Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, Действие как инвариант преобразований
Беклунда лагранжевых систем, *ТМФ*, 2015, том 184, но-
мер 1, 71–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:20:59

© 2015 г.

В. Г. Марихин*

ДЕЙСТВИЕ КАК ИНВАРИАНТ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ

Построена общая теория преобразований Беклунда лагранжевых систем при условии, что действие сохраняется при применении этих преобразований. Обсуждаются известные преобразования Беклунда для классических солитонных уравнений с точки зрения этого подхода. Получено новое преобразование Беклунда для уравнения Цицейки.

Ключевые слова: интегрируемые системы, канонические преобразования.

DOI: 10.4213/tmf8890

1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразования Беклунда (ПБ), т. е. преобразования, позволяющие получать новые решения данной динамической системы, являются одним из эффективных методов анализа системы на интегрируемость. Рассматривая композицию ПБ, можно построить дифференциально-разностные системы – интегрируемые цепочки, алгебраически эквивалентные рассматриваемым динамическим системам. Если данная динамическая система является гамильтоновой, то ПБ суть канонические преобразования, сохраняющие гамильтониан, а значит, и действие (в силу каноничности преобразования).

Мы будем рассматривать $(1 + 1)$ -мерные лагранжевые системы вида

$$S = \int dt L, \quad L = \int dx l(q_t, q, q_x, q_{xx}, \dots). \quad (1)$$

Следует отдельно рассматривать случаи линейной и нелинейной зависимости от q_t плотности лагранжиана l . В нелинейном случае мы будем рассматривать в основном квадратичные по q_t плотности лагранжиана l . Данный подход был ранее развит в работе [1], а также в работах [2] и [3].

В настоящей работе проведена классификация возможных типов ПБ в линейном случае (когда коэффициенты при q_t в плотности лагранжиана l зависят только от q_x). Все известные системы в линейном случае обладают этим свойством.

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mvlg@itp.ac.ru

Показано, что лагранжиан соответствующей цепочки ПБ выражается через производящую функцию канонического преобразования данного ПБ. Найдено новое ПБ для уравнения Цицейки, которое не зависит от q_t в отличие от ранее известных ПБ.

Мы будем пользоваться обозначением $\hat{A}$ для величины A после применения ПБ.

2. ГАМИЛЬТОНОВА ТЕОРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА

2.1. Канонические преобразования. Рассмотрим случай нелинейной зависимости плотности лагранжиана от q_t . Большая часть примеров, которые мы будем рассматривать, связана с уравнениями из известного списка (см. работу [4]) систем вида

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u})\mathbf{u}_{xx} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x), \quad \det A \neq 0, \quad \mathbf{u} = (u^1, u^2),$$

обладающих высшими законами сохранения. В частности, этот класс содержит нелинейное уравнение Шредингера и уравнение Буссинеска

$$q_{tt} + q_{xxxx} + q_x q_{xx} = 0.$$

Эта теория является достаточно общей и охватывает широкий класс лагранжевых систем вида (1). В частности, лагранжианы с плотностями

$$l = (q_t + q_{xx})^2 + q_x^3, \quad l = \frac{1}{2}(q_t + q_{xx} - q_x^2)^2, \quad l = \frac{(q_t + q_{xx} + r'(q)/2)^2}{4(q_x^2 + r(q))} + \frac{1}{12}r''(q)$$

отвечают соответственно уравнению Буссинеска, нелинейному уравнению Шредингера и анизотропной модели Ландау–Лифшица. Плотность $h[p, q] = h(p, q_{xx}, q_x, q)$ гамильтониана $H = \int dx h$ связана с плотностью лагранжиана l стандартными формулами

$$h = q_t l_{q_t} - l, \quad l = p h_p - h, \quad (p = l_{q_t}).$$

ПБ, переводящее решение гамильтоновой динамической системы

$$q_t = \frac{\delta H[p, q]}{\delta p}, \quad p_t = -\frac{\delta H[p, q]}{\delta q} \quad (2)$$

снова в решение, определяется как каноническое преобразование $(p, q) \rightarrow (\hat{p}, \hat{q})$ с производящей функцией $F[q, \hat{q}]$:

$$p = \frac{\delta F[q, \hat{q}]}{\delta q}, \quad \hat{p} = -\frac{\delta F[q, \hat{q}]}{\delta \hat{q}}. \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $F[q, \hat{q}] = \int dx f(q, q_x, \dots, \hat{q}, \hat{q}_x, \dots)$ называется *производящей функцией канонического ПБ* для динамической системы (2), если существует функция $\sigma[q, \hat{q}]$ такая, что

$$h[\hat{p}, \hat{q}] - h[p, q] = \frac{d}{dx} \sigma[q, \hat{q}], \quad (4)$$

где $p, \hat{p}$ определены формулами (3).

В силу этого определения и формул

$$p_n = \frac{\delta F[q_n, q_{n+1}]}{\delta q_n} = -\frac{\delta F[q_{n-1}, q_n]}{\delta q_n} \implies \frac{\delta F[q_n, q_{n+1}]}{\delta q_n} + \frac{\delta F[q_{n-1}, q_n]}{\delta q_n} = 0$$

производящая функция определяет лагранжиан цепочки ПБ:

$$\mathcal{L} = \sum_n F[q_n, q_{n+1}] = 0 \quad (5)$$

(ср. работу [5], аналогичные цепочки рассматривались в статье [6], см. также [7]).

Покажем, что действие сохраняется при применении ПБ. Действительно,

$$\int dt \int dx (\hat{p}\hat{q}_t - pq_t) = - \int dt \frac{d}{dt} F[q, \hat{q}] = 0.$$

В силу соотношения (4) $\hat{H} - H = 0$, следовательно, $\hat{S} - S = 0$. Подставляя выражения (3) для импульсов в (4), мы получим определяющее уравнение для производящей функции F и гамильтониана H .

Поскольку классификация рассматриваемых систем была проведена в работе [1], здесь мы приведем только наиболее интересные примеры (см. также статью [8]) в случае $f_{q_x, \hat{q}_x} = 0$.

ПРИМЕР 1. Система с плотностью гамильтониана

$$h = -pq_{xx} + pq_x^2 + p^2 \quad (6)$$

имеет следующую плотность канонического ПБ:

$$f = -\frac{1}{2}\hat{q}_x^2 + \alpha q_x e^{\hat{q}-q} + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{2(\hat{q}-q)} + \beta e^{\hat{q}-q}.$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ получаем лагранжиан цепочки Тоды (5), а в общем случае – лагранжиан магнитной цепочки Тоды [8]. Отметим, что система (6) изоморфна нелинейному уравнению Шредингера: при замене $q = -\ln \psi$, $p = \psi^* \psi$ плотность гамильтониана принимает вид

$$h = -\psi_x^* \psi_x + (\psi^* \psi)^2.$$

В данном случае скобки Пуассона канонические: $\{\psi^*(x), \psi(x')\} = \delta(x - x')$.

ПРИМЕР 2. Система Леви с плотностью гамильтониана

$$h = -pq_{xx} + pq_x^2 + p^2 q_x$$

имеет следующую плотность канонического ПБ:

$$f = \hat{q}_x \ln \hat{q}_x - q_x \ln(\alpha e^{\hat{q}-q} + \beta) + \delta e^{\hat{q}-q}.$$

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\delta = 1$ мы получаем лагранжиан цепочки Вольтерра (5), а в общем случае – лагранжиан магнитной цепочки Вольтерра [8].

ПРИМЕР 3. Модель Ландау–Лифшица

$$h = -pq_{xx} - p^2 q_x^2 - p^2 r(q) - \frac{1}{2} p r'(q) - \frac{1}{12} r''(q)$$

имеет следующие плотности канонического ПБ:

$$f = \frac{1}{\sqrt{r(q)}} \arctg \frac{q_x}{\sqrt{r(q)}} - \ln(q_x^2 + r(q)) + \ln(\hat{q} - q)$$

для немагнитной цепочки ПБ модели Ландау–Лифшица и

$$f = \frac{1}{\sqrt{r(q)}} \arctg \frac{q_x}{\sqrt{r(q)}} - \ln(q_x^2 + r(q)) + \frac{\hat{q}_x}{\sqrt{r(\hat{q})}} \arctg \frac{\mathbf{h}_q}{\sqrt{r(\hat{q})}} + \frac{1}{2} \ln \mathbf{h}$$

для магнитной цепочки, где в обоих случаях $r(u)$ есть многочлен не выше четвертой степени, $\mathbf{h}(u, v)$ – симметрический полином не выше второй степени по каждой переменной, причем $r(u)$ является его дискриминантом,

$$r(u) = -\mathbf{h}_v^2 + 2\mathbf{h}\mathbf{h}_{vv}, \quad \mathbf{h}(u, v) = \mathbf{h}(v, u), \quad \mathbf{h}_{uuu} = 0.$$

Гамильтонова форма соответствующих цепочек (см. работу [9])

$$u_{n,x} = \frac{2\mathbf{h}(u_n, v_n)}{u_{n+1} - v_n} + \mathbf{h}_{n,v_n}, \quad v_{n,x} = \frac{2\mathbf{h}(u_n, v_n)}{u_n - v_{n-1}} - \mathbf{h}_{n,u_n}$$

непосредственно связана [10] с известной XYZ -цепочкой Склянина [11].

2.2. Уравнения типа КдФ, sh-Гордон и др. Пусть

$$\mathcal{L} = \int dx (q_t g(q_x) - H(q, q_x, \dots)). \quad (7)$$

Мы рассматриваем случай, когда функция g зависит только от q_x , поскольку зависимость от старших производных привела бы к сильно нелокальным уравнениям Эйлера–Дарбу. Что касается явной зависимости g от q , то в ряде случаев эту зависимость можно устранить точечным преобразованием, например

$$q_t q_x^\alpha g(q) = Q_t Q_x^\alpha, \quad dQ = (g(q))^{1/(\alpha+1)} dq.$$

Сдвиг $g \rightarrow g + s(q)$ не влияет на уравнения движения, поскольку величина $s(q)q_t$ является полной производной. В более сложных случаях допустимые g с явной зависимостью от q неизвестны.

Условие $\hat{L} - L \in \text{Im } D_t + \text{Im } D_x$ разбивается на два:

$$\hat{q}_t g(\hat{q}_x) - q_t g(q_x) \in \text{Im } D_t + \text{Im } D_x, \quad \hat{H} - H \in \text{Im } D_x. \quad (8)$$

Перепишем первое из условий (8) в явном виде

$$\hat{q}_t g(\hat{q}_x) - q_t g(q_x) = \partial_t (q_x v(q, \hat{q}) + u(q, \hat{q})) - \partial_x (q_t v(q, \hat{q})).$$

Приравнявая коэффициенты при q_t и $\hat{q}_t$, получаем систему уравнений

$$g(\hat{q}_x) = q_x v_{\hat{q}} + u_{\hat{q}}, \quad g(q_x) = \hat{q}_x v_{\hat{q}} - u_{\hat{q}}. \quad (9)$$

Положим

$$s(w) = \frac{g(w) + u_{\hat{q}}}{v_{\hat{q}}}, \quad \tilde{s}(w) = \frac{g(w) - u_{\hat{q}}}{v_{\hat{q}}}. \quad (10)$$

Функции $s(w)$, $\tilde{s}(w)$ зависят также от q , $\hat{q}$ и, возможно, от спектрального параметра, но для краткости мы пишем, что $g(w)$ зависит только от w .

ПБ можно записать в виде

$$q \rightarrow \hat{q} \rightarrow q, \quad \hat{q}_x = s(q_x), \quad q_x = \tilde{s}(\hat{q}_x) \quad \implies \quad s(\tilde{s}(w)) = w, \quad \tilde{s}(s(w)) = w.$$

Очевидно, что $\partial_\lambda(s(\tilde{s}(w))) = 0$, $\partial_\lambda(\tilde{s}(s(w))) = 0$, где λ – спектральный параметр (либо q , либо $\hat{q}$). Имеем

$$\partial_\lambda(s(\tilde{s}(w))) = \left(\frac{1}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda g(\tilde{s}(w)) + \left(\frac{u_q}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda + s'(\tilde{s}(w)) \left[\left(\frac{1}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda g(w) - \left(\frac{u_{\hat{q}}}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda \right].$$

Полагая $\xi = \tilde{s}(w)$ и используя (10), получаем $s'(\xi) = g'(\xi)/v_{\hat{q}}$. Подставим $g(w)$, выразив ее из второго уравнения (10), в результате имеем

$$g'(\xi)(\epsilon_1\xi + \epsilon_2) + (\epsilon_1g(\xi) + \epsilon_3) = 0 \implies g(\xi) = \frac{-\epsilon_3\xi + \epsilon_4}{\epsilon_1\xi + \epsilon_2},$$

где

$$\epsilon_1 = \frac{1}{v_{\hat{q}}}, \quad \epsilon_2 = -\frac{u_{\hat{q},\lambda}}{v_{\hat{q}}^2}, \quad \epsilon_3 = \left(\frac{u_q}{v_{\hat{q}}}\right)_\lambda.$$

В случае $\epsilon_1 = 0$ функция $g(\xi)$ линейна по ξ . Применяя преобразования сдвига и растяжения (которые не влияют на уравнения движения), можно выбрать $g(\xi) = \xi$. В случае $\epsilon_1 \neq 0$, используя преобразования сдвига и растяжения, можно получить $g(\xi) = 1/(\xi - \xi_0)$. На данный момент не существует примеров, соответствующих случаю $\xi_0 \neq 0$. Таким образом, остаются два случая: либо $g(\xi) = \xi$, либо $g(\xi) = 1/\xi$.

Случаю $g(\xi) = \xi$ соответствует требование

$$\iint dt dx (\hat{q}_x \hat{q}_t - q_x q_t) = \iint dt dx (\hat{q}_x + q_x)(\hat{q}_t - q_t),$$

следовательно, ПБ имеет вид

$$\hat{q}_x + q_x = \frac{\delta F}{\delta(\hat{q} - q)}, \quad (11)$$

где $F = \int dx f(\hat{q} - q, \hat{q}_x - q_x, \hat{q}_{xx} - q_{xx}, \dots)$. В простейших случаях f зависит только от $\hat{q} - q$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим уравнение КдФ

$$q_t = q_{xxx} - 6q_x^2 \implies D_x(q_t) = \frac{\delta H}{\delta q}, \quad H = \int dx h, \quad h = \frac{1}{2}q_{xx}^2 + 2q_x^3.$$

Учитывая, что $\hat{h} - h$ должна быть полной производной в силу (11), получаем

$$f(\hat{q} - q) = \frac{1}{3}(\hat{q} - q)^3 + \beta(\hat{q} - q).$$

Подставляя данное равенство в (11), получаем окончательно ПБ в виде

$$\hat{q}_x + q_x = (\hat{q} - q)^2 + \beta.$$

Параметр β можно выбирать разным на каждом шаге. Введя обозначение $\mathbf{f} = \hat{q} - q$, получим одевающую цепочку [12].

Данный пример допускает обобщение на $(2 + 1)$ -мерный случай.

ПРИМЕР 5. Лагранжиан и уравнение Кадомцева–Петвиашвили имеют вид

$$L = \int dx [q_x q_t - q_{xx}^2 - 2q_x^3 - 3\alpha^2 q_y^2],$$

$$q_x = u, \quad \partial_x(u_t + u_{xxx} - 6uu_x) = 3\alpha^2 u_{yy}.$$

ПБ можно получить аналогично уравнению КдФ, причем спектральный параметр заменяется на нелокальный член:

$$q_x + \hat{q}_x = \frac{1}{2}(\hat{q} - q)^2 + Z, \quad Z = \gamma \partial_x^{-1} \partial_y (\hat{q} - q), \quad \gamma = i\alpha. \quad (12)$$

Лагранжиан цепочки, соответствующей уравнению (12), имеет вид

$$l = \sum_n \left[q_{n+1,x} q_n + \frac{1}{6} (q_{n+1} - q_n)^3 + \frac{\gamma}{2} (q_{n+1} - q_n) \partial_x^{-1} \partial_y (q_{n+1} - q_n) \right].$$

ПРИМЕР 6. Рассмотрим уравнение sh-Гордон

$$q_{xt} = \operatorname{sh} q, \quad h = -2 \operatorname{ch} q.$$

Выражение

$$\operatorname{ch} \hat{q} - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{\hat{q} + q}{2} \operatorname{sh} \frac{\hat{q} - q}{2}$$

является полной производной, если ПБ уравнения sh-Гордон имеет вид

$$\hat{q}_x + q_x = \beta \operatorname{sh} \frac{\hat{q} - q}{2}.$$

В этом уравнении x и t эквивалентны, отсюда получаем t -ПБ

$$\hat{q}_t - q_t = \frac{4}{\beta} \operatorname{sh} \frac{\hat{q} + q}{2}.$$

Рассмотрим теперь случай $g(\xi) = 1/\xi$. Анализ уравнений (9) приводит к следующей форме ПБ:

$$\hat{q}_x q_x = \frac{1}{v_{\hat{q}}}.$$

Этой форме ПБ соответствует следующий пример.

ПРИМЕР 7. Лагранжиан для уравнения Кричевера–Новикова

$$q_t = q_{xxx} - \frac{3}{2q_x} (q_{xx}^2 - r(q)) + cq_x$$

записывается как

$$L = \int dx \left[\frac{q_t}{q_x} + \frac{r(q) - q_{xx}^2}{q_x^2} \right], \quad r^{(V)}(q) = 0.$$

Вид ПБ в этом случае (см. выше) таков:

$$q_x \hat{q}_x = \mathbf{h}(q, \hat{q}) = (v_{\hat{q}}(q, \hat{q}))^{-1}.$$

Условие сохранения гамильтониана приводит к тому, что $\mathbf{h}(q, \hat{q})$ – полином второй степени по q и $\hat{q}$ такой, что $r(q) = 2\mathbf{h}_{\hat{q}\hat{q}} - \mathbf{h}_{\hat{q}}^2$. ПБ уравнения Кричевера–Новикова было получено в работе [13]. Лагранжиан цепочки ПБ имеет вид

$$L = \sum_n v(q_{n-1}, q_n) q_{n,x}, \quad v(q, \hat{q}) = \frac{2}{\sqrt{r(q)}} \arctg \frac{\mathbf{h}_{\hat{q}}(q, \hat{q})}{\sqrt{r(q)}}.$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА УРАВНЕНИЯ ЦИЦЕЙКИ

Уравнение Цицейки [14] было получено также в статье [15] как интегрируемый случай гиперболических уравнений типа sh-Гордон. Уравнение Цицейки является лагранжевым:

$$\phi_{x,t} = e^{-2\phi} - e^\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \delta S = 0, \quad S = \int dx dt [\phi_x \phi_t - h(\phi)], \quad h(\phi) = 2e^\phi + e^{-2\phi}.$$

ПБ есть каноническое преобразование (11) $b = \delta F[A]/\delta A$, где

$$A = \hat{\phi} - \phi, \quad B = \hat{\phi} + \phi, \quad a = \hat{\phi}_x - \phi_x, \quad b = \hat{\phi}_x + \phi_x.$$

Мы ищем ПБ в наиболее простой форме, возможной в данном случае:

$$F = \int dx f(a, A) \quad \Longleftrightarrow \quad b = f_A - a_x f_{aa} - a f_{aA}. \quad (13)$$

Каноническое преобразование (13) является ПБ в том и только в том случае, когда

$$h(\hat{\phi}) - h(\phi) = 2e^{B/2}g'(A) - e^{-B}g'(A)g(A) = \partial_x W(a, A, B), \quad (14)$$

где

$$g(A) = e^{A/2} + e^{-A/2}.$$

Можно удовлетворить уравнение (14) и найти производящую функцию $F(a, A)$, если выполнены условия

$$\partial_x [e^{B/2}Z(a, A)] = -e^{B/2}g'(A), \quad \partial_x [e^{-B}R(a, A)] = -e^{-B}g'(A)g(A).$$

Первое условие дает

$$f_a = 2 \ln Z, \quad f_A = -2 \frac{g'(A)}{Z},$$

следовательно,

$$g'(A)Z_a - Z_A Z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g(A) + aZ = s(Z).$$

Второе условие определяет неизвестную функцию $s(Z)$:

$$s(Z) = \nu Z^3, \quad R = -\frac{g^2(A)}{\nu Z^2}.$$

Итак, находим $Z(a, A)$ из кубического уравнения $\nu Z^3 = g(A) + aZ$, интегрируем уравнение $f_a = 2 \ln Z$ и находим плотность производящей функции ПБ $f(a, A)$. Другими словами,

$$-\frac{b}{2}Z = Z_x + g'(A), \quad Z_x = aZ_A + a_x Z_a,$$

где $Z(a, A)$ такова, что $\nu Z^3 = aZ + g(A)$.

ПБ уравнения Цицейки в довольно громоздкой форме было получено в работе [16]. По-видимому, это преобразование не приводится к ПБ, полученным выше. Выведенная в настоящей статье форма является новым примером ПБ в виде (11). Кроме того, автору недавно стало известно [17], что получена еще одна форма ПБ для уравнения Цицейки. Автор благодарен А. В. Михайлову и В. В. Соколову за то,

что они показали, что полученное выше ПБ для уравнения Цицейки может быть приведено в точности к преобразованию, полученному ими независимо.

В заключение отметим, что на основе полученных ПБ можно развить теорию преобразований, например, на основе одевающей цепочки [12]

$$v_{i,x} + v_{i+1,x} = (v_i - v_{i+1})^2 - \beta_i, \quad f_j = v_j - v_{j+1}.$$

Такой подход был развит, например, в работах [6], [8], [10]. Было бы интересно применить построенную теорию к случаю функции $g(q_x, q)$ из (7).

Благодарности. Автор признателен участникам семинара “Математическая физика” ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 13-01-00402).

Список литературы

- [1] В. Э. Адлер, В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 163–183.
- [2] V. G. Marikhin, A. B. Shabat, “Hamiltonian theory of Bäcklund transformations”, *Optical Solitons: Theoretical Challenges and Industrial Perspectives* (Les Houches Workshop, September 28 – October 2, 1998), Centre de Physique des Houches, **12**, eds. V. E. Zakharov, S. Wabnitz, Springer, Berlin, 1999, 19–29.
- [3] В. Г. Марихин, *Письма в ЖЭТФ*, **66**:11 (1997), 673–68.
- [4] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42**:4(256) (1987), 3–53.
- [5] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **112**:2 (1997), 179–194.
- [6] A. N. Leznov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov, *Phys. Lett. A*, **174**:5–6 (1993), 397–402.
- [7] R. I. Yamilov, “Classification of Toda type scalar lattices”, *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (NEEDS’92)* (Dubna, Russia, 6–17 July, 1992), eds. V. G. Makhankov, O. Pashaev, I. Puzynin, World Sci., Singapore, 1993, 423–431.
- [8] В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **118**:2 (1999), 217–228.
- [9] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *Алгебра и анализ*, **2**:2 (1990), 183–208.
- [10] В. Э. Адлер, *ТМФ*, **124**:1 (2000), 48–61.
- [11] Е. К. Склянин, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 27–34.
- [12] А. П. Веселов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21.
- [13] V. E. Adler, *Internat. Math. Res. Notes*, 1998, № 1, 1–4.
- [14] M. G. Tzitzéica, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **25**:1 (1907), 180–187.
- [15] А. В. Жибер, А. Б. Шабат, *Докл. АН СССР*, **247**:5 (1979), 1103–1107.
- [16] С. С. Сафин, Р. А. Шарипов, *ТМФ*, **95**:1 (1993), 146–159.
- [17] А. В. Михайлов, В. В. Соколов, устное сообщение, 2015.

Поступила в редакцию 9.03.2015