Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, М. Х. Сабуров, О. Н. Хакимов, О
трансляционно-инвариантных p -адических квазигиббсо-
вых мерах для модели Изинга–Ваннименуса на дереве
Кэли, *ТМФ*, 2016, том 187, номер 1, 155–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 08:03:22

© 2016 г. Ф. М. Мухамедов*, М. Х. Сабуров*, О. Н. Хакимов†

О ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ p -АДИЧЕСКИХ КВАЗИГИББСОВЫХ МЕРАХ ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА–ВАННИМЕНУСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Рассмотрена p -адическая модель Изинга–Ваннименуса на дереве Кэли порядка $k = 2$. В этой модели имеются взаимодействия с ближайшими соседями и со следующими за ближайшими соседями. Исследована модель с помощью нового подхода, основанного на теории меры (в p -адическом смысле). Описаны все трансляционно-инвариантные p -адические квазигиббсовы меры, ассоциированные с моделью. Как следствие, получена возможность доказательства существования фазового перехода в этой модели. Здесь под фазовым переходом понимается существование по крайней мере двух нетривиальных p -адических квазигиббсовых мер таких, что одна из них является ограниченной, а вторая – неограниченной. Используемые методы не действуют в вещественном случае.

Ключевые слова: p -адические числа, модель Изинга–Ваннименуса, p -адическая мера Гиббса, динамическая система, фазовый переход, дерево Кэли.

DOI: 10.4213/tmf8888

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Gamma_+^k = (V, L)$ – полубесконечное дерево Кэли порядка $k \geq 1$ с корнем x^0 . Здесь V – множество вершин, L – множество ребер. Пусть $\Phi = \{-1, +1\}$, тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$, т.е. $\sigma \in \Phi^V$.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке МОНЕ (гранты ERGS13-024-0057 и ERGS13-025-0058). Ф. М. Мухамедов благодарит за поддержку ИУМ (грант EDW B13-029-0914).

*Department of Computational and Theoretical Sciences, Faculty of Science, International Islamic University Malaysia, Pahang, Malaysia.

E-mail: far75m@yandex.ru, farrukh_m@iiu.edu.my, msaburov@gmail.com

†Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: hakimovo@mail.ru

В настоящей работе мы рассмотрим гамильтониан

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + J_1 \sum_{\langle x, y \rangle : x, y \in V} \sigma(x)\sigma(y) + J_0 \sum_{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle : x, y \in V} \sigma(x)\sigma(y),$$

где $J_1, J, J_0 \in \mathbb{Q}_p$ – константы взаимодействия. Модель, соответствующая такому гамильтониану, называется *p-адической моделью Изинга–Ваннименуса*. Обозначения приведены в разделе 2.

В работе [1] была исследована проблема фазового перехода для модели с $J_0 = 0$. В работах [2], [3] был рассмотрен случай $J_1 = 0$. В упомянутых работах с помощью анализа некоторых кубических уравнений было установлено существование двух различных *p*-адических квазигиббсовых мер. Модель с $J_0 = J_1 = 0$ редуцируется к хорошо известной модели Изинга, которая является одной из наиболее исследованных моделей в статистической механике [4]. В *p*-адическом контексте эта модель обладает единственной *p*-адической мерой Гиббса (см. [5], [6]). В работах [1], [2] вопрос единственности соответствующей *p*-адической меры Гиббса остался открытым в общем случае, т. е. $J \cdot J_0 \cdot J_1 \neq 0$.

В настоящей работе мы рассматриваем общий случай, т. е. $J \cdot J_0 \cdot J_1 \neq 0$. В этих предположениях мы исследуем множество всех трансляционно-инвариантных *p*-адических квазигиббсовых мер модели. В качестве следствия мы доказываем единственность трансляционно-инвариантной *p*-адической меры Гиббса. Более того, установлено существование фазового перехода. Отметим, что в *p*-адическом контексте имеются несколько видов фазовых переходов, таких как фазовый переход, сильный фазовый переход (см. [7]–[11]). Здесь под фазовым переходом мы понимаем существование по крайней мере двух нетривиальных *p*-адических квазигиббсовых мер таких, что одна является ограниченной, а вторая – неограниченной (заметим, что в *p*-адическом случае, в отличие от вещественного случая, вероятностные меры могут быть даже неограниченными [12]). Важность настоящей работы была уже отмечена в работе [1]. В работе [13] можно найти результаты недавних исследований по этой тематике.

Заметим, что рассматриваемая модель (в вещественном случае) впервые была исследована в работе [14] на том же дереве. Было установлено, что такая модель имеет достаточно богатую структуру для иллюстрации едва ли не любой стороны статистической механики. В работе [15] аналогичные результаты были получены численно для дерева Кэли произвольного порядка. Некоторые строгие результаты были получены в работе [16].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. *p*-Адические числа. Пусть p – фиксированное простое число. Множество $\mathbb{Q}_p$ определяется как пополнение рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемой как

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x = p^r(m/n)$ при $r, m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m, p) = (n, p) = 1$. Абсолютное значение $|\cdot|_p$ является неархимедовым, это означает, что оно удовлетворяет сильному неравенству треугольника $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Напомним полезное свойство нормы,

а именно: если $|x|_p > |y|_p$, то $|x + y|_p = |x|_p$. Заметим, что это важное свойство, которое требуется для неархимедовости нормы.

Любое p -адическое число $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, можно единственным образом представить в виде

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), \quad (2.2)$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и x_j целые, $0 \leq x_j \leq p - 1$, $x_0 > 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$.

Напомним, что целое число $a \in \mathbb{Z}$ называется квадратичным вычетом по модулю p , если уравнение конгруэнции $x^2 \equiv a \pmod{p}$ имеет решение $x \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 1 [17]. Чтобы уравнение

$$x^2 = a, \quad 0 \neq a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + \dots), \quad 0 \leq a_j \leq p - 1, \quad a_0 > 0,$$

имело решение $x \in \mathbb{Q}_p$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\gamma(a)$ является четным;
- 2) a_0 является квадратичным вычетом по модулю p , если $p \neq 2$, и, более того, $a_1 = a_2 = 0$, если $p = 2$.

Для каждого $a \in \mathbb{Q}_p$ и $r > 0$ положим

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < r\}$$

и введем множество всех p -адических целых

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}.$$

Множество $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ называется множеством p -адических единиц.

ЛЕММА 2 (ЛЕММА ГЕНЗЕЛЯ) [18]. Пусть $f(x)$ – многочлен, коэффициенты которого суть p -адические целые. Пусть θ – p -адическое целое такое, что для некоторого $i \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} f(\theta) &\equiv 0 \pmod{p^{2i+1}}, \\ f'(\theta) &\equiv 0 \pmod{p^i}, \quad f'(\theta) \not\equiv 0 \pmod{p^{i+1}}. \end{aligned}$$

Тогда $f(x)$ имеет единственный p -адический целый корень x_0 , для которого $x_0 \equiv \theta \pmod{p^{i+1}}$.

Следующая лемма известна как обобщенная лемма Гензеля.

ЛЕММА 3 [19], [20]. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\Theta = (0, \dots, 0)$ и $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ – полиномиальные функции, коэффициенты которых – p -адические целые числа. Пусть $\mathbb{J}(F(\mathbf{x}))$ – матрица Якоби функции $F(\mathbf{x})$. Если существует вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ с p -адическими целыми компонентами такой, что

$$F(\mathbf{a}) \equiv \Theta \pmod{p} \quad \text{и} \quad \det(\mathbb{J}(F(\mathbf{a}))) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

то $F(\mathbf{x})$ имеет единственный корень $\mathbf{x}_0$ с p -адическими целыми компонентами, для которого $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{a} \pmod{p}$.

Напомним, что p -адическая экспонента определяется как ряд

$$\exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

который сходится для каждого $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$. Известно [17], что

$$|\exp_p(x)|_p = 1, \quad |\exp_p(x) - 1|_p = |x|_p < p^{-1/(p-1)}.$$

Поэтому положим

$$\mathcal{E}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1, |x - 1|_p < p^{-1/(p-1)}\}.$$

Из свойств экспоненты (см. [17], [18]) получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Множество $\mathcal{E}_p$ обладает следующими свойствами:*

- а) $\mathcal{E}_p$ является группой по отношению к умножению;
- б) $|a - b|_p < 1$ для всех $a, b \in \mathcal{E}_p$;
- в) если $a, b \in \mathcal{E}_p$, то

$$|a + b|_p = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } p = 2, \\ 1, & \text{если } p \neq 2; \end{cases}$$

- г) если $a \in \mathcal{E}_p$, то имеется элемент $h \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ такой, что $a = \exp_p(h)$.

Далее мы будем использовать следующие вспомогательные факты.

ЛЕММА 5 [21]. *Если $|a_i|_p \leq 1$, $|b_i|_p \leq 1$, $i = 1, \dots, n$, то*

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right|_p \leq \max_{i \leq i \leq n} \{|a_i - b_i|_p\}.$$

Заметим, что основы p -адического анализа и p -адической математической физики излагаются в работах [17], [18], [22].

2.2. p -Адическая мера. Пусть $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, где $\mathcal{B}$ – алгебра подмножеств X . Говорят, что функция $\mu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ является p -адической мерой, если для любых $A_1, \dots, A_n \subset \mathcal{B}$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), выполнено равенство

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

p -Адическая мера называется *вероятностной мерой*, если $\mu(X) = 1$. Одним из важных условий является ограниченность, а именно: p -адическая вероятностная мера μ называется *ограниченной*, если $\sup\{|\mu(A)|_p : A \in \mathcal{B}\} < \infty$. Мы обращаем внимание на важный специальный случай, когда условие ограниченности само по себе обеспечивает содержательную теорию интегрирования (см., например, [23]). Заметим, что, вообще говоря, не требуется, чтобы p -адическая вероятностная мера была ограниченной [24], [25], [17]. Более подробно с информацией, касающейся p -адических мер, можно ознакомиться в работах [24], [26].

2.3. Дерево Кэли. Пусть $\Gamma_+^k = (V, L)$ – полубесконечное дерево Кэли порядка $k \geq 1$ с корнем x^0 . Здесь V – множество вершин, L – множество ребер. Вершины x и y называются *ближайшими соседями* и обозначаются как $l = \langle x, y \rangle$, если существует ребро, которое их соединяет. Набор пар $\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, y \rangle$ называется *путем* из точки x в точку y . Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли представляет собой длину кратчайшего пути из x в y :

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=1}^n W_m, \quad L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Множество дочерних вершин x определяется как

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n.$$

Заметим, что у любой вершины $x \neq x^0$ имеются k дочерних вершин, а у x^0 – их $k + 1$.

Две вершины $x, y \in V$ называются *следующими за ближайшими соседями*, если $d(x, y) = 2$. Вершины x и y , являющиеся следующими за ближайшими соседями, называются *продолженными следующими за ближайшими соседями*, если $x \in W_{n-2}$ и $y \in W_n$ для некоторого $n \geq 1$, что обозначается как $\rangle x, y \langle$. Вершины x и y , являющиеся следующими за ближайшими соседями, называются *следующими за ближайшими соседями первого уровня*, если $x, y \in W_n$ для некоторого n , и они обозначаются как $\rangle \bar{x}, \bar{y} \langle$.

3. p -АДИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗИНГА–ВАННИМЕНУСА И ЕЕ p -АДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА

В настоящем разделе мы рассмотрим p -адическую модель Изинга–Ваннименуса, в которой спин принимает значения в множестве $\Phi = \{-1, +1\}$ (Φ называется *пространством состояний*) и приписывается вершинам дерева $\Gamma_+^k = (V, \Lambda)$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \rightarrow \sigma(x) \in \Phi$; аналогично определяются конфигурации σ и ω на V_n и W_n соответственно. Множество всех конфигураций на V (соответственно V_n , W_n) совпадает с $\Omega = \Phi^V$ (соответственно $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). Можно видеть, что $\Omega_{V_n} = \Omega_{V_{n-1}} \times \Omega_{W_n}$. Используя это, для заданных конфигураций $\sigma \in \Omega_{V_{n-1}}$ и $\omega \in \Omega_{W_n}$ определим их конкатенацию как

$$(\sigma \vee \omega)(x) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{если } x \in V_{n-1}, \\ \omega(x), & \text{если } x \in W_n. \end{cases}$$

Ясно, что $\sigma \vee \omega \in \Omega_{V_n}$.

Гамильтониан $H_n : \Omega_{V_n} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ p -адической модели Изинга–Ваннименуса имеет вид

$$H_n(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \sigma(x)\sigma(y) + J_1 \sum_{\rangle x, y \langle : x, y \in V_n} \sigma(x)\sigma(y) + J_0 \sum_{\rangle \bar{x}, \bar{y} \langle : x, y \in V_n} \sigma(x)\sigma(y), \quad (3.1)$$

где $J_1, J, J_0 \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ – константы взаимодействия.

Заметим, что из последнего условия совместно с сильным неравенством треугольника следует существование $\exp_p(H_n(\sigma))$ для всех $\sigma \in \Omega_{V_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Это необходимо для нашего построения.

Пусть $\mathbf{h}: \langle x, y \rangle \rightarrow \mathbf{h}_{xy} = (h_{xy,++}, h_{xy,+-}, h_{xy,-+}, h_{xy,--}) \in \mathbb{Q}_p^4$ – векторнозначная функция на L .

Для заданных $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим p -адическую вероятностную меру $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$ на Ω_{V_n} , определенную как

$$\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_n^{(\mathbf{h})}} \exp_p(H_n(\sigma)) \prod_{x \in W_{n-1}, y \in S(x)} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}. \quad (3.2)$$

Здесь $\sigma \in \Omega_{V_n}$, а $Z_n^{(\mathbf{h})}$ – соответствующий нормализующий множитель, который называется *статистической суммой* и задается как

$$Z_n^{(\mathbf{h})} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \exp_p(H_n(\sigma)) \prod_{x \in W_{n-1}, y \in S(x)} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}. \quad (3.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что, вообще говоря, в определении меры (3.2) можно заменить $\exp_p$ на любое p -адическое число ρ . Аналогичный подход был развит в работах [7], [8]. Из соображений простоты ограничимся рассмотренным случаем.

Напомним [7], [8], что один из центральных результатов теории вероятностей – построение распределения в бесконечном объеме по заданным конечномерным распределениям – хорошо известно как *теорема продолжения Колмогорова* [27]. В настоящей работе мы применяем теорему Колмогорова в p -адическом контексте (см. [25], [28]). Именно, p -адическая вероятностная мера μ на Ω , совместная с определенными выше $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$, т. е.

$$\mu(\omega \in \Omega: \omega|_{V_n} = \sigma) = \mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma) \quad \text{при всех } \sigma \in \Omega_{V_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

существует, если меры $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$, $n \geq 1$, удовлетворяют *условию согласования*, т. е.

$$\sum_{\omega \in \Omega_{W_n}} \mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma \vee \omega) = \mu_{\mathbf{h}}^{(n-1)}(\sigma) \quad (3.5)$$

для любого $\sigma \in \Omega_{V_{n-1}}$.

Следует подчеркнуть, что условие согласования применяется во многих моделях в вещественном контексте (см. обзор в [29]).

Аналогично [7], [8], если меры $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$ для некоторой функции $\mathbf{h}$ удовлетворяют условию согласования, имеется единственная p -адическая вероятностная мера, которую мы обозначим как $\mu_{\mathbf{h}}$, поскольку она зависит от $\mathbf{h}$. Говорят, что такая мера $\mu_{\mathbf{h}}$ является *p -адической квазигиббсовой мерой*, соответствующей p -адической модели Изинга–Ваннименуса. Обозначим через $\mathcal{QG}(H)$ множество всех p -адических квазигиббсовых мер, ассоциированных с функциями $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_{xy}, \langle x, y \rangle \in L\}$. p -Адическая квазигиббсова мера, определяемая выражением (3.2), называется *p -адической мерой Гиббса*, если $\mathbf{h}_{xy} \in \mathcal{E}_p^4$ для всех $\langle x, y \rangle \in L$. Если имеются по крайней мере две различные p -адические квазигиббсовы меры $\mu, \nu \in \mathcal{QG}(H)$ такие, что μ ограниченная, а ν неограниченная, то говорят, что имеет место *фазовый переход*. Другими словами, можно найти две различные функции $\mathbf{s}$ и $\mathbf{h}$, определенные на $\mathbb{N}$, такие, что существуют соответствующие меры $\mu_{\mathbf{s}}$ и $\mu_{\mathbf{h}}$, одна из которых является ограниченной, а другая – неограниченной. Более того, если имеется последовательность

множеств $\{A_n\}$ такая, что $A_n \in \Omega_{V_n}$, где $|\mu(A_n)|_p \rightarrow 0$ и $|\nu(A_n)|_p \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то мы будем говорить, что имеет место *сильный фазовый переход*.

Теперь можно задаться вопросом, для функций какого типа $\mathbf{h}$ меры $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$, определяемые выражением (3.2), должны удовлетворять условию согласования (3.5). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность мер $\{\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (см. (3.2)) удовлетворяет условию согласования тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ и $y \in S(x)$ справедливы следующие выражения:*

$$\begin{aligned} u_{xy,1} &= a^2 \frac{b^4 c^2 u_{yz,3} u_{yt,3} + b^2 (u_{yz,3} + u_{yt,3}) + c^2}{c^2 u_{yz,3} u_{yt,3} + b^2 (u_{yz,3} + u_{yt,3}) + b^4 c^2}, \\ u_{xy,2} &= a^2 \frac{(b^4 c^2 u_{yz,2} u_{yt,2} + b^2 (u_{yz,2} + u_{yt,2}) + c^2) u_{yz,3} u_{yt,3}}{(c^2 u_{yz,3} u_{yt,3} + b^2 (u_{yz,3} + u_{yt,3}) + b^4 c^2) u_{yz,1} u_{yt,1}}, \\ u_{xy,3} &= a^2 \frac{(b^4 c^2 u_{yz,3} u_{yt,3} + b^2 (u_{yz,3} + u_{yt,3}) + c^2) u_{yz,1} u_{yt,1}}{(c^2 u_{yz,2} u_{yt,2} + b^2 (u_{yz,2} + u_{yt,2}) + b^4 c^2) u_{yz,3} u_{yt,3}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $z, t \in S(y)$, $a = \exp_p(J)$, $b = \exp_p(J_1)$, $c = \exp_p(J_0)$ и $u_{xy,1} = a^2 h_{xy,++} + h_{xy,-+}$, $u_{xy,2} = a^2 h_{xy,--} - h_{xy,-+}$, $u_{xy,3} = a^2 h_{xy,++} + h_{xy,+-}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Из (3.2) и (3.5) имеем

$$\begin{aligned} L_n \sum_{\omega \in \Omega} \exp_p(H_n(\sigma \vee \omega)) \prod_{\substack{x \in W_{n-1}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \sigma(x)\omega(y)})^{\sigma(x)\omega(y)} &= \\ = \exp_p(H_n(\sigma)) \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}, \end{aligned}$$

где $L_n = Z_{n-1}^{(\mathbf{h})}/Z_n^{(\mathbf{h})}$. Полагаем $x \in W_{n-2}$ и $y \in S(x)$, $S(y) = \{z, t\}$, $\omega_{xy} = \{\omega(z), \omega(t)\}$. Поскольку $\omega = \bigcup_{x \in W_{n-2}, y \in S(x)} \omega_{xy}$, получаем

$$\begin{aligned} L_n \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} \sum_{\omega_{xy}} \exp_p\{H_n(\sigma) + [J\sigma(y) + J_1\sigma(x)][\omega(z) + \omega(t)] + J_0\omega(z)\omega(t)\} \times \\ \times (h_{yz, \sigma(y)\omega(z)})^{\sigma(y)\omega(z)} (h_{yt, \sigma(y)\omega(t)})^{\sigma(y)\omega(t)} = \\ = \exp_p(H_n(\sigma)) \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} L_n \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} \sum_{\omega_{xy}} \exp_p\{[J\sigma(y) + J_1\sigma(x)][\omega(z) + \omega(t)] + J_0\omega(z)\omega(t)\} \times \\ \times (h_{yz, \sigma(y)\omega(z)})^{\sigma(y)\omega(z)} (h_{yt, \sigma(y)\omega(t)})^{\sigma(y)\omega(t)} = \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}. \end{aligned}$$

Зафиксируем $x, y \in V_n$ (здесь $y \in S(x)$) и рассмотрим последнее равенство для всех значений $\sigma(x) = \pm 1$ и $\sigma = \pm 1$. Тогда после деления получим

$$\begin{aligned}
 h_{xy,++}h_{xy,-+} &= \\
 &= \frac{a^4b^4c^2h_{yz,++}h_{yz,+}-h_{yt,++}h_{yt,+}- + a^2b^2(h_{yz,++}h_{yz,+}- + h_{yt,++}h_{yt,+}-) + c^2}{a^4c^2h_{yz,++}h_{yz,+}-h_{yt,++}h_{yt,+}- + a^2b^2(h_{yz,++}h_{yz,+}- + h_{yt,++}h_{yt,+}-) + b^4c^2}, \\
 h_{xy,-}h_{xy,-+} &= \\
 &= \frac{(a^4b^4c^2h_{yz,-}h_{yz,+}-h_{yt,-}h_{yt,+} + a^2b^2(h_{yz,-}h_{yz,+} + h_{yt,-}h_{yt,+}) + c^2)}{(a^4c^2h_{yz,++}h_{yz,+}-h_{yt,++}h_{yt,+} + a^2b^2(h_{yz,++}h_{yz,+} + h_{yt,++}h_{yt,+}) + b^4c^2)} \times \\
 &\quad \times \frac{h_{yz,+}-h_{yt,+}}{h_{yz,-}h_{yt,+}}, \\
 h_{xy,++}h_{xy,-+} &= \\
 &= \frac{(a^4b^4c^2h_{yz,++}h_{yz,+}-h_{yt,++}h_{yt,+} + a^2b^2(h_{yz,++}h_{yz,+} + h_{yt,++}h_{yt,+}) + c^2)}{(a^4c^2h_{yz,-}h_{yz,+}-h_{yt,-}h_{yt,+} + a^2b^2(h_{yz,-}h_{yz,+} + h_{yt,-}h_{yt,+}) + b^4c^2)} \times \\
 &\quad \times \frac{h_{yz,-}h_{yt,+}}{h_{yz,+}-h_{yt,+}}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$u_{xy,1} = a^2h_{xy,++}h_{xy,-+}, \quad u_{xy,2} = a^2h_{xy,-}h_{xy,-+}, \quad u_{xy,3} = a^2h_{xy,++}h_{xy,-}. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) получаем (3.6).

Докажем достаточность. Теперь предположим, что справедлива система (3.6).

Из (3.7) получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\omega_{xy}=\{\omega(z),\omega(t)\}} \exp_p\{[J\sigma(y) + J_1\sigma(x)][\omega(z) + \omega(t)] + J_0\omega(z)\omega(t)\} \times \\
 \times (h_{yz,\sigma(y)\omega(z)})^{\sigma(y)\omega(z)}(h_{yt,\sigma(y)\omega(t)})^{\sigma(y)\omega(t)} = (h_{xy,\sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}D(x, y),
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $x \in V$ и $y \in S(x)$, $S(y) = \{z, t\}$. Из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} \sum_{\omega_{xy}=\{\omega(z),\omega(t)\}} \exp_p\{[J\sigma(y) + J_1\sigma(x)][\omega(z) + \omega(t)] + J_0\omega(z)\omega(t)\} \times \\
 \times (h_{yz,\sigma(y)\omega(z)})^{\sigma(y)\omega(z)}(h_{yt,\sigma(y)\omega(t)})^{\sigma(y)\omega(t)} = \\
 = \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} D(x, y)(h_{xy,\sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Теперь, умножив обе части выражения (3.10) на $\exp_p(H_{n-1}(\sigma))$ и введя обозначение

$$U_n = \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} D(x, y), \tag{3.11}$$

получаем

$$\begin{aligned} \exp_p(H_{n-1}(\sigma)) \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} \sum_{\omega_{xy} = \{\omega(z), \omega(t)\}} \exp_p\{[J\sigma(y) + J_1\sigma(x)][\omega(z) + \omega(t)] + J_0\omega(z)\omega(t)\} \times \\ \times (h_{yz, \sigma(y)\omega(z)})^{\sigma(y)\omega(z)} (h_{yt, \sigma(y)\omega(t)})^{\sigma(y)\omega(t)} = \\ = U_n \exp_p(H_{n-1}(\sigma)) \prod_{\substack{x \in W_{n-2}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}. \end{aligned}$$

Из (3.2) следует, что

$$U_{n-1} Z_{n-1}^{(\mathbf{h})} \mu_{\mathbf{h}}^{(n-1)}(\sigma) = Z_n^{(\mathbf{h})} \sum_{\omega \in \Omega_{W_n}} \mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma \vee \omega). \quad (3.12)$$

Поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ мера $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$ является вероятностной мерой, т. е.

$$\sum_{\sigma \in \Omega_{V_{n-1}}} \mu_{\mathbf{h}}^{(n-1)} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_{n-1}}} \sum_{\omega \in \Omega_{W_n}} \mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma \vee \omega) = 1,$$

из (3.12) находим

$$Z_n^{(\mathbf{h})} = U_{n-1} Z_{n-1}^{(\mathbf{h})}. \quad (3.13)$$

Отсюда с учетом (3.12) следует (3.5). ■

Таким образом, для каждого решения $\mathbf{u}_{xy} = (u_{xy,1}, u_{xy,2}, u_{xy,3})$, $u_{xy,m} \in \mathbb{Q}_p$, $m = 1, 2, 3$, уравнения (3.1) для любого $h_{xy,++} \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ определим $\mathbf{h}$ как

$$\mathbf{h} = (\mathbf{h}_{xy})_{\langle x,y \rangle \in L}, \quad \mathbf{h}_{xy} = \left(h_{xy,++}, \frac{u_{xy,3}}{a^2 h_{xy,++}}, \frac{u_{xy,1}}{a^2 h_{xy,++}}, \frac{u_{xy,2} h_{xy,++}}{u_{xy,1}} \right).$$

Тогда можно видеть, что это определяет p -адическую квазигиббсову меру $\mu_{\mathbf{h}}$, соответствующую функции $\mathbf{h}$. Теперь покажем, что $\mu_{\mathbf{h}}$ не зависит от выбора $h_{xy,++}$. Другими словами, каждое решение уравнения (3.1) определяет только одну p -адическую квазигиббсову меру $\mu_{\mathbf{u}}$.

Пусть $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{xy})_{\langle x,y \rangle \in L}$ – решение уравнения (3.1). Зафиксируем $n \geq 1$. Поскольку $|W_{n-1}| = k^{n-1}$ и $|S(x)| = k$, получаем $|L_n \setminus L_{n-1}| = k^n$. Пусть σ – любая конфигурация на Ω_{V_n} . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{1,n}(\sigma) &= \{\langle x, y \rangle \in L_n \setminus L_{n-1} : \sigma(x) = 1, \sigma(y) = 1, x \in W_{n-1}, y \in S(x)\}, \\ \mathcal{N}_{2,n}(\sigma) &= \{\langle x, y \rangle \in L_n \setminus L_{n-1} : \sigma(x) = 1, \sigma(y) = -1, x \in W_{n-1}, y \in S(x)\}, \\ \mathcal{N}_{3,n}(\sigma) &= \{\langle x, y \rangle \in L_n \setminus L_{n-1} : \sigma(x) = -1, \sigma(y) = 1, x \in W_{n-1}, y \in S(x)\}, \\ \mathcal{N}_{4,n}(\sigma) &= \{\langle x, y \rangle \in L_n \setminus L_{n-1} : \sigma(x) = -1, \sigma(y) = -1, x \in W_{n-1}, y \in S(x)\}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 \prod_{\substack{x \in W_{n-1}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)} &= \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{1,n}(\sigma)} h_{xy, ++} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{2,n}(\sigma)} \frac{a^2 h_{xy, ++}}{u_{xy, 3}} \times \\
 &\times \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{3,n}(\sigma)} \frac{a^2 h_{xy, ++}}{u_{xy, 1}} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{4,n}(\sigma)} \frac{u_{xy, 2} h_{xy, ++}}{u_{xy, 1}} = \\
 &= \prod_{\langle x, y \rangle \in L_n \setminus L_{n-1}} h_{xy, ++} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{2,n}(\sigma)} \frac{a^2}{u_{xy, 3}} \times \\
 &\times \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{3,n}(\sigma)} \frac{a^2}{u_{xy, 1}} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{4,n}(\sigma)} \frac{u_{xy, 2}}{u_{xy, 1}}.
 \end{aligned}$$

Используя последнее равенство, из (3.2) и (3.3) можно получить

$$\begin{aligned}
 \mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma) &= \frac{\exp_p(H_n(\sigma)) \prod_{\substack{x \in W_{n-1}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \sigma(x)\sigma(y)})^{\sigma(x)\sigma(y)}}{\sum_{\omega \in \Omega_{V_n}} \exp_p(H_n(\omega)) \prod_{\substack{x \in W_{n-1}, \\ y \in S(x)}} (h_{xy, \omega(x)\omega(y)})^{\omega(x)\omega(y)}} = \\
 &= \frac{\exp_p(H_n(\sigma)) \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{2,n}(\sigma)} \frac{a^2}{u_{xy, 3}} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{3,n}(\sigma)} \frac{a^2}{u_{xy, 1}} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{4,n}(\sigma)} \frac{u_{xy, 2}}{u_{xy, 1}}}{\sum_{\omega \in \Omega_{V_n}} \exp_p(H_n(\omega)) \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{2,n}(\omega)} \frac{a^2}{u_{xy, 3}} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{3,n}(\omega)} \frac{a^2}{u_{xy, 1}} \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{N}_{4,n}(\omega)} \frac{u_{xy, 2}}{u_{xy, 1}}}. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Как видно, правая часть выражения для $\mu_{\mathbf{h}}$ не зависит от $h_{xy, ++}$. Поэтому каждому решению u уравнения (3.1) соответствует только одна p -адическая мера Гиббса $\mu_{\mathbf{u}}$. Согласно теореме 1 проблема описания p -адических квазигиббсовых мер сводится к описанию решений функциональных уравнений (3.6).

4. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ P-АДИЧЕСКИЕ КВАЗИГИББСОВЫ МЕРЫ

В данном разделе мы будем описывать трансляционно-инвариантные p -адические квазигиббсовы меры, анализируя уравнения (3.6). Ниже мы всегда будем предполагать, что $p \geq 3$ и $a, b, c \in \mathcal{E}_p \setminus \{1\}$.

Напомним, что функция $\mathbf{u} = \{u_{xy}\}_{\langle x, y \rangle \in L}$ называется *трансляционно-инвариантной*, если $u_{xy, st} = u_{zw, st}$ для всех $\langle x, y \rangle, \langle z, w \rangle \in L$ и $s, t \in \{-1, 1\}$. p -Адическая мера $\mu_{\mathbf{u}}$, соответствующая трансляционно-инвариантной функции $\mathbf{u}$, называется *трансляционно-инвариантной p -адической квазигиббсовой мерой*.

Решить уравнения (3.6), вообще говоря, очень сложно. Поэтому для начала ограничимся описанием трансляционно-инвариантных решений уравнений (3.6). Тогда из (3.6) получаем

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a^2 \frac{b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2}{c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + b^4 c^2}, \\
 u_2 &= a^2 \frac{(b^4 c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + c^2) u_3^2}{(c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + b^4 c^2) u_1^2}, \\
 u_3 &= a^2 \frac{(b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2) u_1^2}{(c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + b^4 c^2) u_3^2}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Q}_p^3$ – решение системы (4.1). Тогда верны следующие утверждения:

- 1) имеем $|u_2|_p = |u_3|_p = 1$;
- 2) если $-u_3 \notin \mathcal{E}_p$, то $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{E}_p^3$;
- 3) если $-u_3 \in \mathcal{E}_p$, то $-u_2 \in \mathcal{E}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Q}_p^3$ – решение системы (4.1).

1. Сначала докажем, что $|u_3|_p = 1$. Предположим, что $|u_3|_p \neq 1$. В этом случае, поскольку $|b^2u_3 + 1|_p = |u_3 + b^2|_p$, из первого уравнения в (4.1) можно найти, что $|u_1|_p = 1$. Подставляя это равенство во второе и третье уравнения в (4.1), получаем

$$\begin{aligned} |u_2|_p &= |b^4c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + c^2|_p \cdot |u_3|_p^2, \\ |u_3|_p &= |(c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + b^4c^2)^{-1}|_p \cdot |u_3^{-2}|_p, \end{aligned} \quad \text{если } |u_3|_p < 1, \quad (4.2)$$

и

$$\begin{aligned} |u_2|_p &= |b^4c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + c^2|_p, \\ |u_3|_p &= |(c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + b^4c^2)^{-1}|_p, \end{aligned} \quad \text{если } |u_3|_p > 1. \quad (4.3)$$

Из первого равенства в (4.2) следует, что $|u_2|_p \neq 1$. Тогда, перемножая равенства (4.2), получаем $|u_2u_3|_p = 1$. Отсюда получаем $|u_2|_p = |u_3|_p^{-1} > 1$. Однако, подставляя последнее равенство во второе равенство (4.2), получаем $|u_3|_p = 1$, что является противоречием.

Аналогично, из первого равенства в (4.3) мы немедленно получаем

$$|u_2|_p = |b^4c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + c^2|_p = 1,$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} |c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + b^4c^2|_p &= |b^4c^2u_2^2 + 2b^6u_2 + b^8c^2|_p = \\ &= |(b^4c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + c^2) + 2b^2u_2(b^4 - 1) + c^2(b^8 - 1)|_p = \\ &= |b^4c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + c^2|_p = 1. \end{aligned}$$

Однако, подставляя последнее равенство во второе равенство в (4.3), получаем $|u_3|_p = 1$, что снова является противоречием. Из этих противоречий следует, что $|u_3|_p = 1$.

Теперь покажем, что $|u_2|_p = 1$. Снова предположим противное, т.е. $|u_2|_p \neq 1$. Перемножая второе и третье уравнения в (4.1) и используя $|u_3|_p = 1$, $|u_2|_p \neq 1$, получаем $|u_1|_p = |u_2|_p \neq 1$. Тогда из первого уравнения в (4.1) находим

$$\frac{|b^4c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + c^2|_p}{|c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + b^4c^2|_p} \neq 1.$$

Ясно, что $|b^4c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + c^2|_p = 1$ тогда и только тогда, когда $|c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + b^4c^2|_p = 1$. Поэтому имеем $|b^4c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + c^2|_p < 1$. Используя это неравенство, из третьего уравнения в (4.1) можно получить

$$|u_3|_p < \frac{|u_1^2|_p}{|c^2u_2^2 + 2b^2u_2 + b^4c^2|_p} \leq 1.$$

Это является противоречием. Это противоречие доказывает, что $|u_2|_p = 1$.

2. Пусть $-u_3 \notin \mathcal{E}_p$. Согласно п. 1 настоящего предложения имеем $|u_2|_p = |u_3|_p = 1$. Пользуясь тем, что $b, c \in \mathcal{E}_p$, $|u_3 + 1|_p = 1$ и $|2u_3 + 1|_p \leq 1$, получаем

$$\frac{b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2}{c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + b^4 c^2} = b^4 \frac{1 + [b^2(1 - b^2 c^2)(2u_3 + 1) + c^2 - b^2]/(b^4 c^2 (u_3 + 1)^2)}{1 + [(b^2 - c^2)(2u_3 + 1) + b^2(b^2 c^2 - 1)]/(c^2 (u_3 + 1)^2)} \in \mathcal{E}_p.$$

Используя это, из первого уравнения в (4.1) находим $u_1 \in \mathcal{E}_p$. Поскольку $|u_2|_p = 1$, с учетом второго уравнения в (4.1), получаем $-u_2 \notin \mathcal{E}_p$. Перемножая второе и третье уравнения в (4.1), получаем $u_2 \cdot u_3 \in \mathcal{E}_p$, откуда имеем

$$\begin{aligned} \frac{b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2}{(c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + b^4 c^2) u_3^2} &= \frac{b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2}{c^2 u_2^2 u_3^2 + 2b^2 u_2 u_3^2 + b^4 c^2 u_3^2} = \\ &= \frac{1}{1 + [(u_2 u_3 - 1)(c^2 u_2 u_3 + c^2 + 2b^2 u_3)]/[b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2]} \in \mathcal{E}_p. \end{aligned}$$

Используя это соотношение, из третьего уравнения в (4.1) получаем $u_3 \in \mathcal{E}_p$. Соответственно, $u_2 \in \mathcal{E}_p$.

3. Пусть $-u_3 \in \mathcal{E}_p$. Перемножая второе и третье уравнения в (4.1), получаем

$$u_2 u_3 = a^2 \frac{b^4 c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + c^2}{c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + b^4 c^2} \cdot u_1.$$

Предположим, что $-u_2 \notin \mathcal{E}_p$. Тогда из последнего равенства имеем $|u_1|_p = 1$. Подставляя это равенство в третье уравнение в (4.1), получаем

$$|b^4 c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + c^2|_p = 1,$$

что противоречит тому факту, что $-u_3 \in \mathcal{E}_p$. Таким образом, $-u_2 \in \mathcal{E}_p$. ■

Предположим, что $u_1 = u_2 = u_3 = u$. Тогда из (4.1) можно найти

$$u = a^2 \frac{b^4 c^2 u^2 + 2b^2 u + c^2}{c^2 u^2 + 2b^2 u + b^4 c^2}. \quad (4.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $p \geq 3$. Тогда уравнение (4.4) имеет единственное решение u_0 на $\mathcal{E}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \geq 3$. Рассмотрим функцию

$$f(u) = a^2 \frac{b^4 c^2 u^2 + 2b^2 u + c^2}{c^2 u^2 + 2b^2 u + b^4 c^2}$$

при $a, b, c \in \mathcal{E}_p$. Пусть $u \in \mathcal{E}_p$. Согласно лемме 4 с учетом сильного неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} |f(u) - 1|_p &= \frac{|(a^2 b^4 - 1)c^2 u^2 + 2b^2(a^2 - 1)u + (a^2 - b^4)c^2|_p}{|c^2 u^2 + 2b^2 u + b^4 c^2|_p} \leq \\ &\leq \max\{|a^2 b^4 - 1|_p, |a^2 - 1|_p, |a^2 - b^4|_p\} < p^{-1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(\mathcal{E}_p) \subset \mathcal{E}_p$.

Теперь покажем, что f является сжатием. Возьмем любое $u, v \in \mathcal{E}_p$; тогда находим

$$f(u) - f(v) = a^2 \frac{(b^4 - 1)(2b^2 c^2 uv + 2b^2 c^2 + (b^4 + 1)c^4(u + v))}{(c^2 u^2 + 2b^2 u + b^4 c^2)(c^2 v^2 + 2b^2 v + b^4 c^2)}(u - v).$$

Таким образом, согласно лемме 4 получаем

$$|f(u) - f(v)|_p \leq \frac{1}{p} |u - v|_p.$$

Это означает, что f – сжимающее отображение на $\mathcal{E}_p$. Из компактности $\mathcal{E}_p$ мы заключаем, что функция f имеет единственную неподвижную точку u_0 , принадлежащую $\mathcal{E}_p$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В работах [10], [30] было предложено найти устойчивые решения более общих уравнений, ассоциированных со сжатиями.

Теперь попытаемся найти решения уравнения (4.4) на $\mathbb{Q}_p \setminus \mathcal{E}_p$. Согласно п. 2, 3 предложения 1 если $u \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathcal{E}_p$ является решением уравнения (4.4), то $-u \in \mathcal{E}_p$.

Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$. Тогда согласно лемме 1 для любого $u \in \mathcal{E}_p$ и $-v \in \mathcal{E}_p$ существуют p -адические числа x и y такие, что $x^2 = u$ и $y^2 = v$.

Введя обозначение $u = x^2$, из (4.4) можно найти

$$x^6 + \frac{2b^2 - a^2 b^4 c^2}{c^2} x^4 - \frac{2a^2 b^2 - b^4 c^2}{c^2} x^2 - a^2 = 0. \quad (4.5)$$

ЛЕММА 6. Пусть $p > 3$ и $a, b, c \in \mathcal{E}_p \setminus \{1\}$. Если

$$\max\{|ab^2 - 1|_p, |c - 1|_p\} < |(a - 1)^2|_p,$$

то существуют такие p -адические целые $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_p$, что

$$\begin{aligned} 2\beta - \alpha^2 &= \frac{2b^2 - a^2 b^4 c^2}{c^2}, \\ 2a\alpha - \beta^2 &= \frac{2a^2 b^2 - b^4 c^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b, c \in \mathcal{E}_p$. Тогда согласно лемме 4 имеем $2\beta - \alpha^2 \in \mathcal{E}_p$ и $2a\alpha - \beta^2 \in \mathcal{E}_p$. Легко видеть, что $\alpha \in \mathcal{E}_p$ тогда и только тогда, когда $\beta \in \mathcal{E}_p$.

Из (4.6) следует, что

$$c^4 \alpha^4 + A_1 \alpha^2 + A_2 \alpha + A_3 = 0, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 4b^2 c^2 - 2a^2 b^4 c^4, & A_2 &= -8ac^4, \\ A_3 &= 4b^4 - 4a^2 b^6 c^2 + a^4 b^8 c^4 + 8a^2 b^2 c^2 - 4b^4 c^4. \end{aligned}$$

Рассмотрим многочлен

$$g(x) = c^4 x^4 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Имеем

$$g(1) = c^4 + A_1 + A_2 + A_3 = 4b^4(1 - c^4) + 4b^2c^2(1 - a^2b^4) + \\ + c^4(1 - a^2b^4) + a^2b^4c^4(a^2b^4 - 1) + 8ac^2(ab^2 - 1) + 8ac^2(1 - c^2) \quad (4.8)$$

и

$$g'(1) = 4c^4 + 2A_1 + A_2 = \\ = 4c^4(1 - a^2b^4) + \frac{8c^2}{a}(ab^2 - 1) + \frac{8c^2}{a}(1 - a^2) + 8ac^2(1 - c^2). \quad (4.9)$$

Поскольку

$$\max\{|ab^2 - 1|_p, |c - 1|_p\} < |(a - 1)^2|_p,$$

с учетом сильного неравенства треугольника из (4.8), (4.9) находим

$$|g(1)|_p < |(a - 1)^2|_p, \quad |g'(1)|_p = |a - 1|_p. \quad (4.10)$$

Поскольку $a \in \mathcal{E}_p \setminus \{1\}$, существует положительное целое число i такое, что $|a - 1|_p = p^{-i}$. Из (4.10) заключаем, что

$$\begin{aligned} g(1) &\equiv 0 \pmod{p^{2i+1}}, \\ g'(1) &\equiv 0 \pmod{p^i}, \\ g'(1) &\not\equiv 0 \pmod{p^{i+1}}. \end{aligned}$$

Согласно лемме Гензеля (см. лемму 2) существует единственное p -адическое целое x_* такое, что

$$g(x_*) = 0, \quad x_* \equiv 1 \pmod{p^{i+1}}.$$

Обозначим $\alpha = x_*$. Поскольку $x_* \equiv 1 \pmod{p^{i+1}}$, получаем $\alpha \in \mathcal{E}_p$. Таким образом,

$$\beta = \frac{c^2\alpha^2 + 2b^2 - a^2b^4c^2}{2c^2} \in \mathcal{E}_p. \quad \blacksquare$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$ и $a, b, c \in \mathcal{E}_p \setminus \{1\}$. Если

$$\max\{|ab^2 - 1|_p, |c - 1|_p\} < |(a - 1)^2|_p, \quad (4.11)$$

то уравнение (4.4) имеет два решения u_*, u^* в $\mathbb{Q}_p \setminus \mathcal{E}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$ и

$$\max\{|ab^2 - 1|_p, |c - 1|_p\} < |(a - 1)^2|_p.$$

Тогда согласно лемме 6 существуют $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_p$ такие, что

$$x^6 + \frac{2b^2 - a^2b^4c^2}{c^2}x^4 - \frac{2a^2b^2 - b^4c^2}{c^2}x^2 - a^2 = (x^3 - \alpha x^2 + \beta x - a)(x^3 + \alpha x^2 + \beta x + a).$$

Рассмотрим уравнение

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - a = 0. \quad (4.12)$$

Легко видеть, что уравнение (4.12) имеет единственное решение x_0 из $\mathcal{E}_p$ (см. предложение 2). Разделив (4.12) на $x - x_0$, получаем

$$x^2 + (x_0 - \alpha)x + \frac{\alpha}{x_0} = 0. \quad (4.13)$$

Поскольку $p \equiv 1 \pmod{4}$, согласно лемме 1 существует $\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 - 4\alpha/x_0}$ из $\mathbb{Q}_p$. Поэтому уравнение (4.13) имеет два решения

$$x_{1,2} = \frac{\alpha - x_0 \pm \sqrt{(x_0 - \alpha)^2 - 4\alpha/x_0}}{2}.$$

Положим $u_* = x_1^2$ и $u^* = x_2^2$. Можно видеть, что u_* и u^* являются решениями уравнения (4.4). Более того, $-u_* \in \mathcal{E}_p$ и $-u^* \in \mathcal{E}_p$. ■

Согласно теореме 1 и предложениям 2 и 3 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \geq 3$ и $J, J_0, J_1 \in p\mathbb{Z}_p$, $J \cdot J_0 \cdot J_1 \neq 0$. Тогда для p -адической модели Изинга–Ваннименуса (3.1) на дереве Кэли порядка $k = 2$ справедливы следующие утверждения.

1. Существует трансляционно-инвариантная p -адическая квазигиббсова мера μ_0 . Более того, μ_0 является p -адической мерой Гиббса.

2. Пусть $\max\{|J + 2J_1|_p, |J_0|_p\} < |J^2|_p$. Тогда существуют трансляционно-инвариантные p -адические квазигиббсовы меры μ_1 и μ_2 , которые не являются p -адическими мерами Гиббса, тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

5. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА (4.4)

В работе [8] было предложено предсказывать фазовые переходы, рассматривая поведение функции f . Определим поведение неподвижных точек этой функции.

Пусть f – аналитическая функция, заданная на некоторой области B . Пусть f имеет неподвижную точку $x_0 \in B$. Такая неподвижная точка называется или *притягивающей*, или *нейтральной*, или *отталкивающей*, если $|f'(x_0)|_p < 1$, или $|f'(x_0)|_p = 1$, или $|f'(x_0)|_p > 1$ соответственно.

В данном разделе мы исследуем поведение динамической системы, ассоциированной с функцией

$$f(u) = a^2 \frac{b^4 c^2 u^2 + 2b^2 + c^2}{c^2 u^2 + 2b^2 + b^4 c^2}, \quad (5.1)$$

где $a, b, c \in \mathcal{E}_p$.

Мы будем предполагать, что функция f имеет три неподвижные точки. А именно, согласно предложению 3 предполагается, что $p \equiv 1 \pmod{4}$, $a, b, c \in \mathcal{E}_p \setminus \{1\}$ и справедливо неравенство (4.11). Поэтому имеем $\text{Fix}(f) = \{u_0, u_*, u^*\}$.

Ясно, что $u_0 \in \mathcal{E}_p$ и $-u_*, -u^* \in \mathcal{E}_p$.

Пусть $u_i \in \mathbb{Q}_p$ – неподвижная точка функции f . Тогда, используя равенство

$$b^4 c^2 u_i^2 + 2b^2 u_i + c^2 = \frac{u_i}{a^2} (c^2 u_i^2 + 2b^2 u_i + b^4 c^2), \quad (5.2)$$

получаем

$$f'(u_i) = \frac{-2(c^2 u_i^2 + b^2 u_i - a^2 b^4 c^2 u_i - a^2 b^2)}{c^2 u_i^2 + 2b^2 u_i + b^4 c^2}. \quad (5.3)$$

ЛЕММА 7. Пусть $a, b, c \in \mathcal{E}_p \setminus \{1\}$ и выполнено неравенство

$$\max\{|ab^2 - 1|_p, |c - 1|_p\} < |(a - 1)|_p.$$

Тогда имеют место следующие равенства:

- 1) $|b - 1|_p = |a - 1|_p$;
- 2) $|ab - 1|_p = |a - 1|_p$;
- 3) $|u_* + 1|_p = |u_* + b^2|_p = |a - 1|_p$;
- 4) $|u^* + 1|_p = |u^* + b^2|_p = |a - 1|_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из

$$|(a - 1)b^2 + b^2 - 1|_p = |ab^2 - 1|_p = |(a - 1)^2|_p < |a - 1|_p$$

с учетом сильного неравенства треугольника находим $|b - 1|_p = |a - 1|_p$.

2. Из $|b|_p = 1$ и с учетом случая 1 получаем

$$|ab - 1|_p = |ab^2 - b|_p = |ab^2 - 1 + 1 - b|_p = |b - 1|_p = |a - 1|_p.$$

3. Поскольку $-u_* \in \mathcal{E}_p$, получаем

$$-\frac{b^4 c^2 u_*^2 + 2b^2 u_* + c^2}{c^2 u_*^2 + 2b^2 u_* + b^4 c^2} \in \mathcal{E}_p.$$

Таким образом,

$$1 = \left| \frac{b^4 c^2 u_*^2 + 2b^2 u_* + c^2}{c^2 u_*^2 + 2b^2 u_* + b^4 c^2} - 1 \right|_p = \frac{|(b^4 - 1)(u_*^2 - 1)c^2|_p}{|c^2 u_*^2 + 2b^2 u_* + b^4 c^2|_p}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$|c^2 u_*^2 + 2b^2 u_* + b^4 c^2|_p = |(a - 1)(u_* + 1)|_p. \quad (5.4)$$

Пусть $|u_* + 1|_p \neq |a - 1|_p$. Тогда из сильного неравенства треугольника с учетом (5.4) следует, что

$$|c^2 u_*^2 + 2b^2 u_* + b^4 c^2|_p = \max\{|(u_* + 1)^2|_p, |(a - 1)^2|_p\} = |(a - 1)(u_* + 1)|_p.$$

Это является противоречием. Поэтому получаем $|u_* + 1|_p = |a - 1|_p$. Из этого равенства с учетом (5.4) немедленно следует $|u_* + b^2|_p = |a - 1|_p$.

Случай 4 аналогичен случаю 3. Это завершает доказательство. ■

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$, $a, b, c \in \mathcal{E}_p \setminus \{1\}$ и выполнено неравенство (4.11). Неподвижная точка u_0 является притягивающей, а точки u_* , u^* – отталкивающими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u_0 \in \mathcal{E}_p$, находим

$$|f'(u_0)|_p = |c^2(u_0 - a^2 b^4)u_0 + b^2(u_0 - a^2)|_p < 1,$$

а это означает, что u_0 является притягивающей точкой.

Вычислим $|f'(u_*)|_p$. Ясно, что

$$\begin{aligned} c^2 u_*^2 + b^2 u_* - a^2 b^4 c^2 u_* - a^2 b^2 &= \\ &= c^2 (u_* + b^2)^2 - b^2 (2c^2 u_* + b^2 c^2 - u_* + a^2 b^2 c^2 u_* + a^2) = \\ &= c^2 (u_* + b^2)^2 - b^2 [2(c^2 - 1)u_* + b^2(c^2 - 1)(1 + a^2 u_*) + \\ &\quad + (b^2 - 1)(1 + a^2 u_*) + (1 + a^2)(u_* + 1)]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Поэтому согласно лемме 7 с учетом сильного неравенства треугольника из (5.5) следует, что

$$|c^2 u_*^2 + b^2 u_* - a^2 b^4 c^2 u_* - a^2 b^2|_p = |u_* + 1|_p = |a - 1|_p.$$

Таким образом, из последнего равенства с учетом (5.4) и (5.3) следует, что

$$|f'(u_*)|_p = \frac{1}{|a - 1|_p} > 1.$$

Используя аналогичные рассуждения, можно показать, что $|f'(u^*)|_p > 1$. Соответственно, заключаем, что точки u_* , u^* являются отталкивающими. Это завершает доказательство. ■

Из предложенного предсказания (см. [8]) заключаем, что при условиях теоремы 3 имеет место фазовый переход. В разделе 7 мы подтвердим это предсказание.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что динамическое поведение некоторых дробных p -адических динамических систем было изучено в работах [26], [31]–[34]. Поэтому дальнейшему изучению поведения динамических систем (5.1) будет посвящено отдельное исследование.

6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ p -АДИЧЕСКОЙ МЕРЫ ГИББСА

В предыдущих разделах мы показали, что множество всех p -адических мер Гиббса для p -адической модели Изинга–Ваннименуса на дереве Кэли порядка $k = 2$ не пусто. В данном разделе мы исследуем единственность p -адической меры Гиббса модели.

Согласно теореме 3 можно заключить, что неподвижная точка u_0 является притягивающей, а из предложения 2 следует, что любая точка из $\mathcal{E}_p$ приближается (под действием f) к u_0 . Это указывает на то, что соответствующая p -адическая мера Гиббса является единственной. Ниже мы постараемся частично подтвердить это предсказание.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p \geq 3$ и $J, J_0, J_1 \in p\mathbb{Z}_p$, $J \cdot J_0 \cdot J_1 \neq 0$. Тогда существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса, соответствующая модели (3.1) на дереве Кэли порядка $k = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ – отображение на $\mathbb{Q}_p^3$, где

$$\begin{aligned} f_1(u) &= u_1(c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + b^4 c^2) - a^2(b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2), \\ f_2(u) &= u_1^2 u_2(c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + b^4 c^2) - a^2(b^4 c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + c^2)u_3^2, \\ f_3(u) &= (c^2 u_2^2 + 2b^2 u_2 + b^4 c^2)u_3^3 - a^2 u_1^2(b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2) \end{aligned}$$

при $a, b, c \in \mathcal{E}_p$.

Покажем, что функция F имеет единственную неподвижную точку в $\mathcal{E}_p^3$. Поскольку $a, b, c \in \mathcal{E}_p$, функция F является полиномиальной функцией с p -адическими целыми коэффициентами. Тогда имеем

$$f_i(1, 1, 1) = (1 - a^2)(b^4 c^2 + 2b^2 + c^2) \equiv 0 \pmod{p}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

и

$$\det(\mathbb{J}(F(1, 1, 1))) \equiv 64 \not\equiv 0 \pmod{p},$$

где

$$\mathbb{J}(F(1, 1, 1)) \equiv \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix} \pmod{p}.$$

Таким образом, согласно обобщенной лемме Гензеля (см. лемму 3) существует единственный корень $\mathbf{u}$ полиномиального уравнения $F(u) = \Theta$, который удовлетворяет условию $\mathbf{u} \equiv \Theta \pmod{p}$. Согласно теореме 1 существует единственная трансляционно-инвариантная p -адическая мера Гиббса $\mu_{\mathbf{u}}$. Это завершает доказательство. ■

Из этой теоремы следует единственность трансляционно-инвариантной p -адической меры Гиббса. Однако, вообще говоря, невозможно доказать, что любое решение уравнений (3.6), принадлежащее $\mathcal{E}_p$, совпадает с $\mathbf{u}$. Заметим, что в случае модели Изинга, т.е. при $J_0 = J_1 = 0$, все решения уравнений (3.6), принадлежащие $\mathcal{E}_p$, совпадают с $\mathbf{u}$ (см. [5], [6]). Следующая теорема частично описывает некоторые решения уравнений (3.6).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p \geq 3$ и $J, J_0, J_1 \in p\mathbb{Z}_p$, $J \cdot J_0 \cdot J_1 \neq 0$. Пусть $\mu_{\mathbf{u}}$ – p -адическая мера Гиббса, ассоциированная с функцией $\mathbf{u} = \{u_{xy}\}_{\langle x, y \rangle \in L}$. Тогда $\mu_{\mathbf{u}}$ трансляционно-инвариантно, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $u_{xy,1} = u_{xy,2}$ для всех $\langle x, y \rangle \in L$;
- 2) $u_{xy,2} = u_{xy,3}$ для всех $\langle x, y \rangle \in L$;
- 3) $u_{xy,1} = u_{xy,3}$ для всех $\langle x, y \rangle \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 достаточно показать, что система уравнений (3.6) имеет единственное решение, когда выполнено одно из условий 1–3. Из (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} u_{xy,1} &= a^2 \frac{b^4 c^2 u_{yz,3} u_{yt,3} + b^2 (u_{yz,3} + u_{yt,3}) + c^2}{c^2 u_{yz,3} u_{yt,3} + b^2 (u_{yz,3} + u_{yt,3}) + b^4 c^2}, \\ u_{xy,3} &= a^2 \frac{b^4 c^2 u_{yz,1} u_{yt,1} + b^2 (u_{yz,1} + u_{yt,1}) + c^2}{c^2 u_{yz,1} u_{yt,1} + b^2 (u_{yz,1} + u_{yt,1}) + b^4 c^2}, \end{aligned} \quad \text{если } u_{xy,1} = u_{xy,2} \quad \forall \langle x, y \rangle \in L, \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} u_{xy,1} &= a^2 \frac{b^4 c^2 u_{yz,1} u_{yt,1} + b^2 (u_{yz,1} + u_{yt,1}) + c^2}{c^2 u_{yz,1} u_{yt,1} + b^2 (u_{yz,1} + u_{yt,1}) + b^4 c^2}, \\ u_{xy,2} &= a^2 \frac{b^4 c^2 u_{yz,2} u_{yt,2} + b^2 (u_{yz,2} + u_{yt,2}) + c^2}{c^2 u_{yz,2} u_{yt,2} + b^2 (u_{yz,2} + u_{yt,2}) + b^4 c^2}, \end{aligned} \quad \text{если } u_{xy,1} = u_{xy,3} \quad \forall \langle x, y \rangle \in L, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} u_{xy,1} &= a^2 \frac{b^4 c^2 u_{yz,1} u_{yt,1} + b^2 (u_{yz,1} + u_{yt,1}) + c^2}{c^2 u_{yz,1} u_{yt,1} + b^2 (u_{yz,1} + u_{yt,1}) + b^4 c^2}, \\ u_{xy,1} &= u_{xy,2} = u_{xy,3}, \end{aligned} \quad \text{если } u_{xy,2} = u_{xy,3} \quad \forall \langle x, y \rangle \in L. \quad (6.4)$$

Рассмотрим случай 1, т.е. $u_{xy,1} = u_{xy,2}$ для всех $\langle x, y \rangle \in L$. Предположим, что система (6.2) имеет два решения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. При $i, j \in \{1, 3\}$, $i \neq j$, имеем

$$u_{xy,i} - v_{xy,i} = a^2 K^{-1} c^2 (b^4 - 1) [(b^2 v_{yz,j} + b^4 c^2 + c^2) u_{yz,j} + b^2] (u_{yt,j} - v_{yt,j}) \times \\ \times c^2 (b^4 - 1) [(b^2 v_{yt,j} + b^4 c^2 + c^2) u_{yt,j} + b^2] (u_{yz,j} - v_{yz,j}),$$

где

$$K = (c^2 u_{yz,j} u_{yt,j} + b^2 (u_{yz,j} + u_{yt,j}) + b^4 c^2) (c^2 v_{yz,j} v_{yt,j} + b^2 (v_{yz,j} + v_{yt,j}) + b^4 c^2).$$

Поскольку $a, b, c, u_{xy,i} \in \mathcal{E}_p$, согласно лемме 4 получаем

$$|u_{xy,i} - v_{xy,i}|_p \leq \frac{1}{p} \max_{z \in S(y)} \{|u_{yz,j} - v_{yz,j}|_p\}.$$

Тогда для любого $n \geq 1$ существует путь π_{xy} в Γ_2^+ такой, что

$$|u_{xy,i} - v_{xy,i}|_p \leq \frac{1}{p^n}.$$

Это означает, что $u_{xy,i} = v_{xy,i}$ для любого $\langle x, y \rangle \in L$ и $i = 1, 3$. Таким образом, мы показали, что система (6.2) имеет не более одного решения на $\mathcal{E}_p^2$.

Согласно предложению 2 система (6.2) имеет решение $\mathbf{u}$ такое, что $u_{xy,i} = u_0 \in \mathcal{E}_p$ для всех $\langle x, y \rangle \in L$ и $i = 1, 2, 3$. Согласно теореме 1 существует единственная p -адическая мера Гиббса $\mu_{\mathbf{u}}$. Поскольку $u_{xy,i} = u_0$, мы заключаем, что $\mu_{\mathbf{u}}$ является трансляционно-инвариантной.

Используя те же аргументы для случаев 2 и 3, можно показать, что p -адическая мера Гиббса $\mu_{\mathbf{u}}$ является трансляционно-инвариантной. ■

Из доказательства теорем 4 и 5 и анализа системы (3.6) можно сформулировать следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $p \geq 3$ и $J_0, J_1, J \in p\mathbb{Z}_p$, $J_0 \cdot J_1 \cdot J \neq 0$. Тогда существует единственная p -адическая мера Гиббса, соответствующая модели (3.1) на дереве Кэли порядка $k = 2$.

7. СУЩЕСТВОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

В данном разделе мы покажем, что для рассматриваемой модели имеет место фазовый переход. Это подтверждает наши предсказания, следующие из теоремы 3. Чтобы сформулировать и доказать основной результат, нам потребуется вспомогательный факт.

ЛЕММА 8. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$ – решение системы (4.1). Тогда статистическая сумма имеет вид

$$Z_n^{(u)} = \left(\frac{a^2 (b^4 c^2 u_3 + 2b^2 u_3 + c^2)}{b^2 c u_3^2} \right)^{|V_{n-1}|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$ – решение системы (4.1). Тогда согласно (3.8), (3.9) получаем

$$D(x, y) = \frac{a^2 (b^4 c^2 u_3 + 2b^2 u_3 + c^2)}{b^2 c u_3^2}.$$

Подставляя это соотношение в (3.11) и (3.13), получаем

$$\begin{aligned} Z_n^{(u)} &= \prod_{\langle x, y \rangle \in L_{n-1}} \frac{a^2(b^4c^2u_3 + 2b^2u_3 + c^2)}{b^2cu_3^2} = \\ &= \left(\frac{a^2(b^4c^2u_3 + 2b^2u_3 + c^2)}{b^2cu_3^2} \right)^{|V_{n-1}|}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$ и $J, J_0, J_1 \in p\mathbb{Z}_p$, $J \cdot J_0 \cdot J_1 \neq 0$. Если $|J + 2J_1|_p < |J|_p$ и $|J_0|_p < |J^2|_p$, то в p -адической модели Изинга–Ваннименуса (3.1) существует фазовый переход.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 получаем, что существуют меры μ_0 , μ_1 и μ_2 . Поэтому, чтобы доказать существование фазового перехода, необходимо проверить ограниченность и неограниченность этих мер.

Напомним, что в нашем случае $u_1 = u_2 = u_3 = u_{(r)}$, $r \in \{0, 1, 2\}$. Более того, $u_{(0)} \in \mathcal{E}_p$ и $-u_{(r)} \in \mathcal{E}_p$, $r = 1, 2$. Согласно лемме 8 для всех $n \geq 1$ имеем

$$Z_n^{(u_{(r)})} = \left(\frac{a^2(b^4c^2u_{(r)}^2 + 2b^2u_{(r)} + c^2)}{b^2cu_{(r)}^2} \right)^{|V_{n-1}|}, \quad r \in \{0, 1, 2\}.$$

Используя лемму 4, вычислим p -адическую норму статистической суммы $Z_n^{(u_{(r)})}$:

$$|Z_n^{(u_{(r)})}|_p = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 0, \\ \leq p^{-|V_{n-1}|}, & \text{если } r \in \{1, 2\}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Поскольку $|u_{(r)}|_p = 1$, $r \in \{0, 1, 2\}$, из (3.14) получаем

$$|\mu_{u_{(r)}}^{(n)}(\sigma)|_p = \frac{1}{|Z_n^{(u_{(r)})}|_p} \quad \text{для всех } \sigma \in \Omega_n.$$

Тогда из (7.1) можно получить, что

$$|\mu_{u_{(r)}}^{(n)}(\sigma)|_p = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 0, \\ \geq p^{|V_{n-1}|}, & \text{если } r \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Следовательно, мера μ_0 является ограниченной, а меры μ_r , $r = 1, 2$, – неограниченными. $\blacksquare$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Согласно теореме 6 для p -адической модели Изинга–Ваннименуса существует фазовый переход. Однако нам неизвестно, имеется ли в этой модели сильный фазовый переход.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены все условия теоремы 6. Если система (4.1) имеет решение $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Q}_p$ такое, что $|u_1|_p > 1$, то в p -адической модели Изинга–Ваннименуса существует сильный фазовый переход.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Q}_p$ – решение системы (4.1) такое, что $|u_1|_p > 1$. Согласно предложению 1 имеем $|u_2|_p = |u_3|_p = 1$ и $|u_3 + 1|_p < 1$. Используя сильное неравенство треугольника, из первого уравнения в (4.1) находим

$$|u_1|_p = \frac{|b^4c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + c^2|_p}{|c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + b^4c^2|_p} > |b^4c^2u_3^2 + 2b^2u_3 + c^2|_p.$$

Отсюда с учетом леммы 8 получаем

$$|Z_n^{(u)}|_p = |(b^4 c^2 u_3^2 + 2b^2 u_3 + c^2)^{|V_{n-1}|}|_p < |u_1^{|V_{n-1}|}|_p. \quad (7.2)$$

Пусть $\sigma \in \Omega$ – такая конфигурация, что $\sigma(x) = -1$ для всех $x \in V \setminus \{x^0\}$. Тогда из (7.2) и (3.14) получаем

$$|\mu_u^{(n)}(\sigma)|_p = \frac{|u_1^{-|W_n|}|_p}{|Z_n^{(u)}|_p} < |u_1^{-|V_n|}|_p.$$

При $|u_1|_p > 1$ и $|V_n| = 2^{n+1} - 2$ имеем

$$|\mu_u^{(n)}(\sigma)|_p \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Согласно теореме 6 для любого $r = 1, 2$ получаем

$$|\mu_{u(r)}^{(n)}(\sigma)|_p \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что существует сильный фазовый переход. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из теоремы 7 следует, что в p -адической модели Изинга–Ваннименуса может иметь место сильный фазовый переход. Однако, с другой стороны, нам неизвестно, что система уравнений (4.1) имеет решение $u = (u_1, u_2, u_3)$ такое, что $|u_1|_p > 1$.

Благодарности. О. Н. Хакимов благодарит Faculty of Science of the International Islamic University Malaysia за гостеприимство.

Список литературы

- [1] F. Mukhamedov, M. Dogan, H. Akin, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **2014**:10 (2014), P10031, 21 pp.
- [2] O. N. Khakimov, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **5**:3 (2013), 194–203.
- [3] О. Н. Хакимов, *ТМФ*, **179**:1 (2014), 13–23.
- [4] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London, 1982.
- [5] M. Khamraev, F. M. Mukhamedov, *J. Math. Phys.*, **45**:11 (2004), 4025–4034.
- [6] F. Mukhamedov, M. Dogan, *Rep. Math. Phys.*, **75**:1 (2015), 25–46.
- [7] F. Mukhamedov, *Rep. Math. Phys.*, **70**:3 (2012), 385–406.
- [8] F. Mukhamedov, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **16**:1 (2013), 49–87.
- [9] F. Mukhamedov, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **2014** (2014), P01007, 23 pp.
- [10] F. Mukhamedov, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **6**:4 (2014), 310–317.
- [11] Ф. Мухамедов, Х. Акин, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 513–528.
- [12] A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [13] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17.
- [14] J. Vannimenus, *Z. Phys. B*, **43**:2 (1981), 141–148.
- [15] N. Ganihodjaev, H. Akin, S. Temir, S. Uguz, A. M. Nawi, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **435**:1 (2013), 012031, 8 pp.
- [16] U. A. Rozikov, H. Akin, S. Uguz, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **17**:1–2 (2014), 103–114.
- [17] N. Koblitz, *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis and Zeta-Function*, Graduate Texts in Mathematics, **58**, Springer, New York, 1977.

- [18] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, **1**, World Sci., Singapore, 1994.
- [19] M. Avendaño, T. Krick, A. Pacetti, *Found Comput. Math.*, **6**:1 (2006), 81–120.
- [20] A. Ibrahim Abdelhalim, *Ultrametric Feunomial Theory*, Ph.D. Thesis, Texas A&M University, Texas, 2009, <http://hdl.handle.net/1969.1/ETD-TAMU-2009-12-7593>.
- [21] A. Khrennikov, F. Mukhamedov, J. F. F. Mendes, *Nonlinearity*, **20**:12 (2007), 2923–2937, arXiv: 0705.0244.
- [22] A. M. Robert, *A Course of p-Adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, **198**, Springer, New York, 2000.
- [23] A. Yu. Khrennikov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:2 (2007), 142–159.
- [24] A. Yu. Khrennikov, *Indag. Math. (N. S.)*, **7**:3 (1996), 311–330.
- [25] A. Yu. Khrennikov, S. Ludkovsky, *Markov Process. Relat. Fields*, **9**:1 (2003), 131–162.
- [26] V. Anashin, A. Khrennikov, *Applied Algebraic Dynamics*, de Gruyter Expositions in Mathematics, **49**, Walter de Gruyter, Berlin, 2009.
- [27] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1980.
- [28] Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М., Розиков У. А., *Узб. матем. журн.*, 1998, № 4, 23–29.
- [29] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.
- [30] F. Mukhamedov, H. Akin, *J. Math. Anal. Appl.*, **423**:2 (2015), 1203–1218.
- [31] A. Fan, S. Fan, L. Liao, Y. Wang, *Adv. Math.*, **257** (2014), 92–135.
- [32] M. Khamraev, F. Mukhamedov, *J. Math. Anal. Appl.*, **315**:1 (2006), 76–89.
- [33] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, *Methods Funct. Anal. Topology*, **10**:2 (2004), 21–31.
- [34] U. A. Rozikov, I. A. Sattorov, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **2014**:1 (2014), 54–65.

Поступила в редакцию 6.03.2015