Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Хакимов, Меры Гиббса для плодородных моделей жесткой сердцевины на дереве Кэли, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 340–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8886>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:12:35

© 2016 г.

Р. М. Хакимов*

МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ ПЛОДОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ ЖЕСТКОЙ СЕРДЦЕВИНЫ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучаются плодородные модели жесткой сердцевины с параметром активности $\lambda > 0$ и четырьмя состояниями на дереве Кэли. Известно, что существуют три типа таких моделей. Для каждой из этих моделей доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса при любых значениях параметра λ на дереве Кэли порядка три. Кроме того, для одной из моделей найдены такие критические значения λ , при которых трансляционно-инвариантная мера Гиббса неединственна на дереве Кэли порядка пять. В этом случае проверено достаточное условие (условие Кестена–Стигума) того, что мера не является крайней.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, плодородный граф, модель Hard-Core, мера Гиббса, трансляционно-инвариантные меры.

DOI: 10.4213/tmf8886

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория мер Гиббса составляет один из основных объектов изучения в статистической физике, и эта теория является новой относительно общей теорией меры. Мера Гиббса – это фундаментальный закон, определяющий вероятность микроскопического состояния данной физической системы. Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы, и, если мера Гиббса неединственна, говорят, что существует фазовый переход [1]–[3]. Поэтому изучение мер Гиббса играет важную роль во многих областях науки, в частности в статистической механике, в физике, биологии и в теории обслуживания [4], [5]. Известно, что множество всех предельных мер Гиббса образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер [1]–[3], и каждая точка (т. е. мера Гиббса) этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

Модель Hard-Core (жесткий диск, жесткая сердцевина, НС) на d -мерной решетке $\mathbb{Z}^d$ была введена и изучена в работе [6]. Определение меры Гиббса и понятия,

*Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: rustam-7102@rambler.ru

связанные с этой теорией, вводятся стандартным образом (см., например, монографии [1]–[3]).

В работах [7]–[9] изучены трансляционно-инвариантные, периодические и слабо периодические меры Гиббса НС-модели с двумя состояниями на дереве Кэли. Доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса. Работы [10]–[12] посвящены изучению мер Гиббса для НС-моделей с тремя состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$, и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса неединственна. В работе [13] выделены плодородные НС-модели, соответствующие графам типа *петля* (*hinge*), *свисток* (*pipe*), *жезл* (*wand*) и *ключ* (*wrench*) в случае трех состояний и графам типа *палка* (*stick*), *ключ* (*key*) и *пистолет* (*gun*) в случае четырех состояний. В работе [14] рассмотрены плодородные НС-модели с четырьмя состояниями на дереве Кэли порядка два и для графов *палка*, *ключ* и *пистолет* доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса.

Настоящая работа посвящена изучению трансляционно-инвариантных мер Гиббса для плодородных НС-моделей с четырьмя состояниями, соответствующих графам *палка*, *ключ* и *пистолет* на дереве Кэли.

Структура работы такова. В разделе 2 даются основные определения и известные факты. Раздел 3 состоит из четырех пунктов. В п. 3.1 изучается случай графа *палка* и доказано, что трансляционно-инвариантная мера Гиббса единственна на дереве Кэли порядков три и четыре, а на дереве Кэли порядка пять найдены такие критические значения параметра λ , при которых трансляционно-инвариантная мера неединственна. В п. 3.2 и 3.3 рассмотрены случаи графов *ключ* и *пистолет* и в каждом случае доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса на дереве Кэли порядка три. В п. 3.4 в случае графа *палка* на дереве Кэли порядков два, три, четыре и пять проверяется условие, при котором существующие трансляционно-инвариантные меры не являются крайними.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ

Дерево Кэли $\mathcal{T}^k$ порядка $k \geq 1$ – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребро.

Пусть $\mathcal{T}^k = (V, L, i)$, где V – множество вершин графа $\mathcal{T}^k$, L – множество его ребер и i – функция инцидентности, которая сопоставляет каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями* вершины, и мы обозначаем это как $l = \langle x, y \rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется как минимальное значение d , при котором существует путь $x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y$ такой, что $\langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle$ (т. е. последовательные вершины пути являются ближайшими соседями). Для фиксированного $x^0 \in V$ положим

$$\begin{aligned} W_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, & V_n &= \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \\ L_n &= \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \end{aligned}$$

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k , являющейся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$ [15].

Рассмотрим НС-модель ближайших соседей с четырьмя состояниями на дереве Кэли. В этой модели каждой вершине x ставится в соответствие одно из значений $\sigma(x) \in \Phi = \{0, 1, 2, 3\}$. Значения $\sigma(x) = 1, 2, 3$ означают, что вершина x “занята”, а значение $\sigma(x) = 0$ означает, что вершина x “вакантна”.

Конфигурация $\sigma = \{\sigma(x) \mid x \in V\}$ на дереве Кэли задается как функция из V в Φ . Множество всех конфигураций на V обозначается через Ω . Аналогичным образом можно определить конфигурации в V_n (в W_n), и множество всех конфигураций в V_n (в W_n) обозначается как Ω_{V_n} (как Ω_{W_n}).

Рассмотрим множество Φ как множество вершин некоторого графа G . С помощью графа G определим G -допустимую конфигурацию следующим образом. Конфигурация σ называется G -допустимой конфигурацией на дереве Кэли (в V_n или в W_n), если $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ – ребро графа G для любой пары ближайших соседей x, y из V (из V_n). Обозначим через Ω^G (через $\Omega_{V_n}^G$) множество G -допустимых конфигураций.

Множество активности [13] для графа G есть функция $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ из множества G в множество положительных действительных чисел. Значение λ_i функции λ в вершине $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ называется активностью вершины.

Для данных G и λ определим гамильтониан G -НС-модели как

$$H_G^\lambda(\sigma) = \begin{cases} \sum_{x \in V} \ln \lambda_{\sigma(x)}, & \text{если } \sigma \in \Omega^G, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin \Omega^G. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [13]. Граф называется *плодородным* (fertile), если существует набор активностей λ такой, что соответствующий гамильтониан имеет не менее двух трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Графы, которые не являются плодородными, называются *бесплодными* (sterile).

В настоящей работе мы рассмотрим случай $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и изучим соответствующие этому случаю трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

Рассмотрим три типа плодородных графов с четырьмя вершинами 0, 1, 2, 3 (на множестве значений $\sigma(x)$):

$$\begin{aligned} \text{палка (stick)} &: \{0, 1\} \{1, 2\} \{2, 3\}, \\ \text{ключ (key)} &: \{0, 1\} \{0, 2\} \{1, 2\} \{2, 3\}, \\ \text{пистолет (gun)} &: \{0, 1\} \{0, 2\} \{1, 2\} \{2, 2\} \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Будем писать $x < y$, если путь от x^0 до y проходит через x . Вершина y называется прямым потомком вершины x , если $y > x$ и x, y являются соседями. Через $S(x)$ обозначим множество прямых потомков вершины x . Заметим, что в $\mathcal{T}^k$ всякая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а вершина x^0 имеет $k + 1$ потомков.

Для $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$ обозначим как

$$\# \sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1)$$

число занятых вершин в σ_n .

Пусть $z: x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x}, z_{3,x}) \in \mathbb{R}_+^4$ есть векторнозначная функция на V . Для $n = 1, 2, \dots$ и $\lambda > 0$ рассмотрим вероятностную меру $\mu^{(n)}$ на $\Omega_{V_n}^G$, определяемую

как

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\#\sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x), x}. \quad (1)$$

Здесь Z_n – нормировочный множитель:

$$Z_n = \sum_{\tilde{\sigma}_n \in \Omega_{V_n}^G} \lambda^{\#\tilde{\sigma}_n} \prod_{x \in W_n} z_{\tilde{\sigma}(x), x}.$$

Говорят, что вероятностная мера $\mu^{(n)}$ является согласованной, если для всех $n \geq 1$ и любых $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}^G$

$$\sum_{\omega_n \in \Omega_{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) \mathbf{1}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Omega_{V_n}^G) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \quad (2)$$

В этом случае существует единственная мера μ на $(\Omega^G, \mathbf{B})$ такая, что для всех n и любых $\sigma_n \in \Omega_{V_n}^G$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu^{(n)}(\sigma_n),$$

где $\mathbf{B}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами множества Ω^G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Мера μ , определенная формулой (1) с условием согласованности (2) называется (G) -НС-мерой Гиббса с активностью $\lambda > 0$, соответствующей функции $z: x \in V \setminus \{x^0\} \mapsto z_x$. Множество таких мер (для всевозможных z) обозначается через $\mathcal{S}_G$. При этом НС-мера Гиббса, соответствующая постоянной функции $z_x \equiv z$, называется *трансляционно-инвариантной*.

Пусть $L(G)$ – множество ребер графа G . Обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j=0,1,2,3}$ матрицу смежности графа G , т. е.

$$a_{ij} \equiv a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i, j\} \notin L(G). \end{cases} \quad (3)$$

В следующей теореме [16] сформулировано условие на z_x , гарантирующее согласованность меры $\mu^{(n)}$.

ТЕОРЕМА 1. Вероятностные меры $\mu^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, заданные формулой (1), согласованны тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} z'_{0,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{00}z'_{0,y} + a_{01}z'_{1,y} + a_{02}z'_{2,y} + a_{03}}{a_{30}z'_{0,y} + a_{31}z'_{1,y} + a_{32}z'_{2,y} + a_{33}}, \\ z'_{1,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{10}z'_{0,y} + a_{11}z'_{1,y} + a_{12}z'_{2,y} + a_{13}}{a_{30}z'_{0,y} + a_{31}z'_{1,y} + a_{32}z'_{2,y} + a_{33}}, \\ z'_{2,x} &= \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{20}z'_{0,y} + a_{21}z'_{1,y} + a_{22}z'_{2,y} + a_{23}}{a_{30}z'_{0,y} + a_{31}z'_{1,y} + a_{32}z'_{2,y} + a_{33}}, \end{aligned}$$

где $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{3,x}$, $i = 0, 1, 2$.

3. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА

Предположим, что $z_{3,x} \equiv 1$ и $z_{i,x} = z'_{i,x} > 0$ для $i = 0, 1, 2$. Тогда для любых функций $V \ni x \mapsto z_x = (z_{0,x}, z_{1,x}, z_{2,x})$, удовлетворяющих равенству

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in S(x)} \frac{a_{i0}z_{0,y} + a_{i1}z_{1,y} + a_{i2}z_{2,y} + a_{i3}}{a_{30}z_{0,y} + a_{31}z_{1,y} + a_{32}z_{2,y} + a_{33}}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (4)$$

существует единственная G -НС-мера Гиббса μ , и наоборот.

Рассмотрим трансляционно-инвариантные решения с $z_x = z \in \mathbb{R}_+^3$ и $x \neq x_0$. В случаях $G = \text{палка}$, $G = \text{ключ}$, $G = \text{пистолет}$ из соотношения (4) получим соответственно следующие системы уравнений:

$$z_0 = \lambda \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^k, \quad z_1 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_2}{z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{z_1 + 1}{z_2} \right)^k; \quad (5)$$

$$z_0 = \lambda \left(\frac{z_1 + z_2}{z_2} \right)^k, \quad z_1 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_2}{z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_1 + 1}{z_2} \right)^k; \quad (6)$$

$$z_0 = \lambda \left(\frac{z_1 + z_2}{z_2} \right)^k, \quad z_1 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_2}{z_2} \right)^k, \quad z_2 = \lambda \left(\frac{z_0 + z_1 + z_2 + 1}{z_2} \right)^k. \quad (7)$$

ЛЕММА 1. Из систем уравнений (6) и (7) вытекает, что $z_0 = z_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно получается вычитанием из первого уравнения второго в каждой из систем (6) и (7).

3.1. Случай $G = \text{палка}$. В случае $G = \text{палка}$ из третьего уравнения системы (5) найдем z_2 и подставим в первое уравнение. Полученные выражения для z_2 и z_0 подставим во второе уравнение. В результате получим уравнение

$$z_1 = f(z_1), \quad f(z_1) = \lambda \left(\frac{z_1^k}{(z_1 + 1)^k} + 1 \right)^k, \quad (8)$$

из которого найдем λ :

$$\lambda = \varphi(z_1) = \frac{z_1}{(z_1^k / (z_1 + 1)^k + 1)^k}. \quad (9)$$

Верна следующая

ТЕОРЕМА 2. В случае $G = \text{палка}$ для НС-модели верны следующие утверждения:

1) при $k = 3, k = 4$ и $\lambda > 0$ существует только одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса;

2) пусть $k = 5$, тогда существуют $\lambda_{\text{cr}}^1 \approx 0.8800478543$ и $\lambda_{\text{cr}}^2 \approx 1.078094055$ такие, что при $\lambda < \lambda_{\text{cr}}^1$ и $\lambda > \lambda_{\text{cr}}^2$ существует только одна трансляционно-инвариантная мера Гиббса, при $\lambda = \lambda_{\text{cr}}^1$ или $\lambda = \lambda_{\text{cr}}^2$ существуют две трансляционно-инвариантные меры Гиббса и при $\lambda_{\text{cr}}^1 < \lambda < \lambda_{\text{cr}}^2$ существуют ровно три трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

Рис. 1. График функции $g(z_1)$ (а) и график функции $\varphi(x)$ (б) при $k = 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим выражение (9) и вычислим производную

$$\varphi'(z_1) = \frac{(z_1 + 1)^{k^2-1}[z_1^{k+1} + (1 + z_1)^{k+1} + (1 - k^2)z_1^k]}{[z_1^k + (z_1 + 1)^k]^{k+1}}.$$

Заметим, что $\varphi'(z_1) > 0$ при $k = 3$ и $k = 4$ (для $z_1 > 0$). Действительно, это верно при $k = 3$, так как

$$z_1^4 + (1 + z_1)^4 - 8z_1^3 = 2z_1^2(z_1 - 1)^2 + (2z_1 + 1)^2 > 0.$$

В случае $k = 4$ из $\varphi'(z_1) > 0$ получим

$$g(z_1) = z_1^5 + (1 + z_1)^5 - 15z_1^4 > 0.$$

Последнее неравенство верно для всех $z_1 > 0$, поскольку уравнение $g(z_1) = 0$ не имеет вещественных положительных корней (см. рис. 1а). Итак, функция $\varphi(z_1)$ строго возрастает при $k = 3$, $k = 4$, отсюда с учетом (9) следует, что при этих значениях k каждому значению $\lambda > 0$ соответствует единственное значение z_1 , т. е. уравнение (8) при $k = 3$ и $k = 4$ имеет единственное решение в случае $\lambda > 0$.

2. Рассмотрим выражение (9) при $k = 5$. Для удобства положим $z_1 = x$. Проанализировав функцию $\varphi(x)$, заметим, что $\varphi(x) > 0$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Найдём критические точки функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \frac{(x + 1)^{24}(x^6 + (x + 1)^6 - 24x^5)}{(x^5 + (x + 1)^5)^6} = 0.$$

Из этого уравнения имеем $2x^6 - 18x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 = 0$. Это уравнение по известной теореме Декарта о количестве положительных корней многочлена имеет не более двух положительных решений. Найдём их с помощью программы Maple:

$$x_1 \approx 2.08082606556852, \quad x_2 \approx 7.86924763624169.$$

Рис. 2. Графики функции $h(z_1) = f(z_1) - z_1$ при различных λ : при $\lambda = 0.89$, $\lambda = \lambda_{cr}^{(1)}$, $\lambda = 0.87$ (рисунок “а” сверху вниз) и при $\lambda = 1.15$, $\lambda = \lambda_{cr}^{(2)}$, $\lambda = 1.01$ (рисунок “б” сверху вниз).

Ясно, что график функции $\varphi(x)$ возрастает при $0 < x < x_1 = x_{\max}$, $x > x_2 = x_{\min}$, убывает при $x_{\max} = x_1 < x < x_2 = x_{\min}$ (см. рис. 1б). Таким образом, каждому значению λ соответствует одно значение x , если $\lambda < \lambda_{cr}^{(1)} = \varphi(x_2) = 0.8800478543$ или $\lambda > \lambda_{cr}^{(2)} = \varphi(x_1) = 1.078094055$, два значения, если $\lambda = \lambda_{cr}^{(1)}$ или $\lambda = \lambda_{cr}^{(2)}$, и три значения, если $\lambda_{cr}^{(1)} < \lambda < \lambda_{cr}^{(2)}$ (см. рис. 2).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогично случаю $k = 5$ можно найти $\lambda_{cr}^{(1)}$ и $\lambda_{cr}^{(2)}$ для $k = 6, 7, \dots$ и получить утверждения, подобные п. 2 теоремы 2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если (z_0, z_1, z_2) – решение системы (5), то $a^* \leq z_1 \leq b^*$, где

$$a^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(0), \quad b^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(\infty),$$

$a f^{(n)}$ есть n -я итерация функции f при решении уравнения $f(z_1) = z_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f(z_1)$ возрастает, отсюда и из уравнения (8) мы можем получить $a_n < z_1 < b_n$, где $a_n = f^{(n)}(0)$, $b_n = f^{(n)}(\infty)$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в последнем неравенстве, получим искомое утверждение.

3.2. Случай $G = \text{ключ}$. Вводя обозначения $\sqrt[k]{z_1} = x > 0$, $\sqrt[k]{z_2} = y > 0$, $\sqrt[k]{\lambda} = a$ и используя лемму 1, из системы уравнений (6) получим следующую систему уравнений:

$$x = a \frac{x^k + y^k}{y^k} = a \left(\frac{x}{y} \right)^k + a, \quad y = a \frac{2x^k + 1}{y^k} = 2a \left(\frac{x}{y} \right)^k + \frac{a}{y^k}. \quad (10)$$

Из первого уравнения видно, что $x > a$. Из второго уравнения найдем y и подставим в первое уравнение, получим

$$x = a \left(\frac{x^k}{\sqrt[k+1]{a^k(2x^k + 1)^k}} + 1 \right)$$

или

$$\varphi_1(x) = (x - a)^{k+1}(2x^k + 1)^k - ax^{k^2+2} = 0.$$

Заметим, что $\varphi_1(a) = -a^{k^2+3} < 0$, $\varphi_1(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. уравнение $\varphi_1(x) = 0$ имеет по крайней мере одно решение. Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. При $k \geq 2$ и $\lambda > 0$ в случае G = ключ существует по крайней мере одна трансляционно-инвариантная НС-мера Гиббса.

Далее, для удобства положим $z_1 = x$. Тогда при $k = 3$ из уравнений (6) получаем уравнение

$$x = f(x), \quad f(x) = \lambda \left(\frac{x}{\sqrt[4]{\lambda(2x + 1)^3}} + 1 \right)^3,$$

производная правой части которого равна

$$f'(x) = 3\lambda \left(\frac{x}{\sqrt[4]{\lambda(2x + 1)^3}} + 1 \right)^2 \frac{2x + 4}{\sqrt[4]{\lambda(2x + 1)^7}}.$$

Легко показать, что уравнение $x = f(x)$ имеет более одного решения тогда и только тогда, когда уравнение $xf'(x) = f(x)$ имеет более одного решения. Поэтому рассмотрим уравнение $xf'(x) = f(x)$:

$$x(4x + 11) = \sqrt[4]{\lambda(2x + 1)^7} \iff \lambda = \varphi_2(x) = \frac{x^4(4x + 11)^4}{(2x + 1)^7}.$$

Здесь функция $\varphi_2(x)$ строго возрастает. Поэтому каждому значению λ соответствует только одно значение x . Следовательно, уравнение $x = f(x)$ имеет не более одного решения при $\lambda > 0$. Отсюда в силу теоремы 3 верна следующая

ТЕОРЕМА 4. При $k = 3$ и $\lambda > 0$ в случае G = ключ существует ровно одна трансляционно-инвариантная НС-мера Гиббса.

3.3. Случай G = пистолет. Заметив, что $z_0 = z_1$, из (7) получим следующую систему уравнений:

$$x = a \frac{x^k + y^k}{y^k} = a \left(\frac{x}{y} \right)^k + a, \quad y = a \frac{2x^k + y^k + 1}{y^k} = 2a \left(\frac{x}{y} \right)^k + \frac{a}{y^k} + a, \quad (11)$$

где $\sqrt[k]{z_1} = x > 0$, $\sqrt[k]{z_2} = y > 0$, $\sqrt[k]{\lambda} = a$.

Ясно, что $x > a$. Аналогично предыдущему случаю из первого уравнения системы (11) найдем y и подставим во второе уравнение. В результате получим

$$x = \sqrt[k]{\frac{x - a}{a}} \left(2x - a + \frac{x - a}{x^k} \right)$$

или

$$x = a \left(\frac{x^{k+1}}{2x^{k+1} - ax^k + x - a} \right)^k + a = f(x).$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - x = a \left(\frac{x^{k+1}}{2x^{k+1} - ax^k + x - a} \right)^k + a - x.$$

Ясно, что $g(a) = a > 0$, $g(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. уравнение $x = f(x)$ имеет хотя бы одно решение при $a > 0$. Таким образом, верна следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $k \geq 2$. Тогда при $\lambda > 0$ в случае $G =$ пистолет существует по крайней мере одна трансляционно-инвариантная НС-мера Гиббса.

Теперь рассмотрим производную функции $f(x)$ при $k = 3$:

$$f'(x) = - \left(\frac{x^4}{2x^4 - ax^3 + x - a} \right)^2 \frac{3ax^3(ax^3 - 3x + 4a)}{(2x^4 - ax^3 + x - a)^2}.$$

Из $f'(x) = 0$ получим $\psi(x) = ax^3 - 3x + 4a = 0$ (для $x > 0$). Нетрудный, но громоздкий анализ показывает, что $\psi(x) > 0$ при $x > a$. Действительно, уравнение $\psi(x) = 0$ по теореме Декарта имеет не более двух положительных решений или не имеет положительных решений. По формуле Кардано мы получаем три случая. В первом случае уравнение имеет одно отрицательное решение

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 - \frac{1}{a^3}}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 - \frac{1}{a^3}}} \quad \text{при} \quad a > \frac{1}{\sqrt[3]{4}},$$

во втором случае имеет решения вида

$$x_1 = -2\sqrt[3]{2}, \quad x_2 = x_3 = \sqrt[3]{2} \quad \text{при} \quad a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

и в третьем случае имеет одно отрицательное и два положительных решения:

$$x_1(a) = \frac{1}{a} \cos \frac{\alpha}{3} > 0, \quad x_2(a) = -\frac{1}{a} \cos \frac{\pi - \alpha}{3} < 0, \quad x_3(a) = \frac{2}{a} \cos \frac{\pi + \alpha}{3} > 0$$

при $a < 1/\sqrt[3]{4}$, где $\alpha = \arctg(\sqrt{1/a^3 - 4/2})$. Понятно, что в первых двух случаях $\psi(x) > 0$, т.е. функция $f(x)$ убывает при $a \geq 1/\sqrt[3]{4}$. В последнем случае с помощью компьютерного анализа можно увидеть, что

$$a < x_3(a) < x_1(a), \quad f(x_1) < x_1, \quad f(x_3) < x_3$$

(см. графики на рис. 3).

Кроме того, $f(a) = 2a$, функция $f(x)$ убывает при $a < x < x_3(a)$ и $x > x_1(a)$, возрастает при $x_3(a) < x < x_1(a)$, т.е. $x_3(a)$ является точкой минимума, а $x_1(a)$ — точкой максимума функции $f(x)$. Из всего сказанного следует, что функция $f(x)$ пересекает биссектрису $y = x$ только один раз.

Рис. 3. Графики функций $x_3(a) - a$ (а), $x_1(a) - x_3(a)$ (б), $x_1 - f(x_1)$ (в) и $x_3 - f(x_3)$ (г) при $0 < a < 1/\sqrt[3]{4}$.

Итак, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6. При $k = 3$ и $\lambda > 0$ в случае $G = \text{пистолет}$ существует только одна трансляционно-инвариантная НС-мера Гиббса.

3.4. Проверка условия, при котором мера не является крайней, в случае $G = \text{палка}$. Рассмотрим цепь Маркова с состояниями $\{0, 1, 2, 3\}$ и матрицу $\mathbf{P}_\mu$ переходных вероятностей P_{ij} , определенную данной трансляционно-инвариантной мерой Гиббса μ (см. выражение (12) ниже). Из работы [17] известно, что достаточное условие того, что мера Гиббса μ , соответствующая матрице $\mathbf{P}_\mu$, не является крайней, есть $k\lambda_2^2 > 1$, где λ_2 – второе по абсолютной величине собственное значение матрицы $\mathbf{P}_\mu$ (условие Кестена–Стигума).

Из работы [14] (в случае $k = 2$) и из теоремы 2 известно, что система уравнений (5) имеет единственное решение при $k = 2, 3, 4$, а в случае $k = 5$ имеет три решения при $\lambda_{\text{cr}}^{(1)} < \lambda < \lambda_{\text{cr}}^{(2)}$, единственное решение при $\lambda < \lambda_{\text{cr}}^{(1)}$ или $\lambda > \lambda_{\text{cr}}^{(2)}$ и два решения при $\lambda = \lambda_{\text{cr}}^{(1)}$ или $\lambda = \lambda_{\text{cr}}^{(2)}$. Найдем условия того, что мера не является крайней, для мер, соответствующих этим решениям. Для этого рассмотрим

$$\# \sigma_n = \sum_{x \in V_n} \mathbf{1}(\sigma_n(x) \geq 1), \quad \mu^{(n)} = \frac{1}{Z_n} \lambda^{\# \sigma_n} \prod_{x \in W_n} z_{\sigma(x), x}$$

и матрицу переходных вероятностей с элементами

$$P_{ij} = \frac{\lambda^{\#\{i, j\}} a_{ij} z_j}{\sum_{l=0}^3 \lambda^{\#\{i, l\}} a_{il} z_l}, \quad (12)$$

где коэффициенты a_{ij} определяются формулой (3). Отсюда, используя соотношения $z'_{i,x} = \lambda z_{i,x} / z_{3,x}$, $i = 0, 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} P_{01} &= 1, & P_{10} &= \frac{\lambda z_0}{\lambda z_0 + \lambda^2 z_2} = \frac{z'_0}{z'_0 + \lambda z'_2}, & P_{12} &= \frac{\lambda^2 z_2}{\lambda z_0 + \lambda^2 z_2} = \frac{\lambda z'_2}{z'_0 + \lambda z'_2}, \\ P_{21} &= \frac{\lambda^2 z_1}{\lambda^2 z_1 + \lambda^2 z_3} = \frac{z'_1}{z'_1 + 1}, & P_{23} &= \frac{\lambda^2 z_3}{\lambda^2 z_1 + \lambda^2 z_3} = \frac{1}{z'_1 + 1}, & P_{32} &= 1, \end{aligned}$$

прочие элементы равны нулю. Таким образом (положив далее $z'_i = z_i$), мы имеем

$$\mathbf{P}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ z_0/(z_0 + \lambda z_2) & 0 & \lambda z_2/(z_0 + \lambda z_2) & 0 \\ 0 & z_1/(1 + z_1) & 0 & 1/(1 + z_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одним из собственных значений этой матрицы является $s_4 = 1$. Найдем три оставшихся собственных значения s_1, s_2, s_3 . Для этого решим уравнение $\det(\mathbf{P}_\mu - sE) = 0$. Получаем

$$s_1 = -\sqrt{\frac{z_0}{(1 + z_1)(z_0 + \lambda z_2)}}, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = \sqrt{\frac{z_0}{(1 + z_1)(z_0 + \lambda z_2)}}.$$

Видно, что $|s_1| = |s_3| < 1$, $|s_2| = |s_4| = 1$. Проверим условие $ks_3^2 > 1$, т. е.

$$\frac{kz_0}{(1 + z_1)(z_0 + \lambda z_2)} > 1 \iff \lambda z_2 + \lambda z_1 z_2 + z_1 z_0 + z_0(1 - k) < 0$$

или

$$\lambda < \frac{z_0}{z_2} \frac{k - 1 - z_1}{1 + z_1}.$$

В уравнении (5) разделим первое уравнение на третье:

$$\frac{z_0}{z_2} = \left(\frac{z_1}{z_1 + 1} \right)^k. \quad (13)$$

Рис. 4. Графики функции $\varphi(z_1) - g(z_1)$ при $k = 2$, $0 < z_1 < 1$ (а), при $k = 3$, $0 < z_1 < 2$ (б), при $k = 4$, $0 < z_1 < 3$ (в), при $k = 5$, $0 < z_1 < 4$ (г).

Используя это соотношение и выражение для λ из (9), получим следующее неравенство для проверки условия того, что мера не является крайней:

$$\varphi(z_1) = \frac{z_1}{(z_1^k / (z_1 + 1)^k + 1)^k} < \frac{z_1^k (k - 1 - z_1)}{(1 + z_1)^{k+1}} = g(z_1).$$

Очевидно, что это неравенство не имеет решений при $z_1 \geq k - 1$. Из рис. 4 можно увидеть, что $\varphi(z_1) > g(z_1)$ при любых $z_1 < 1$, $z_1 < 2$, $z_1 < 3$, $z_1 < 4$ в случаях $k = 2, 3, 4, 5$ соответственно.

Следовательно, условие Кестена–Стигума не выполняется ни при каких значениях $z_1 > 0$, т. е. в рассматриваемых случаях все трансляционно-инвариантные меры Гиббса заведомо являются крайними.

Отсюда вытекает

ГИПОТЕЗА. Для $k = 2, 3, 4, 5$ в случае $G = \text{палка}$ все существующие при $\lambda > 0$ трансляционно-инвариантные меры являются крайними.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С помощью компьютерного анализа можно увидеть, что условие того, что мера не является крайней, для трансляционно-инвариантных мер выполнено начиная с $k = 23$, т. е. начиная с этого значения k неравенство $\varphi(z_1) < g(z_1)$ имеет решение.

Благодарности. Автор благодарит профессора У. А. Розикова за постановку задачи и полезные советы.

Список литературы

- [1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.
- [2] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.
- [3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.
- [4] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, М., 1985.
- [5] F. Kelly, *Ann. Appl. Probab.*, **1**:3 (1991), 319–378.
- [6] А. Е. Mazel, Yu. M. Suhov, *J. Statist. Phys.*, **64**:1–2 (1991), 111–134.
- [7] Yu. M. Suhov, U. A. Rozikov, *Queueing Syst.*, **46**:1–2 (2004), 197–212.
- [8] У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, *ТМФ*, **173**:1 (2012), 60–70.
- [9] Р. М. Хакимов, *Матем. заметки*, **94**:5 (2013), 796–800.
- [10] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.
- [11] У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, *ТМФ*, **156**:3 (2008), 412–424.
- [12] Р. М. Хакимов, *ТМФ*, **183**:3 (2015), 441–449, arXiv: 1406.0473.
- [13] G. Brightwell, P. Winkler, *J. Combin. Theory B*, **77**:2 (1999), 221–262.
- [14] R. M. Khakimov, *Журн. СВФ. Сер. Матем. и физ.*, **8**:2 (2015), 165–172.
- [15] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.
- [16] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [17] H. Kesten, B. P. Stigum, *Ann. Math. Statist.*, **37** (1966), 1463–1481.

Поступила в редакцию 16.02.2015