Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ноаров, Стационарное уравнение Фоккера–Планка на некомпактных многообразиях и в неограниченных областях, *ТМФ*, 2016, том 189, номер 3, 453–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8885>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:48:13

© 2016 г.

А. И. Ноаров*

СТАЦИОНАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА НА НЕКОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

На бесконечной цилиндрической поверхности и в бесконечной полосе с отражающими граничными условиями исследуется стационарное уравнение Фоккера–Планка. Доказывается наличие положительного (не обязательно интегрируемого) решения. Далее выводятся различные условия на векторное поле $\mathbf{f}$, достаточные для существования решения, являющегося плотностью вероятности. Эти условия выполняются, в частности, для некоторых векторных полей $\mathbf{f}$ с интегральными траекториями, уходящими на бесконечность.

Ключевые слова: диффузионный процесс, стационарное распределение, эллиптическое уравнение для мер, метод усреднения.

DOI: 10.4213/tmf8885

1. ВВЕДЕНИЕ

В продолжение работ [1], [2], [3] исследуется вопрос о наличии положительных и вероятностных решений уравнения

$$\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0, \quad (1)$$

рассматриваемого на некомпактном многообразии. В частности, уравнение (1) рассматривается на бесконечной цилиндрической поверхности, а затем – в бесконечной полосе. При этом на границе полосы устанавливаются отражающие граничные условия. Основная цель работы состоит в получении различных условий на векторное поле $\mathbf{f}$, достаточных для существования решения (1), являющегося плотностью вероятности. Такую плотность имеет стационарный случайный процесс, порожденный стохастическим дифференциальным уравнением $d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})dt + \sqrt{2}dw_t$. Это уравнение (и его модификации с интенсивностью шума, зависящей от $\mathbf{x}$) возникает как математическая модель в самых разных областях естествознания – от статистической гидромеханики (см. статью [4]) до динамики популяций (см. работу [5]) и биохимической кинетики. Источником шума может служить как внешняя среда

*Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия. E-mail: ligrans@mail.ru

(случайный приток реагентов в живую клетку), так и внутренние флуктуации, связанные со статистической природой реакций. В такой ситуации описание системы одним лишь детерминированным уравнением $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ оказывается некорректным.

Вероятностное решение уравнения (1) на некомпактном многообразии существует далеко не при каждом векторном поле $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Так, например, при фокусирующем $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ распределение Гаусса удовлетворяет формуле (1) на пространстве $\mathbb{R}^n$, но при $\mathbf{f} \equiv 0$ и некоторых других $\mathbf{f}$ (см. замечание к теореме 3 из статьи [1]) уравнение (1) на $\mathbb{R}^n$ не имеет вероятностного решения. Наличие же такого решения приводит к следующему свойству нестационарного уравнения $\partial u / \partial t = \Delta u - \text{div}(u\mathbf{f})$, описывающего эволюцию плотности вероятности системы $d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})dt + \sqrt{2}dw_t$. Именно, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_K u(\mathbf{x}, t) dx_1 \dots dx_n > 0$ для некоторого компакта K , зависящего от векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и от положительного начального условия $u(\mathbf{x}, 0) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (см. доказательство теоремы 3 из статьи [6]). Таким образом, интеграл, имеющий смысл вероятности того, что значение переменной x принадлежит компакту K , с течением времени не стремится к нулю. Это свойство, не имеющее места для уравнения теплопроводности, мы связываем с пространственной локализацией плотности и с устойчивостью динамической системы $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ к действию шума, прибавленного к ее правой части. Для системы $d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})dt + \sqrt{2}dw_t$, моделирующей биологический объект, такое свойство мы склонны считать характеристическим и интерпретировать его как устойчивость кинетики к микроскопическим флуктуациям.

Объект, фазовым пространством которого могла бы служить бесконечная цилиндрическая поверхность (или, в более общем виде, – область определения из теорем 2 и 3), гипотетически можно представить следующим образом. Он характеризуется двумя группами переменных. Первая группа – потенциально бесконечные переменные, скажем концентрации реагирующих веществ. Переменные второй группы блуждают по компактному многообразию, они описывают конформацию (т.е. взаимное расположение подвижных частей) макромолекулы-регулятора, влияющего на скорость реакций. Концентрации реагирующих веществ могут влиять на конформацию (или на скорость ее изменения). Таким образом, получается возмущенная шумом (броуновским движением) динамическая система на произведении некомпактного и компактного многообразий. Ее стационарное распределение (в случае его существования) подчиняется уравнению (1) или его аналогу с переменными коэффициентами диффузии.

Чисто математический вопрос о наличии вероятностного решения уравнения (1) исследуется в два этапа. Сначала для произвольного векторного поля доказывается существование положительного, но не обязательно интегрируемого решения. При этом используется теорема о разрешимости уравнения (1) на компактном многообразии (см. книги [7] и [8]), следствием которой является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого заданного на торе T бесконечно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{f}$ найдется положительное решение $u \in C^\infty(T)$ уравнения (1).*

Далее, на втором этапе мы получаем различные условия сходимости интеграла от положительного решения путем исследованием этого решения на бесконечности методами, рассмотренными в работах [1], [2]. В результате вероятностное решение

уравнения (1) обнаруживается для широкого класса векторных полей $\mathbf{f}$, включающего и столь неочевидный пример, когда интегральные траектории $\mathbf{f}$ (см. формулу (7)) уходят на бесконечность. В связи с этим примером еще раз отметим, что в ряде случаев (при рассеивающих $\mathbf{f}$) некомпактность многообразия приводит к отсутствию интегрируемого положительного решения.

2. ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ

Рассмотрим тор T , полученный из куба $[-b, b]^m$, $b > 0$, “склеиванием” его противоположных граней. В данном разделе доказывается наличие положительного решения уравнения (1) на многообразии $T \times \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого бесконечно дифференцируемого векторного поля*

$$\mathbf{f}: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

найдется положительное решение $u \in C^\infty(T \times \mathbb{R}^n)$ уравнения $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем доказательство в случае $m = n = 1$, общий случай рассматривается аналогично. Итак, T – окружность, полученная из отрезка $[-b, b]$, $b > 0$, склеиванием его концов. Введем последовательность функций $\{\varphi_k(x, y)\}_{k=1}^\infty$ со следующими свойствами: $\varphi_k \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R})$, $0 \leq \varphi_k(x, y) \leq 1$, $\varphi_k(x, y) = 0$ при $|y| \geq k + 1$ и $\varphi_k(x, y) = 1$ при $|y| \leq k$, где y – координата вдоль $\mathbb{R}$ текущей точки многообразия $T \times \mathbb{R}$.

Умножим векторное поле $\mathbf{f}$ на $\varphi_k(x, y)$ и рассмотрим уравнение

$$\Delta u_k - \operatorname{div}(u_k \varphi_k \mathbf{f}) = 0 \quad (2)$$

относительно неизвестной функции u_k на $T \times [-k - 1, k + 1]$. Склеим противоположные граничные окружности цилиндра $T \times [-k - 1, k + 1]$ и на полученном торе рассмотрим уравнение (2). Ясно, что векторное поле $\varphi_k \mathbf{f}$ на указанном торе бесконечно дифференцируемо. Поэтому на основании теоремы 1 равенство (2) справедливо для некоторой бесконечно дифференцируемой на торе положительной функции u_k . Далее разрезаем тор по окружности склеивания, периодически по y продолжаем функцию u_k с $T \times [-k - 1, k + 1]$ на бесконечную цилиндрическую поверхность $T \times \mathbb{R}$ и считаем, что $u_k(0) = 1$.

Выясним, сходится ли последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ в каком-нибудь смысле и является ли предел решением уравнения (1) на $T \times \mathbb{R}$. Для этого докажем ее ограниченность в весовом пространстве L^2 с подходящим весом, получив поточечные верхние и нижние оценки для u_k положительными функциями, не зависящими от k . Для решения уравнения (1) на $\mathbb{R}^n$ такие оценки типа неравенства Харнака были получены в статье [1]:

$$u(0)2^{-n}e^{-3|\mathbf{x}|M(|\mathbf{x}|)} \leq u(\mathbf{x}) \leq u(0)2^n e^{3|\mathbf{x}|M(|\mathbf{x}|)},$$

где $M(R) = \sup_{|y| < 3R} |\mathbf{f}(\mathbf{y})|$.

При умножении векторного поля на $\varphi_k(x, y)$, $0 \leq \varphi_k(x, y) \leq 1$, функция $M(R)$ не увеличивается. Поэтому те же оценки были бы справедливы для всех u_k , если бы u_k удовлетворяли (2) на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Чтобы применить эти неравенства к u_k , определенным на $T \times \mathbb{R}$, временно (на время получения оценки) $u_k(x, y)$

и $\varphi_k \mathbf{f}(x, y)$ периодически продолжаем по x с $T \times \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$, но оцениваем $u_k(x, y)$ в полосе $[-b; b] \times \mathbb{R}$. В результате для $u_k(x, y)$ на $T \times \mathbb{R}$ получаем формулы

$$\frac{1}{4} e^{-3zM(z)} \leq u_k(x, y) \leq 4 e^{3zM(z)}, \quad (3)$$

где $M(r) = \sup_{|y| < 3r, x \in T} |\mathbf{f}(x, y)|$, $z = |y| + b$, $x \in T$, $y \in \mathbb{R}$.

Из неравенства (3) следует, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ содержится в гильбертовом пространстве функций

$$L^2(T \times \mathbb{R}, e^{-|y| - 6(|y|+b)M(|y|+b)} dx dy) \quad (4)$$

с квадратом нормы

$$\int_{\substack{x \in T, \\ y \in \mathbb{R}}} e^{-|y| - 6(|y|+b)M(|y|+b)} u^2(x, y) dx dy$$

и ограничена в нем. Поэтому $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ содержит слабо сходящуюся в (4) подпоследовательность, которую, упрощая обозначения, также обозначим через $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, а ее слабый предел – через u . Последовательность $\{\varphi_k(x, y)\}_{k=1}^\infty$ “проредим” в соответствии с $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, при этом выполнение условий (2) и (3) сохраняется.

Выясним, является ли u решением уравнения $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0$. Для этого скалярно в $L^2(T \times \mathbb{R})$ умножим равенство (2) на произвольную функцию $\psi \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R})$ и, интегрируя по частям, получим формулу

$$\int_{T \times \mathbb{R}} u_k(\mathbf{x}) (\Delta \psi(\mathbf{x}) + \varphi_k(\mathbf{x})(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \nabla \psi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{при всех } \psi \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R}).$$

Зафиксируем какую-либо функцию $\psi \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R})$. Тогда при всех достаточно больших k функция φ_k на носителе функции ψ равна единице, поэтому при таких k верно равенство

$$\int_{T \times \mathbb{R}} u_k(\mathbf{x}) (\Delta \psi(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}(\mathbf{x}), \nabla \psi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} = 0.$$

Принимая во внимание слабую сходимости u_k к u в пространстве (4), исходя из последнего равенства, получаем, что

$$\int_{T \times \mathbb{R}} u(\mathbf{x}) (\Delta \psi(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}(\mathbf{x}), \nabla \psi(\mathbf{x}))) d\mathbf{x} = 0, \quad (5)$$

так как левая часть (5) при фиксированном $\psi \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R})$ задает над (4) линейный непрерывный функционал, имеющий аргумент $u(\mathbf{x})$.

Итак, равенство (5) доказано при всех $\psi \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R})$. Интегрируя по частям, мы уже выяснили, что оператор, ставящий в соответствие функции $\psi \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R})$ функцию $\Delta \psi + (\mathbf{f}, \nabla \psi)$, является формально сопряженным оператору, переводящему $\psi \in C_0^\infty(T \times \mathbb{R})$ в $\Delta \psi - \operatorname{div}(\psi \mathbf{f})$. Поэтому на основании равенства (5) и теоремы о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений заключаем, что функция $u \in C^\infty(T \times \mathbb{R})$ удовлетворяет (1).

Функция u является слабым пределом в (4) последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, для которой верны неравенства (3). Поэтому неравенства (3) верны и для u в каждой

точке $\mathbf{x}_0 \in T \times \mathbb{R}$, в чем можно убедиться, сравнивая интегралы от непрерывных функций u и u_k по малым окрестностям точки $\mathbf{x}_0$ (эти интегралы задают непрерывные линейные функционалы над (4)). Таким образом, функция u положительна. Теорема доказана.

Следуя приведенным выше рассуждениям, можно доказать существование положительного решения на цилиндрической поверхности и для системы уравнений

$$\begin{aligned}\Delta u_1 - \operatorname{div}(u_1 \mathbf{f}_1) - a_1 u_1 + a_2 u_2 &= 0, \\ \Delta u_2 - \operatorname{div}(u_2 \mathbf{f}_2) - a_2 u_2 + a_1 u_1 &= 0,\end{aligned}$$

предложенной в статье [3] для описания стационарного распределения случайного процесса с фазовым пространством $\mathbb{R}^n \times \{1; 2\}$. Доказательство основывается на теореме 4 из статьи [3] о наличии положительного решения системы на торе.

Анализ доказательства теоремы 2 позволяет выдвинуть гипотезу о существовании положительного решения уравнения (1) и на произвольном некомпактном многообразии. В зависимости от направления векторного поля положительное решение уравнения (1) (и системы уравнений) может как принадлежать, так и не принадлежать классу L^1 . Условия на векторное поле, достаточные для интегрируемости положительного решения, будут получены далее.

3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ НА $T \times \mathbb{R}^n$

После того как доказательство теоремы 2 завершено, напомним, что тор T получен из куба $[-b, b]^m$, $b > 0$, склеиванием его противоположных граней. На $T \times \mathbb{R}^n$ будем рассматривать векторные поля и функции, аргументом которых служит пара $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, при этом $\mathbf{x} \in T$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Запись $(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}\mathbf{y}), \mathbf{y})$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ вектора $\mathbf{y}$ и проекции вектора $\mathbf{f}$ на указанное выше пространство $\mathbb{R}^n$, которое ортогонально T и содержит $\mathbf{y}$.

Обозначение $(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}\mathbf{y}), \mathbf{y})$ можно (и более естественно) трактовать как обычное скалярное произведение векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{y}$ касательного пространства $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ к многообразию $T \times \mathbb{R}^n$, понимая под $\mathbf{y}$ элемент касательного пространства $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, содержащийся во втором его “множителе”. Этот множитель естественным образом отождествляется со вторым множителем области определения: $\mathbf{y}$ является аргументом функций и векторных полей, и вместе с тем он участвует в скалярном перемножении на вектор касательного пространства.

ЛЕММА 1. Пусть векторное поле $\mathbf{f}$ непрерывно дифференцируемо, функция u дважды непрерывно дифференцируема и верно равенство $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0$ на $T \times \mathbb{R}^n$. При $t \in \mathbb{R}$ положим

$$w(t) = \int_{x \in T} \int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, \mathbf{t}\mathbf{y}) (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}\mathbf{y}), \mathbf{y}) dS_y d\mathbf{x}, \quad v(t) = \int_{x \in T} \int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, \mathbf{t}\mathbf{y}) dS_y d\mathbf{x},$$

при этом внутренние интегралы берутся по $\mathbf{y}$ по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Тогда функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема и $dv/dt = w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем производную, поменяв местами интегрирование и дифференцирование и вычислив затем производную сложной функции:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \int_{x \in T} \int_{|y|=1} (\mathbf{y}, \nabla_z u(\mathbf{x}, \mathbf{z})|_{z=t\mathbf{y}}) dS_y d\mathbf{x} = \\ &= \int_{x \in T} \int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t\mathbf{y}), \mathbf{y}) dS_y d\mathbf{x} = w(t).\end{aligned}$$

Среднее равенство, а точнее, равносильное ему равенство

$$\int_{x \in T} \int_{|y|=1} (\mathbf{y}, (\nabla_z u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}))|_{z=t\mathbf{y}}) dS_y d\mathbf{x} = 0$$

докажем в несколько этапов.

При каждом $\mathbf{x} \in T$ и $t \in \mathbb{R}$ внутренний интеграл

$$\begin{aligned}&\int_{|y|=1} (\mathbf{y}, (\nabla_z u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - u(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z}))|_{z=t\mathbf{y}}) dS_y = \\ &= t^{1-n} \int_{|y|=t} \left((\nabla_y u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right) dS_y = \\ &= t^{1-n} \int_{|y|<t} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{m+i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} = \\ &= t^{1-n} \int_{|y|<t} \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{|y|<t} t^{1-n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y}\end{aligned}$$

является умноженным на t^{1-n} потоком через сферу $\{\mathbf{y}: |\mathbf{y}| = t\}$ в $\mathbb{R}^n$ векторного поля с i -й компонентой

$$\frac{\partial}{\partial y_i} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_{m+i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Он преобразован с помощью теоремы Остроградского–Гаусса. Затем учтено уравнение (1) и переставлены местами производная и интеграл.

Осталось проинтегрировать полученный результат по тору T . Интеграл по T от j -го слагаемого равен нулю, так как интеграл от производной $\partial/\partial x_j$ по окружностям, вдоль которых меняется x_j , а остальные x_k постоянны, равен нулю. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть векторное поле $\mathbf{f}: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируемо. Допустим, что сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1} \exp \left(\int_0^r \sup_{\substack{x \in T, \\ |y|=1}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t\mathbf{y}), \mathbf{y}) dt \right) dr, \quad (6)$$

в котором переменная $\mathbf{y}$ пробегает единичную сферу в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такая положительная функция $u \in L^1(T \times \mathbb{R}^n) \cap C^\infty(T \times \mathbb{R}^n)$, что $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для положительного решения u уравнения (1), существующего по теореме 2, докажем включение $u \in L^1(T \times \mathbb{R}^n)$.

Применяя лемму 1, получаем дифференциальное неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = w(t) &= \int_{x \in T} \int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t\mathbf{y}), \mathbf{y}) dS_y d\mathbf{x} \leq \\ &\leq q(t) \int_{x \in T} \int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) dS_y d\mathbf{x} = q(t)v(t), \end{aligned}$$

в котором $q(t) = \sup_{x \in T, |y|=1} (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t\mathbf{y}), \mathbf{y})$. Делим неравенство на положительную функцию $v(t)$ и полученный результат $dv/(v(t)dt) = d(\ln v(t))/dt \leq q(t)$ интегрируем:

$$v(r) \leq v(0) \exp\left(\int_0^r q(t) dt\right), \quad \text{где} \quad v(t) = \int_{x \in T} \int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) dS_y d\mathbf{x}.$$

Итак,

$$\int_{x \in T} \int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, r\mathbf{y}) dS_y d\mathbf{x} \leq \left(\int_{x \in T} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \int_{|y|=1} dS_y \right) \exp\left(\int_0^r q(t) dt\right).$$

Умножая последнее неравенство на r^{n-1} , интегрируя результат по r в пределах от 0 до бесконечности и замечая, что

$$\int_{x \in T} \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int_{x \in T} \int_0^{+\infty} r^{n-1} \left(\int_{|y|=1} u(\mathbf{x}, r\mathbf{y}) dS_y \right) dr d\mathbf{x},$$

получаем неравенство с левой частью $\int_{T \times \mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x}$. В его правой части стоит умноженный на $\int_{x \in T} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \int_{|y|=1} dS_y$ интеграл (6), сходящийся по условию теоремы. Теорема доказана.

Отметим, что лемма 1 и теорема 3 хотя и имеют дело с векторным полем $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определенным на $T \times \mathbb{R}^n$, но налагают условие лишь на ортогональную T компоненту $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вдоль $\mathbb{R}^n$.

Следуя замечанию к теореме 3 из статьи [1], можно получить теорему об отсутствии положительного решения класса $L^1(T \times \mathbb{R}^n)$ в случае расходимости интеграла (6). Для этого нужно изменить знаки неравенств, а супремумы заменить на инфимумы.

Примеры векторных полей $\mathbf{f}$, удовлетворяющих условию теоремы 3, строятся на основе результатов работы [1]. Прежде всего рассмотрим пример уравнения (1) с заданным на пространстве $\mathbb{R}^n$ радиальным сферически симметричным векторным полем $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}f(|\mathbf{x}|)/|\mathbf{x}|$. Оно является градиентом функции $V(\mathbf{x}) = \int_0^{|\mathbf{x}|} f(t) dt$, поэтому функция $u(\mathbf{x}) = e^{V(\mathbf{x})} = \exp(\int_0^{|\mathbf{x}|} f(t) dt)$ удовлетворяет уравнению (1), поскольку $\nabla u - u\mathbf{f} = e^V \nabla V - e^V \mathbf{f} = 0$. Ясно, что сходимость интеграла от сферически симметричной функции $u(\mathbf{x})$ равносильна условию $\int_0^{+\infty} r^{n-1} \exp(\int_0^r f(t) dt) dr < \infty$. Этот частный пример получен путем явного разрешения уравнения (1); при этом ни теорема 2, ни теорема 3, ни их доказательства не используются. Тем не менее этот пример, который иллюстрирует теорему 3 (скорее, не настоящей работы, а статьи [1]), позволяет качественно понять связь интеграла (6) с уравнением (1).

В случае $m = n = 1$ и области определения $T \times \mathbb{R}$, когда T является окружностью, полученной из отрезка $[-b, b]$, $b > 0$, склеиванием его концов, в качестве примера можно взять $\mathbf{f}(x, y) = (\varphi(x, y); -y/\sqrt{y^2 + 1} + l \sin y)$, $x \in T$, $y \in \mathbb{R}$. Такое $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию теоремы 3 при любом l и произвольной функции $\varphi(x, y)$, заданной на $T \times \mathbb{R}$. При всех достаточно малых l аттрактор интегральных траекторий данного $\mathbf{f}$ лежит на окружности $x \in T$, $y = 0$. Менее тривиальный пример уравнения (1) с вероятностным решением, но с векторным полем без глобального аттрактора получен далее.

4. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

До сих пор в основном мы рассматривали примеры уравнения (1) с вероятностным решением и фокусирующим векторным полем $\mathbf{f}$. Далее мы применим метод усреднения, позволяющий, в частности, обнаружить вероятностное решение для некоторых векторных полей $\mathbf{f}$ с интегральными траекториями, уходящими на бесконечность. Суть такого метода, строго изложенного для уравнения (1) на $\mathbb{R}^n$ в теореме 6.1 статьи [2], состоит в наложении “фокусирующего” условия на усредненное векторное поле

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \delta^{-n} \int_{Q_\delta(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\mathbf{y}) dy_1 \dots dy_n, \quad \text{где} \quad Q_\delta(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y}: |y_i - x_i| \leq \frac{\delta}{2}, i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Это условие на $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, похожее на условие теоремы 3, хотя и не затрагивает $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ на множествах малой меры, при малых $\delta > 0$ приводит к интегрируемости положительного решения (1). Отметим, что в присутствии диффузии, осуществляющей мелкомасштабное усреднение, с физической точки зрения более естественно налагать фокусирующее условие именно на $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, а не на $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, охватывая тем самым более широкий класс векторных полей $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ и игнорируя локальные свойства $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, не влияющие на сходимость интеграла от положительного решения (1).

В данной работе метод усреднения для уравнения (1) на $T \times \mathbb{R}$ излагается на отдельных примерах. В общем виде он без труда формулируется по аналогии с теоремой 6.1 из статьи [2].

ТЕОРЕМА 4. *Векторное поле*

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(0; -\frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) \right), \quad (7)$$

направленное вдоль $\mathbb{R}$ и изначально заданное в полосе $x \in [-b; b]$, $b > 0$, $y \in \mathbb{R}$, рассмотрим на цилиндрической поверхности $T \times \mathbb{R}$, полученной из этой полосы склеиванием прямых $x = -b$ и $x = b$. Тогда при всех достаточно малых $b > 0$ уравнение $\Delta u - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0$ на поверхности $T \times \mathbb{R}$ имеет положительное решение $u \in L^1(T \times \mathbb{R}) \cap C^\infty(T \times \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае $m = n = 1$, а T является окружностью, полученной из отрезка $[-b, b]$ склеиванием его концов. По теореме 2 уравнение (1) имеет положительное решение u . Докажем включение $u \in L^1(T \times \mathbb{R})$. Для этого применим следующий метод усреднения. Положим

$$U(y) = \int_{x \in T} u(x, y) dx, \quad F(y) = \int_{x \in T} u(x, y) f(x, y) \frac{dx}{U(y)},$$

понимая под f компоненту $\mathbf{f}$ вдоль $\mathbb{R}$ – образующей цилиндра. Тогда верно равенство $U'' - (FU)' = 0$. Интеграл от U исследуем на сходимости в соответствии с доказательством теоремы 3. Рассматривая функцию $v(t) = U(-t) + U(t)$, на основании оценки

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= U'(y)|_{y=-t}^{y=t} = \int_{-t}^t U''(y) dy = \int_{-t}^t (FU)' dy = \\ &= F(y)U(y)|_{y=-t}^{y=t} \leq v(t) \max_{y=\pm t} F(y) \operatorname{sign} y \end{aligned}$$

закключаем, что $U \in L^1(\mathbb{R})$, когда, например,

$$F(y) \operatorname{sign} y < -\frac{1}{2} \quad \text{при всех достаточно больших } |y|. \quad (8)$$

Включение $U \in L^1(\mathbb{R})$ на основании теоремы Фубини влечет требуемое включение $u \in L^1(T \times \mathbb{R})$. Таким образом, $u \in L^1(T \times \mathbb{R})$ следует из (8).

Докажем (8). Для этого заметим, что

$$\frac{\int_{x \in T} f(x, y) dx}{\int_{x \in T} dx} = -\frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}},$$

зафиксируем y и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \left| F(y) - \frac{\int_{x \in T} f(x, y) dx}{\int_{x \in T} dx} \right| &= \left| \frac{\int_{x \in T} u(x, y) f(x, y) dx}{\int_{x \in T} u(x, y) dx} - \frac{\int_{x \in T} f(x, y) dx}{\int_{x \in T} dx} \right| = \\ &= \frac{\left| \int_{x \in T} dx \int_{z \in T} u(z, y) f(z, y) dz - \int_{x \in T} u(x, y) dx \int_{z \in T} f(z, y) dz \right|}{\int_{x \in T} u(x, y) dx \int_{x \in T} dx} = \\ &= \frac{\left| \int_{z \in T} f(z, y) \left(\int_{x \in T} u(z, y) dx - \int_{x \in T} u(x, y) dx \right) dz \right|}{\int_{x \in T} u(x, y) dx \int_{x \in T} dx} \leq \\ &\leq \frac{\int_{z \in T} |f(z, y)| dz \sup_{x, z \in T} |u(z, y) - u(x, y)|}{\int_{x \in T} u(x, y) dx} \leq \\ &\leq \sup_{\substack{z \in T, \\ y \in \mathbb{R}}} |f(z, y)| \frac{\sup_{x \in T} u(x, y) - \inf_{x \in T} u(x, y)}{\inf_{x \in T} u(x, y)}. \end{aligned}$$

Применим следующую оценку модуля непрерывности, полученную в теореме 3.1 из статьи [2] для решения $u(\mathbf{x})$ уравнения (1) на $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{u(\mathbf{x}_1) - u(\mathbf{x}_2)}{u(\mathbf{x}_1)} \leq (1 + \sqrt{\delta})^n e^{M(\delta + 2\sqrt{\delta})} - 1, \quad (9)$$

где $\delta = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq M$.

Чтобы оценить разность $\sup_{x \in T} u(x, y) - \inf_{x \in T} u(x, y)$ с помощью оценки (9), отмечаем, что для каждого y точная нижняя грань $\inf_{x \in T} u(x, y)$ и точная верхняя грань $\sup_{x \in T} u(x, y)$ достигаются в некоторых точках $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ зависящей от y окружности,

периодически продолжаем $u(x, y)$ с $T \times \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$ и считаем, что $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \delta < 2b$. Это возможно, поскольку при разрезании $T \times \mathbb{R}$ вдоль образующей получается полоса шириной $2b$.

Тогда из (9) и предыдущих оценок получаем выражение

$$\left| F(y) + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \right| \leq M((1 + \sqrt{\delta})^2 e^{M(\delta + 2\sqrt{\delta})} - 1),$$

где $\delta = 2b$. Правая часть неравенства при фиксированном M стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому при всех достаточно малых b имеем оценку

$$\left| F(y) + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \right| < \frac{1}{4}.$$

Отсюда следует (8). Теорема доказана.

Отметим, что теорема 3 не применима к векторному полю (7): интеграл

$$\int_0^{+\infty} \exp \left(\int_0^r \sup_{\substack{x \in T, \\ y = \pm 1}} (yf(x, ty)) dt \right) dr$$

расходится. Характерная особенность поля (7) состоит в существовании у него вблизи прямых $x = \pm b/2$ интегральных траекторий, уходящих на бесконечность. Как отмечалось в статье [2], наличие таких траекторий (даже в $\mathbb{R}^n$, не говоря уже о цилиндрической поверхности) препятствует применению метода Ляпунова–Хасьминского, развитого в книге [9]. Речь идет (в случае $\mathbb{R}^n$) о построении функции Ляпунова $\psi(\mathbf{x})$ со свойствами

$$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty, \quad \Delta\psi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty.$$

Наличие такой функции $\psi(\mathbf{x})$ согласно книге [9] влечет интегрируемость положительного решения (1) по $\mathbb{R}^n$. Сложность построения $\psi(\mathbf{x})$ для системы (7) обусловлена нашим интуитивным представлением о сходстве $\psi(\mathbf{x})$ с классической функцией Ляпунова для обыкновенного дифференциального уравнения $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Такая функция, характерная для устойчивой системы $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, очевидно, отсутствует для системы $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ с векторным полем (7), траектории которого уходят на бесконечность. Отметим также, что нам не очевидна возможность доказательно обобщить метод, развитый в книге [9] для $\mathbb{R}^n$, на произвольное некомпактное многообразие. В этой связи мы отмечаем успех метода усреднения, примененного в теореме 4, а ее результат интерпретируем как диффузионную стабилизацию неустойчивой динамической системы $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Наиболее явно он представлен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. В полосе $[0; \pi] \times \mathbb{R}$ введем векторное поле

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(0; -\frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} + 2 \cos x \right), \quad x \in [0; \pi], \quad y \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

направленное вдоль $\mathbb{R}$. Тогда при всех достаточно больших α уравнение

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{div}(u\mathbf{f}) = 0 \quad (11)$$

имеет положительное решение $u \in L^1([0; \pi] \times \mathbb{R}) \cap C^\infty([0; \pi] \times \mathbb{R})$ с нулевой нормальной производной на границе полосы $[0; \pi] \times \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 4. Затем осуществим сдвиг и растяжение по переменной x так, чтобы получилось решение уравнения (11) в полосе $[-\pi; \pi] \times \mathbb{R}$ и на соответствующей цилиндрической поверхности $T \times \mathbb{R}$. Чем меньше b в теореме 4, тем больше α в (11). Поэтому при всех достаточно больших α уравнение (11) имеет интегрируемое положительное решение u на $[-\pi; \pi] \times \mathbb{R}$ и на $T \times \mathbb{R}$.

Решение U с нужным граничным условием на прямой $x = 0$ построим, используя симметрию векторного поля относительно этой прямой. Такой же симметрией обладает решение $U(x, y) = u(x, y) + u(-x, y)$, поэтому его нормальная производная на прямой $x = 0$ равна нулю. Для прямой $x = \pi$ и того же самого U вычисления аналогичны. Теорема доказана.

Следуя идеям и методам работы [2], можно получить верхнюю оценку решения убывающей экспонентой. На основе [2] возможно обобщение теоремы 5 для разрывного аналога векторного поля (10):

$$f(x, y) = \left(0; -\frac{y}{|y|} + 2 \operatorname{sgn}(\cos x) \right), \quad x \in [0; \pi], \quad y \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Это векторное поле (как и (10)) имеет интегральные траектории, направленные вдоль $\mathbb{R}$ и уходящие на бесконечность, но принимает всего четыре значения. Таким образом, мы получаем наиболее простой и явный пример диффузионной стабилизации.

Возможно, обнаруженный эффект стоит интерпретировать как движение в “эффективном”, “фокусирующем” поле $(0; -y/\sqrt{y^2 + 1})$ (или $(0; -y/|y|)$), полученном из (10) (или (12)) усреднением осциллирующего по x слагаемого благодаря большой диффузии в направлении x . Впрочем, делать это нужно с осторожностью: нам неизвестно, сходится ли интеграл от положительного решения уравнения (11) при произвольном (в частности, малом) положительном α .

Список литературы

- [1] А. И. Ноаров, *Теория вероятностей и ее применения*, **54**:3 (2009), 589–598.
- [2] А. И. Ноаров, *Алгебра и анализ*, **24**:5 (2012), 141–164.
- [3] А. И. Ноаров, *Докл. РАН*, **458**:1 (2014), 12–17.
- [4] P. Sura, *J. Atmos. Sci.*, **59**:1 (2002), 97–110.
- [5] L. Yao, Y. Yingfei, “Systematic measures of biological networks. Part 1: Invariant measures and entropy”, [arXiv: 1601.00714](https://arxiv.org/abs/1601.00714).
- [6] А. И. Ноаров, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **37**:5 (1997), 587–598.
- [7] С. Ватанабе, Н. Икеда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Мир, М., 1986.
- [8] E. C. Zeeman, *Nonlinearity*, **1**:1 (1988), 115–155.
- [9] Р. З. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, Наука, М., 1969.

Поступила в редакцию 4.03.2015,
после доработки 1.02.2016