список литературы

- [1] L. V. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982.
- [2] P. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, 1993.
- [3] V. V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, **9**, World Sci., Singapore, 1992.
- [4] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.
- [5] Y. N. Grigoryev, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev, S. V. Meleshko, *Symmetries of Integro-Differential Equations*, Springer, Dordrecht, 2010.
- [6] Ю. Н. Григорьев, С. В. Мелешко, *Докл. АН СССР*, **297**:2 (1987), 323–327.
- [7] A. V. Bobylev, *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, **3**:4 (1993), 443–476.
- [8] A. V. Bobylev, V. Dorodnitsyn, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **24**:1 (2009), 35–57.
- [9] Ю. Н. Григорьев, С. В. Мелешко, P. Sattayatham, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:28 (1999), L337–L342.
- [10] А. В. Бобылев, *Докл. АН СССР*, **225**:6 (1975), 1296–1299.
- [11] M. Krook, T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **36**:19 (1976), 1107–1109.
- [12] А. В. Бобылев, Н. Х. Ибрагимов, *Матем. моделирование*, **1**:3 (1989), 100–109.
- [13] A. V. Bobylev, G. L. Caraffini, G. Spiga, *J. Math. Phys.*, **37**:6 (1996), 2787–2795.
- [14] Ю. Н. Григорьев, С. В. Мелешко, *Сиб. матем. журн.*, **38**:3 (1997), 510–525.
- [15] E. Ben-Naim, P. L. Krapivsky, “The inelastic Maxwell model”, *Lecture Notes in Physics*, **624**, Springer, Berlin, 2003, 65–94.
- [16] E. Ben-Naim, P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. E*, **61**:1 (2000), R5–R8, arXiv:cond-mat/9909176.

Поступила в редакцию 2.03.2015