Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Уильямс, Характеры кластеров и комбинаторика систем Тоды, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 3, 495–511

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8892>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:02:59

© 2015 г.

Х. Уильямс*

ХАРАКТЕРЫ КЛАСТЕРОВ И КОМБИНАТОРИКА СИСТЕМ ТОДЫ

Исследованы некоторые связи между системами Тоды и кластерными алгебрами. Одна из этих связей основана на теории представлений: известно, что разложения Лорана кластерных переменных являются производящими функциями характеристик Эйлера грассманианов колчана, то же самое оказывается верным и для гамильтонианов открытой релятивистской цепочки Тоды. Другая связь геометрическая: замкнутую нерелятивистскую цепочку Тоды можно считать мероморфной системой Хитчина и изучать с точки зрения спектральных сетей. С этой точки зрения комбинаторные формулы для гамильтонианов открытой релятивистской системы представляют собой суммы траекторий дифференциальных уравнений, заданных с помощью замкнутых нерелятивистских спектральных кривых.

Ключевые слова: кластерные алгебры, интегрируемые системы, теория представлений алгебр.

DOI: 10.4213/tmf8892

1. ВВЕДЕНИЕ

Кластерные алгебры – это класс рекуррентным образом заданных алгебр, наделенный каноническим частичным базисом, элементы которого называются кластерными переменными [1]. Это понятие резюмирует и частично аксиоматизирует характерные особенности различных дуальных канонических базисов, которые встречаются в теории алгебр Ли. Два основных направления, связанные с этой темой, – ее тесная связь как с теорией представлений колчанов, так и с геометрией пространства модулей, связанных с поверхностями. С одной стороны, кластерные переменные (а часто и более общие элементы канонического базиса) можно представить как генерирующие функции для данных теории представлений, которые называются характерами кластеров [2], [3]. С другой стороны, в таких примерах, как координатное кольцо многообразия характеров поверхности с выколотой точкой, кластерные переменные и другие канонические функции можно определить непосредственно через геометрию кривых на соответствующих поверхностях [4], [5]. В настоящей работе дан обзор некоторых результатов путем сопоставления понятий,

*Department of Mathematics, University of Texas at Austin, Austin, USA.
E-mail: hwilliams@math.utexas.edu

исходящих из теории представлений и геометрических свойств канонических функций на координатных кольцах некоторого конкретного пространства модулей [6]. Например, в цитированной работе на простом, но фундаментальном примере диких многообразий $SL_n(\mathbb{C})$ -характеров показано, что следы голономий вблизи простой замкнутой кривой совпадают с некоторыми характерами кластеров колчанов с потенциалом (хотя эти функции не являются кластерными переменными). Это дополняет аналогичные известные в литературе результаты исследований многообразий $SL_2(\mathbb{C})$ -характеров произвольной поверхности с выколотыми точками [5], [7], включая случай произвольного n , при этом поверхность является обычным декорированным цилиндром.

Класс рассматриваемых нами примеров выделяется своими связями с различными хорошо известными интегрируемыми системами. Рассматриваемые нами следы голономий можно отождествить с гамильтонианами открытой релятивистской цепочки Тоды, а также они появляются как сохраняющиеся величины для Q -систем типа A_n [8]–[10]. Соответствующее дикое многообразие характеров связано с периодической нерелятивистской системой Тоды посредством неабелева соответствия Ходжа. Кроме того, эта связь указывает на важную физическую концепцию, основанную на терминологии $\mathcal{N} = 2$ теорий поля. Периодическая система Тоды в этом случае появляется как система Зайберга–Виттена для $\mathcal{N} = 2$ теории Янга–Миллса [11], [12], при этом мы используем спектральные сети [13] (открытие которых связано с $\mathcal{N} = 2$ теориями) для определения структуры кластеров на соответствующем многообразии характеров. Мы кратко вернемся к этой точке зрения в конце статьи. Заметим также, что, как предполагается, гамильтонианы других кластерных интегрируемых систем, например тех, которые рассмотрены в работах [14]–[16], или тех, которые связаны с Q -системами других типов [17], также допускают трактовки в терминах теории представлений, аналогичные обсуждаемым здесь.

Статья организована следующим образом. Сначала дан обзор некоторых общих основ аддитивной категорификации кластерных алгебр и кластерных структур на многообразиях характеров. Приведено формальное обсуждение примера, проведенное с нескольких точек зрения. Сначала исследуется двойная клетка Брюа–Кокстера $SL_n^{c,c}/\text{Ad } H$ и приведены выражения для гамильтонианов открытой релятивистской системы Тоды с помощью направленных кольцевых графов [8]. Затем рассмотрена теория представлений соответствующего колчана с потенциалом и сформулирован наш первый главный результат, в котором гамильтонианы отождествляются с характерами кластеров этого колчана. Далее обсуждается дикое многообразие $SL_n(\mathbb{C})$ -характеров $\mathcal{M}_{SL_n}(\mathbb{C}^*)$ кольца $\mathbb{C}^*$, связанное с периодической цепочкой Тоды с помощью дикого неабелева соотношения Ходжа. Затем сформулирован наш второй главный результат, который заключается в том, что разложение по кластерным координатам следов голономий вблизи $\mathbb{C}^*$ совпадает с разложениями гамильтонианов открытой релятивистской цепочки на $SL_n^{c,c}/\text{Ad } H$. В заключение кратко обсуждаются концепции обрамленных модулей колчанов и операторов линий в $\mathcal{N} = 2$ теориях.

2. АДДИТИВНАЯ КАТЕГОРИФИКАЦИЯ

Кластерная алгебра A_Q , связанная с колчаном Q (без ориентированных 2-циклов), является рекуррентным образом построенной подалгеброй полиномиального кольца Лорана $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, где n – число вершин колчана Q . Она определяется бесконечным числом генераторов, которые называются кластерными переменными,

$$Q = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array} \right) \xrightarrow{n \text{ стрелок}} A_Q \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 2}]$$

Кластерные переменные: $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$
 Взаимосвязи: $\{x_{i+1}x_{i-1} = x_i^n + 1\}_{i \in \mathbb{Z}}$

Рис. 1. Кластерная алгебра n -колчана Кронекера обладает кластерными переменными $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, которые можно рекуррентно выразить через x_1, x_2 с помощью данных соотношений. Их можно выразить не рекуррентным образом как кластерные характеры жестких неразложимых представлений колчана Q .

взятыми по модулю бесконечного набора комбинаторным образом введенных связей. Полное определение можно найти в работе [18], а для случая, когда Q имеет всего две вершины, легко непосредственно выписать полную структуру, как это сделано на рис. 1. В общем случае кластерные переменные помечены не просто целыми числами, а вершинами (их классом эквивалентности) на бесконечном n -арном дереве. Они собраны в перекрывающиеся наборы из n элементов, называемые кластерами (например, исходный кластер $\{x_1, \dots, x_n\}$), каждый из которых относится к своему собственному колчану, связанному с Q с помощью итераций комбинаторного процесса, который называется *мутацией*. Кластерные переменные следует воспринимать как “частичный канонический базис” алгебры A_Q ; например, координатное кольцо $\mathbb{C}[N_+]$ группы верхних унитреугольных матриц является кластерной алгеброй, кластерные переменные которой образуют подмножество двойственного полуканонического базиса Люстига [19].

Хотя построение алгебры A_Q чисто комбинаторное, ей можно дать другое толкование с помощью теории представлений колчана Q как нечто вроде алгебры Холла [2]. Важными при этом являются представления, удовлетворяющие соотношениям, заключенным в потенциале W , формальной сумме ориентированных циклов [20]. При заданных стрелке a колчана Q и цикле c циклическая производная имеет вид

$$\partial_a(c) = \sum_{c=paq} qp$$

для любого цикла c , где сумма берется по всем разложениям c , при этом контуры p, q могут быть нулевой длины. Распишем это линейным образом, чтобы определить циклические производные потенциала W , и введем алгебру якобианов $J(Q, W)$ как отношение полной алгебры контуров колчана Q к замыканию идеала, образованного всеми циклическими производными потенциала W .

Ключевым при этом является понятие характера кластера (или функции Калдеро–Чапотона) представления колчана с потенциалом, производящей функции характеристик Эйлера грассманианов колчана [2], [21]–[23].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Характер кластера $CC(M)$ для $J(Q, W)$ -модуля M является полиномом Лорана

$$CC(M) = x^{-\text{coind } M} \sum_{e \in \mathbb{Z}^n} \chi(\text{Gr}_e M) y^e \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$

Здесь грассманиан колчана $\mathrm{Gr}_e M$ является проективным многообразием e -мерного подпредставления модуля M , а $\chi(\mathrm{Gr}_e M)$ означает его топологическую характеристику Эйлера. Мономы $y_1, \dots, y_n$ определены как $y_j = \prod_{i=1}^n x_i^{Q_{ji}}$, где Q_{ij} – число стрелок, исходящих из i в j , за вычетом числа стрелок из j в i , а y^e – одноклен с экспонентой e . Заметим, что в терминах работ [15], [16], [24] y_j является $\mathcal{X}$ -координатой X_j . Главный член $x^{-\mathrm{coind} M}$ можно ввести, положив

$$x^{-\mathrm{coind} M} = \prod_{j=1}^n x_j^{a_j - b_j},$$

если минимальное инъективное копредставление для M имеет вид

$$0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n I_j^{\oplus b_j} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n I_j^{\oplus a_j}.$$

Понятие характера кластера было введено в работе [2] для колчанов Дынкина и применяется с большей степенью общности в работах [21]–[23]. Оно мотивируется следующим свойством.

ТЕОРЕМА 1. *Для данного невырожденного потенциала W характер кластера определяется взаимно однозначным отображением между достижимыми жесткими неразложимыми $J(Q, W)$ -модулями и не являющимися исходными кластерными переменными алгебры $A(Q)$.*

Часто говорят, что категория $J(Q, W)$ -модулей (и более сложных связанных с ними объектов, которые мы не обсуждаем [22]) обуславливает аддитивную категорификацию кластерной алгебры, поскольку существует тождество $CC(M \oplus N) = CC(M)CC(N)$. В общем случае кластерные мономы не являются линейной оболочкой алгебры $A(Q)$, поэтому основным является выявление различных “хороших” базисов, их содержащих. Одним из подходов к построению таких базисов является выбор класса модулей, большего, чем класс жестких модулей, характеры кластеров которых расширяют набор кластерных мономов до базиса. В частности, такой вид по сути имеет двойственный полуканонический базис координатного кольца унипотентной клетки группы Каца–Мури [19]. Одним из наших основных результатов является то, что некоторые геометрически определенные “канонические” функции на пространствах модулей имеют ту же форму.

3. МНОГООБРАЗИЕ ХАРАКТЕРОВ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕТИ

Богатый класс примеров кластерных алгебр порождается многообразием характеров декорированных поверхностей с выколотыми точками. К наиболее хорошо изученным примерам относятся многообразия SL_2 -характеров, где кластерные координаты воспроизводят классические структуры теории Тейхмюллера, лямбда-длины Пеннера и сдвиговые координаты Терстона [25]. Эти классические структуры были обобщены на многообразие SL_n -характеров в работе Фока и Гончарова [4].

В работе [13] было найдено альтернативное описание этих кластерных структур с помощью диаграммных объектов, названных спектральными сетями. Спектральная сеть $\mathcal{W}$ связана с n -листным разветвленным покрытием Σ поверхности C и определяет открытое вложение

$$\Psi_{\mathcal{W}}: \mathcal{M}_{GL_1}(\Sigma) \hookrightarrow \mathcal{M}_{GL_n}(C),$$

Рис. 2. Локальные модели спектральной сети в точке ветвления с 2-циклической (а) и 5-циклической (б) монодромией. Стены правосторонней сети появляются в паре с различными метками, но их локализации совпадают.

названное неабелианизирующим отображением. Здесь $\mathcal{M}_{GL_n}(C)$ и $\mathcal{M}_{GL_1}(\Sigma)$ являются (возможно, дикими) многообразиями $GL_n(\mathbb{C})$ - и $GL_1(\mathbb{C})$ -характеров на поверхности C и покрытии Σ соответственно¹⁾. В разделе 2 мы видели, что кластерная структура на алгебре состоит из бесконечного семейства вложений в полиномиальные кольца Лорана, но здесь удобнее переформулировать ее как бесконечное семейство открытых тороидальных подмножеств основного многообразия с введенными координатами. При заданных комплексной структуре на C , спектральной кривой общего положения Σ , соответствующей (мероморфной) системе Хитчина, связанной с многообразием $\mathcal{M}_{GL_n}(C)$ гиперкэлеровым вращением, и фазе θ общего положения существует канонически связанная с ними спектральная сеть $\mathcal{W}_{\Sigma, \theta}$. При изменении этих данных соответствующие подмножества торов многообразия $\mathcal{M}_{GL_n}(C)$ собираются в кластерную структуру (или ее часть).

Существенные параметры спектральной сети $\mathcal{W}$, подчиненной разветвленному покрытию $\Sigma \rightarrow C$, заключены в счетной совокупности $\{p_c\}$ замкнутых сегментов (образов вложений отрезка $[0, 1]$ в C , называемых *стенами*. Для каждой ориентации o элемента p_c сегмент имеет метку, состоящую из упорядоченной пары различных листов Σ над p_c . При обращении ориентации элемента p_c меняется порядок листов, так что p_c имеет две метки, которые можно записать в виде (o, ij) и $(-o, ji)$. Стены не пересекаются, за исключением их конечных точек, а в этих конечных точках они должны соединяться стандартными способами. Например, в окрестности каждой точки ветвления сеть $\mathcal{W}$ изотропна одной из локальных картин на рис. 2, а в окрестности конечной точки стены, которая не является ни точкой ветвления, ни сингулярной точкой, сеть $\mathcal{W}$ изотропна одной из локальных картин на рис. 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для фазы общего положения θ сеть $\mathcal{W}_{\Sigma, \theta}$ – минимальная спектральная сеть, подчиняющаяся покрытию Σ , стены которой имеют следующее свойство. Если p_c имеет локальную метку (o, ij) , а $\lambda^{(i)}$, $\lambda^{(j)}$ являются 1-формами, свя-

¹⁾Эти пространства содержат данные, связанные с особенностями на поверхности C , которые могут быть нерегулярными, но подробное обсуждение этого мы опускаем (см., например, [26], [13]).

Рис. 3. Локальные модели узла в спектральной сети.

занными с листьями i и j , тогда

$$\arg\langle p'_c(t) | \lambda^{(i)} - \lambda^{(j)} \rangle = \theta$$

для любой ориентированной параметризации стены p_c .

Чтобы определить неабелианизирующее отображение $\Psi_{\mathcal{W}}$, нужно связать со стенами p_c сети $\mathcal{W}$ некоторые дополнительные данные, которые называются наборами солитонов. Солитон $s(z)$ для $z \in p_c$ является погружением отрезка $[0, 1]$ в Σ , рассматриваемым с точностью до регулярной гомотопии, которая начинается и заканчивается на прообразах z . Каждому $z \in p_c$ и ориентации o стены p_c сопоставим набор $\mathcal{S}_c^o(z)$ солитонов, следуя определенным правилам, наиболее важным из которых является то, что если один из концов p_c лежит на точке ветвления $\mathbf{b}$, то его набор солитонов состоит в точности из следующего “светлого” солитона s_c . Если p_c имеет метку (o, ij) с ориентацией o , направленной от $\mathbf{b}$, то $s_c(z)$ является погружением, которое начинается на $z^{(i)}$, заканчивается на $z^{(j)}$ и проекция которого на поверхность C лежит на стене p_c .

Спектральная сеть $\mathcal{W}$ предписывает каждому открытому контуру $\wp$ на поверхности C выражение

$$\mathbf{F}(\wp, \mathcal{W}) = \sum_{\mathbf{a}} \underline{\Omega}'(\wp, \mathcal{W}, \mathbf{a}) \mathbf{X}_{\mathbf{a}}.$$

Здесь $\mathbf{X}_{\mathbf{a}}$ – формальная переменная, связанная с классом гомотопии $\mathbf{a}$ открытого контура на покрытии Σ , она рассматривается по модулю соотношения $\mathbf{X}_{\mathbf{a}\mathbf{a}'} = \mathbf{X}_{\mathbf{a}} \mathbf{X}_{\mathbf{a}'}$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ взаимосвязанны. $\underline{\Omega}'(\wp, \mathcal{W}, \mathbf{a})$ – целые числа, однозначно определяемые следующими свойствами.

1. Если $\wp, \wp'$ связуемы в C , тогда

$$\mathbf{F}(\wp\wp', \mathcal{W}) = \mathbf{F}(\wp, \mathcal{W}) \mathbf{F}(\wp', \mathcal{W}). \quad (1)$$

2. Если $\wp$ не пересекает $\mathcal{W}$, тогда

$$\mathbf{F}(\wp, \mathcal{W}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_{\wp^{(i)}},$$

где $\wp^{(i)}$ – канонический подъем контура $\wp$ на i -й лист поверхности Σ .

3. Предположим, что $\wp$ пересекает $\mathcal{W}$ точно в одной точке z (если пересечение не поперечное, в него надо добавить возмущение и сделать таким). Пусть $\wp_+$ и $\wp_-$ – части контура $\wp$ до и после этого пересечения, таким образом $\wp = \wp_+ \wp_-$. Тогда

$$\mathbf{F}(\wp, \mathcal{W}) = \mathbf{F}(\wp_+, \mathcal{W}) \left(1 + \sum_{s_{\nu} \in \mathcal{S}_c(z)} \mathbf{X}_{\mathbf{a}(s_{\nu}, \wp)} \right) \mathbf{F}(\wp_-, \mathcal{W}), \quad (2)$$

где внутреннее суммирование производится по солитонному набору точки z .

Назовем присвоение $\wp \mapsto \mathbf{F}(\wp, \mathcal{W})$ правилом поднятия контура, введенным секцией $\mathcal{W}$. Важным формальным пунктом, который мы будем систематически игнорировать, является то, что мы в действительности должны или работать со скрученными локальными системами, или фиксировать спинную структуру на поверхности C . При должном рассмотрении этого пункта оказывается, что существенным свойством правила поднятия траектории является зависимость $\mathbf{F}(\wp, \mathcal{W})$ только от класса гомотопии контура $\wp$.

Чтобы объяснить отображение $\Psi_{\mathcal{W}}$, запишем GL_1 -локальную систему на Σ как пучок линий $\mathcal{L}$ с оператором параллельного переноса ∇^{ab} , представив параллельный перенос вдоль открытого контура $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{X}_{\mathbf{a}}(\nabla^{\text{ab}}) \in \text{Hom}(\mathcal{L}_{\mathbf{a}(0)}, \mathcal{L}_{\mathbf{a}(1)}).$$

Тогда GL_N -локальную систему $(E, \nabla) = \Psi_{\mathcal{W}}(\mathcal{L}, \nabla^{\text{ab}})$ на C определим следующим образом. Пучок векторов E представляет собой продвижение пучка $\mathcal{L}$ по направлению к поверхности C , поэтому слой над $z \in C$ имеет вид

$$E_z = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{L}_{z^{(i)}}.$$

Если $\wp$ – контур с конечными точками $z_1, z_2 \in C \setminus \{p_c\}$, то параллельный перенос ∇ вдоль $\wp$ будет следующим:

$$\mathbf{F}(\wp, \mathcal{W}, \nabla^{\text{ab}}) = \sum_{\mathbf{a}} \bar{\Omega}'(\wp, \mathcal{W}, \mathbf{a}) \mathbf{X}_{\mathbf{a}}(\nabla^{\text{ab}}) \in \text{Hom}(E_{z_1}, E_{z_2}).$$

В работе [13] показано, что эта формула определяет параллельный перенос локальной системы на поверхности C после проведенного должным образом перехода к единичному касательному пучку.

4. ДВОЙНАЯ КЛЕТКА БРЮА И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Двойные клетки Брюа простой комплексной группы Ли являются фундаментальными объектами в теории полной положительной определенности [27], кластерных алгебрах [28] и теории Пуассона–Ли [29]. Двойные клетки Брюа группы G – это коэффициенты в разложении

$$G = \bigsqcup_{u,v \in W} G^{u,v} = \bigsqcup_{u,v \in W} B_+ u B_+ \cap B_- v B_-$$

по пересечениям двойных корядов противоположных подгрупп Бореля B_+ , B_- . Если H – подгруппа Картана группы G , то они также являются левыми H -орбитами симплектических листов стандартной структуры Пуассона–Ли на группе G . Их координатные кольца – (верхние) кластерные алгебры со специальным набором кластеров, индексированные перестановками редуцированных символов u и v .

Примером, представляющим для нас интерес, является двойная клетка Брюа–Кокстера $SL_{n+1}^{c,c}/\text{Ad } H$, она отличается тем, что является фазовым пространством канонической интегрируемой системы – открытой релятивистской системы Тоды. Здесь c – элемент Кокстера группы Вейля многообразия SL_{n+1} , а $SL_{n+1}^{c,c}/\text{Ad } H$ означает факторпространство $SL_{n+1}^{c,c}$ по сопряженной подгруппе H . Это $2n$ -мерное

Рис. 4. Колчан, отвечающий за кластерную структуру на $SL_{n+1}^{c,c}/\text{Ad } H$.

симплектическое многообразие, а гамильтонианы открытой релятивистской системы Тоды являются ограничением характеров n фундаментальных представлений многообразия $SL_{n+1}^{c,c}$.

Вместо того чтобы углубляться в общие подробности кластерных структур на двойных клетках Брюа, опишем частную кластерную схему на $SL_{n+1}^{c,c}/\text{Ad } H$ с помощью направленных плоских графов. Этот комбинаторный формализм распространен в теории полной положительной определенности [30], а подробности его появления в контексте релятивистской системы Тоды изучены в работе [8]. Колчан Q_n , отвечающий за кластерную структуру на $SL_{n+1}^{c,c}/\text{Ad } H$, приведен на рис. 4.

Рассмотрим направленный граф $\mathcal{N}_i(n)$ (или $\mathcal{N}_i$, где наличие n подразумевается), состоящий из $n+1$ горизонтальных уровней, соединенных с помощью $2n$ вертикальных ребер. Точнее, рассмотрим следующее погружение в $[0, 1]^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i = & \left(\bigcup_{k=1}^n [0, 1] \times \left\{ \frac{k}{n+2} \right\} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{2n+1} \right\} \times [n+1-k, n+2-k] \right) \cup \\ & \cup \left(\bigcup_{k=1}^n \left\{ \frac{n+k}{2n+1} \right\} \times [n+1-k, n+2-k] \right). \end{aligned}$$

Вертикальные ребра вида $\{k/(2n+1)\} \times [n+1-k, n+2-k]$ направлены вверх, ребра вида $\{(n+k)/(2n+1)\} \times [n+1-k, n+2-k]$ направлены вниз, а горизонтальные ребра направлены налево (для наглядности см. примеры 1, 2). Назовем $(1, k/(n+2))$, $(0, k/(n+2))$ k -ми входной и выходной вершинами графа $\mathcal{N}_i$ соответственно. Нам нужно рассмотреть только граф $\mathcal{N}_i$ с точностью до изотопии и следующего движения. Разрешим двум вершинам с одним входящим ребром и двумя исходящими ребрами (или наоборот) сталкиваться и расходиться в противоположные конфигурации, как показано ниже:

Пометим компоненты множества $[0, 1]^2 \setminus \mathcal{N}_i$ непосредственно справа от ребер $\{k/(2n+1)\} \times [n+1-k, n+2-k]$, $\{(n+k)/(2n+1)\} \times [n+1-k, n+2-k]$ переменными y_k , y_{n+k} соответственно.

Положим $\mathcal{A}_{Q_n} = \text{Spec}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{2n}^{\pm 1}]$ и введем дуальные координаты $y_1, \dots, y_{2n}$ с помощью выражения $y_j = \prod_{i=1}^{2n} x_i^{(Q_n)_{ji}}$, как и в разделе 3 (напомним, что эти показатели являются элементами знаковой матрицы смежности колчана Q_n). Граф $\mathcal{N}_i$ устанавливает отображение $\mathcal{A}_{Q_n} \xrightarrow{\tilde{a}_i} SL_{n+1}^{c,c}$ следующим образом. Под направленным контуром в графе $\mathcal{N}_i$ подразумевается контур, ориентация которого согласуется

с ориентацией графа $\mathcal{N}_i$. Наибольший направленный контур p начинается и заканчивается на граничных вершинах графа $\mathcal{N}_i$, его вес $\text{wt}(p)$ можно ввести с помощью следующих условий. Вес наименьшего направленного контура $p_{\min}$ (единственного контура, направленного из n -го входа в n -й выход) равен

$$\text{wt}(p_{\min}) = \prod_{i=1}^n (y_{2i-1} y_{2i})^{-i/(n+1)}.$$

Для любого другого направленного контура p отношение $\text{wt}(p)/\text{wt}(p_{\min})$ является произведением всех y_i , которые маркируют компоненты $[0, 1]^2 \setminus \mathcal{N}_i$, лежащие между p и $p_{\min}$ в $[0, 1]^2$. Тогда отображение $\tilde{a}_i$ устанавливается с помощью следующего условия: ij -й матричный элемент точки образа должен быть взвешенной суммой

$$(\tilde{a}_i(y_1, \dots, y_{2n}))_{ij} = \sum_{p: j \rightarrow i} \text{wt}(p)$$

по всем направленным траекториям из j -го входа в i -й выход графа $\mathcal{N}_i$.

Пусть теперь $\overline{\mathcal{N}}_i \subset S^1 \times [0, 1]$ обозначает образ графа $\mathcal{N}_i$ при отождествлении левой и правой сторон грани $[0, 1]^2$. Положим вес замкнутого направленного контура в $\overline{\mathcal{N}}_i$ равным весу его прообраза. Если $P = \{p_\ell\}_{\ell=0}^{i-1}$ – набор i непересекающихся замкнутых направленных контуров в $\overline{\mathcal{N}}_i$, то вес P введем с помощью выражения

$$\text{wt}(P) = \prod_{\ell=0}^{i-1} \text{wt}(p_\ell).$$

Тогда легко понять следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Гамильтониан H_k открытой релятивистской цепочки Тоды в кластерных координатах $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{2n}^{\pm 1}]$ является взвешенной суммой

$$\sum_{P=\{p_\ell\}_{\ell=0}^{i-1}} \text{wt}(P)$$

всех наборов из k непересекающихся замкнутых направленных контуров в $\overline{\mathcal{N}}_i$.

ПРИМЕР 1 [8]. Граф $\mathcal{N}_i$ для $SL_3^{c,c}/\text{Ad } H$ имеет вид

а отображение a_i задается в виде

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto y_1^{-1/3} y_2^{-1/3} y_3^{-2/3} y_4^{-2/3} \begin{pmatrix} y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_4 & y_4 + y_3 y_4 & 1 \\ y_2 y_3 y_4 & y_4 + y_3 y_4 & 1 \\ 0 & y_4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Существуют два гамильтониана H_1 и H_2 , связанные соответственно с фундаментальным и антифундаментальным представлениями. Первый является взвешенной

Рис. 5. Колчан Q_3 с отмеченными ребрами.

суммой пяти замкнутых направленных траекторий в $\overline{\mathcal{N}}_i$, а второй является взвешенной суммой пяти непересекающихся пар замкнутых направленных траекторий:

$$\begin{aligned} H_1 &= y_1^{-1/3} y_2^{-1/3} y_3^{-2/3} y_4^{-2/3} (1 + y_4 + y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_4) = \\ &= x_3 x_4^{-1} (1 + y_4 + y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_4), \\ H_2 &= y_1^{-2/3} y_2^{-2/3} y_3^{-1/3} y_4^{-1/3} (1 + y_2 + y_1 y_2 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_4) = \\ &= x_1 x_2^{-1} (1 + y_2 + y_1 y_2 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_3 y_4), \end{aligned}$$

где $y_1 = x_2^2 x_4^{-1}$, $y_2 = x_1^{-2} x_3$, $y_3 = x_2^{-1} x_4^2$ и $y_4 = x_1 x_3^{-2}$.

5. ГАМИЛЬТонианы как характеры кластеров

Обратимся теперь к теории представлений колчана Q_n . Наш первый главный результат заключается в том, что гамильтонианы релятивистской цепочки Тоды раздела 4 являются по существу характеристиками кластеров нежестких представлений Q_n . Пометим ребра колчана Q_n с помощью $\{a_1, b_i, \ell_{i+1}, r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, распилив рис. 5 очевидным образом. Зафиксируем потенциал

$$W_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \ell_{i+1} b_{i+1} r_i - b_i \ell_{i+1} a_{i+1} r_i,$$

имеющий следующие циклические производные:

$$\begin{aligned} \partial_{a_i} W_n &= \ell_{i+1} b_{i+1} r_i - r_{i-1} b_{i-1} \ell_i, & \partial_{b_i} W_n &= r_{i-1} a_{i-1} \ell_i - \ell_{i+1} a_{i+1} r_i, \\ \partial_{\ell_i} W_n &= b_i r_{i-1} a_{i-1} - a_i r_{i-1} b_{i-1}, & \partial_{r_i} W_n &= a_i \ell_{i+1} b_{i+1} - b_i \ell_{i+1} a_{i+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь полагаются равными нулю все члены, относящиеся к несуществующим ребрам, такие как r_n или a_0 .

Алгебра якобианов $J(Q_n, W_n)$ является конечномерной и имеет естественный базис, индексированный классом эквивалентности контуров в Q_n . Проективное представление P_i является подпространством алгебры $J(Q_n, W_n)$, натянутым на классы эквивалентности контуров с источником i . Контур, начинающийся в i и заканчивающийся в j , является элементом подпространства $(P_i)_j$ с носителем в j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Определим $\mathbb{P}^1$ -семейство модулей M_i^λ для $i \in \{1, \dots, n\}$ следующим образом. Пусть $P_{2i} \xrightarrow{\lambda} P_{2i-1}$ — отображение в заданных проективных координатах $\lambda = (\lambda_1 : \lambda_2)$, которое переводит генератор P_{2i} в элемент $\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i \in (P_{2i-1})_{2i}$. Тогда M_i^λ является коядром координат λ :

$$0 \rightarrow P_{2i} \xrightarrow{\lambda} P_{2i-1} \rightarrow M_i^\lambda \rightarrow 0.$$

Напомним, что $\{H_i = \text{tr}_{\wedge^i \mathbb{C}^{n+1}}\}_{i=1}^n$ – гамильтонианы открытой релятивистской системы Тоды, разложение которых по кластерным координатам $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{2n}^{\pm 1}]$ описано в разделе 4 с помощью направленных контуров. С другой стороны, мы также видели, что $J(Q_n, W_n)$ -представление модуля M порождает кластерный характер $CC(M) \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{2n}^{\pm 1}]$.

ТЕОРЕМА 2 [6]. *Для каждого $1 \leq i \leq n$ и всех $\lambda \in \mathbb{CP}^1$ имеем $H_i = CC(M_i^\lambda)$.*

Мы коротко прокомментируем доказательство, одним из основных пунктов которого является использование колчана коэффициентов “хорошего” базиса модулей M_i^λ [31], следуя аналогичным построениям работы [32]. Пусть M является представлением колчана Q , $B = \{b_i\}$ – базис модуля M , такой что $B_v = B \cap M_v$ – базис модуля M_v для всех $v \in Q_0$. Колчан коэффициентов Γ для B содержит $(\Gamma)_0 = B$ и ребро из $b_i \in B_v$ в $b_j \in B_w$ для каждого такого ребра $a: v \rightarrow w$ колчана Q , что $c_j \neq 0$ в разложении

$$b_i a = \sum_{b_k \in B_w} c_k b_k.$$

Теперь представление M_i^λ допускает базис B_i^λ со следующим принципиальным свойством.

ЛЕММА 1. *Для всех вершин $v \in Q_0$ и всех подмодулей $N \subset M_i^\lambda$ базис $B_i^\lambda \cap N_v$ является базисом в N_v .*

Отсюда, в частности, следует, что подмодули модуля M_i^λ находятся во взаимно однозначном соответствии с содержащими приемники подколчанами колчана коэффициентов Γ_i^λ базиса B_i^λ . При этом подколчан $\Gamma' \subset \Gamma_i^\lambda$ называется подколчаном, содержащим приемники, если для любой вершины i колчана Γ' и ребра $a: i \rightarrow j$ колчана Γ_i^λ a и j являются также ребром и вершиной колчана Γ' . Подробно исследуя структуру Γ_i^λ , можно найти взаимно однозначное соответствие между такими содержащими приемники подколчанами и наборами из i непересекающихся замкнутых направленных траекторий кольцевого графа $\overline{\mathcal{N}}_i$ (см. пример 2 ниже). Наконец, следует отметить, что M_i^λ имеет легко рассчитываемую инъективную резольвенту, которая находится с использованием дуальности и возмущений σ_n и ν_n , задаваемых следующим образом:

$$\sigma_n(2k) = 2k - 1, \quad \sigma_n(2k - 1) = 2k, \quad \nu_n(k) = n + 1 - k.$$

ЛЕММА 2. *Пусть $I_{2j} \xrightarrow{\lambda} I_{2j-1}$ при заданных $1 \leq j \leq n$ и $\lambda \in \mathbb{P}^1$ является отображением, полученным применением $D\sigma_n$ к $P_{2j} \xrightarrow{\lambda} P_{2j-1}$. Тогда имеем точную последовательность*

$$0 \rightarrow M_{\nu_n(j)}^\lambda \rightarrow I_{2j} \xrightarrow{\lambda} I_{2j-1} \rightarrow 0.$$

В частности, $M_{\nu_n(j)}^\lambda$ – перенос Ауслендера–Рейтена модуля M_j^λ , при этом $x^{\text{coind}} M_j^\lambda = x_{2\nu_n(i)-1} x_{2\nu_n(i)}^{-1}$.

ПРИМЕР 2. В случае, приведенном на рис. 6, существуют 61 содержащих приемники подколчанов колчана Γ_3^λ и, следовательно, 61 подмодулей модуля M_3^λ . Это соответствует 61 непересекающимся триадам замкнутых направленных траекторий в $\overline{\mathcal{N}}_i$. Отмеченный подколчан на рис. 6а соответствует выделенной триаде на рис. 6б и 6-мерному подмодулю модуля M_3^λ .

Рис. 6. Колчан коэффициентов Γ_3^λ 18-мерного представления M_3^λ алгебры $J(Q_5, W_5)$ для $\lambda = (1 : 0)$ (а); направленный граф $\mathcal{N}_1$, связанный с $SL_6^{c,c}$ (б).

6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СИСТЕМА ТОДЫ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕТИ

Перейдем к определению разложения по кластерным координатам в $SL_n^{c,c}/\text{Ad } H$ гамильтонианов открытой релятивистской системы Тоды со следами голономий на некотором многообразии диких характеров для $\mathbb{P}^1$ с сингулярностями в нуле и на бесконечности. Это пространство связано с помощью дикого неабелева соответствия Ходжа с периодической нерелятивистской системой Тоды, рассматриваемой как мероморфная система Хитчина на $\mathbb{P}^1$. Спектральные сети периодической системы Тоды наделяют ее структурой кластерного многообразия типа Q_n (с точностью до конечного покрытия). Это приводит к неявному отождествлению $SL_{n+1}^{c,c}/\text{Ad } H$ с диким многообразием характеров, и подтверждение того, что это соответствует взятию следов голономий гамильтонианов, состоит в тщательном изучении траекторий некоторых дифференциальных уравнений, которые задаются спектральными кривыми периодической системы Тоды. Описание гамильтонианов релятивистской системы Тоды как взвешенных сумм контуров в направленном графе снова появляется вполне естественным образом при описании параллельного переноса с помощью поднятия контуров вблизи BC^* , при этом направленный граф $\mathcal{N}_1$, использованный в разделе 4 для описания кластерных координат на $SL_{n+1}^{c,c}/\text{Ad } H$, снова появляется здесь как 1-скелет спектральной кривой периодической системы Тоды.

Если смотреть на периодическую цепочку Тоды как на систему Хитчина в $\mathbb{P}^1$, то ее базис имеет следующий вид:

$$\mathcal{B}_N = \left\{ u_2 \left(\frac{dz}{z} \right)^2, \dots, u_{N-1} \left(\frac{dz}{z} \right)^{N-1}, (z + u_N + z^{-1}) \left(\frac{dz}{z} \right)^N : (u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{C}^{N-1} \right\}.$$

Спектральная кривая $\Sigma_u \subset T^*\mathbb{C}^*$, связанная с точкой общего положения $u \in \mathcal{B}_N$ — дважды выколотая гиперэллиптическая кривая рода $N-1$ с циклической монодромией вблизи нуля и бесконечности. Для точки общего положения u кривая Σ_u имеет

$2(N-1)$ простых точек ветвления над $\mathbb{C}^*$, а в $u_0 = (0, \dots, 0)$ они объединяются в пару точек ветвления, расположенных в $\pm i$, с N -циклической монодромией. Для наших целей достаточно сосредоточиться на спектральных сетях, связанных с u_0 , поэтому далее будем использовать символ Σ вместо Σ_{u_0} и символ $\bar{\Sigma}$ для соответствующих гладких проективных кривых.

Пусть $\mathcal{W}_\theta$ обозначает спектральную сеть с фазой θ , подчиняющуюся кривой Σ , и пусть $\mathcal{M}_{SL_N}(C)$ означает дикое многообразие SL_N -характеров для $C = \mathbb{C}^*$, связанное с фазовым пространством периодической системы Тоды с помощью дикого неабелева соответствия Ходжа. Нам не требуется аккуратное определение этого пространства и соответствующие данные Стокса в нуле и на бесконечности. В самом деле, при расширении неабелева соответствия Ходжа до существующих установок возникают неразрешенные формальные вопросы, поскольку метод, изложенный в работе [33], приводит к тому, что системы Тоды не удовлетворяют некоторым предположениям средней сложности. Однако считается, что эти предположения можно отменить (см., например, [34]). Важно то, что такие аналитические проблемы не препятствуют достижению нашей непосредственной цели. Для наших целей достаточно того, что спектральную сеть $\mathcal{W}_\theta$ можно использовать для получения четкого определения обратного отображения из $\mathcal{M}_{SL_N}(C)$ в $\mathcal{M}_{GL_1}(\bar{\Sigma})$ следа голономии вблизи замкнутой траектории на поверхности C .

Указание на то, что кластерная структура на $\mathcal{M}_{SL_N}(C)$, заданная спектральными сетями Тоды, связана с колчаном Q_n , фактически является утверждением о конечных БПЗ-тканях спектральных кривых Тоды. Будем называть ориентированный контур p_c на поверхности C БПЗ ij -струной с фазой θ если i и j – листы покрытия Σ над p_c и

$$\arg\langle p'_c(t) | \lambda^{(i)} - \lambda^{(j)} \rangle = \theta \quad (4)$$

для любой ориентированной параметризации p_c . Здесь $\lambda^{(i)}$ и $\lambda^{(j)}$ – 1-формы на поверхности C , заданные листами i и j (напомним, что они погружены в T^*C). Конечная БПЗ-ткань с фазой θ является объединением конечного числа компактных БПЗ-струн с фазой θ , так что конечная точка любой ij -струны является или точкой ветвления, в которой встречаются листы i и j , или узлом, в котором встречаются три струны БПЗ-ткани. Метки струн, которые встречаются в узле, должны быть вида ij , jk и ki , причем все эти струны должны быть ориентированы по направлению к узлу или от него. Каждая БПЗ ij -струна p_c имеет соответствующий подъем к паре сегментов в Σ : один – ее прообраз на листе j с той же ориентацией, а другой – ее прообраз на листе i с противоположной ориентацией. Каждая конечная БПЗ-ткань W имеет тогда соответствующий подъем, который является замкнутым ориентированным контуром в Σ . Тогда вершины колчана, связанные с кривой Σ и фазой θ , определяются с помощью известного набора БПЗ-тканей с фазой в интервале $(\theta, \theta + \pi)$ (соответственно такой колчан называется БПЗ-колчаном [35]). Число стрелок между двумя вершинами определяется числом пересечений соответствующих подъемов в Σ .

Теперь можно сформулировать наш второй основной результат²⁾.

ТЕОРЕМА 3 [6]. *Для общей фазы θ и $1 \leq k \leq N$ имеем $H_k = \Psi_{\mathcal{W}_\theta}^* \operatorname{tr}_{\wedge^k \mathbb{C}^{n+1}} \operatorname{Hol}_\varphi$.*

²⁾Здесь и далее φ обозначает замкнутый контур, обходящий единичную окружность по часовой стрелке, а H_k – открытый релятивистский гамильтониан, разложенный по кластерным координатам $\mathbb{C}[x^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$.

Рис. 7. Траектории $z(t)$, удовлетворяющие условию $\arg z'(t) = -\pi/2 + \arg\{z(t)/(z(t) + z(t)^{-1})^{1/3}\}$. Лемма 3 обобщает наблюдение, состоящее в том, что если траектория входит в единичный диск (или его дополнение), то она никогда не выходит из него.

Основным аналитическим элементом доказательства является следующая лемма, представляющая важное средство качественного контроля структуры сети $\mathcal{W}_\theta$ (она обобщает $SU(2)$ -анализ, приведенный в конце работы [36]). В частности, используемое в утверждении условие на $z'(t)$ применимо к любой параметризации стен спектральной сети $\mathcal{W}_\theta$ и в конечном счете гарантирует, что они или полностью лежат на единичном круге, или никогда не входят в него (рис. 7).

ЛЕММА 3. *Зафиксируем $R > 0$ и фазу ϕ , и пусть $z(t)$ – контур в $\mathbb{C}^*$, заданный для $0 \leq t \leq R$. Предположим, что $z(t)$ удовлетворяет условию*

$$\arg z'(t) = \phi + \arg \frac{z}{(z + z^{-1})^{1/N}}$$

для $0 < t \leq R$, а значение $(z + z^{-1})^{1/N}$ определяется аналитическим продолжением вдоль $z(t)$. Предположим, что для всех достаточно малых $t > 0$ значение $|z(t)|$ или меньше единицы и уменьшается, или равняется единице и остается постоянным, или больше единицы и возрастает. Тогда то же условие выполняется и для всех t .

Отсюда можно сделать вывод, что если слегка возмутить сеть $\mathcal{W}_\theta$, так чтобы каждая составная точка ветвления распалась в совокупность из n простых точек

ветвления, то единичная окружность пересечет в точности $2n$ стен сети $\mathcal{W}_\theta$, причем каждую только один раз. Теперь можно рассмотреть объединение всех контуров в Σ , появляющихся в разложении

$$\mathbf{F}(\wp, \mathcal{W}_\theta) = \sum_{\mathbf{a}} \bar{\underline{\Omega}}'(\wp, \mathcal{W}_\theta, \mathbf{a}) \mathbf{X}_{\mathbf{a}}$$

с ненулевыми коэффициентами.

ЛЕММА 4. *Объединение этих ориентированных контуров образует направленный граф, эквивалентный графу $\bar{\mathcal{N}}_{\mathbf{i}}$ в смысле, изложенном в разделе 4.*

Эта лемма осуществляет комбинаторную связь между соответствующими вычислениями H_k и $\Psi_{\mathcal{W}_\theta}^* \operatorname{tr}_{\wedge^k \mathbb{C}^{n+1}} \operatorname{Hol}_\wp$, что существенно для доказательства теоремы.

7. ОПЕРАТОРЫ ЛИНИИ В $\mathcal{N} = 2$ ТЕОРИЯХ И ОБРАМЛЕННЫЕ МОДУЛИ КОЛЧАНОВ

В заключение обсудим интерпретацию наших результатов, используя терминологию четырехмерных $\mathcal{N} = 2$ теорий поля. Этот аспект является фундаментальным, в частности, при введении спектральных сетей в работе [13]. Соответствующие $\mathcal{N} = 2$ теории называются теориями класса $\mathcal{S}$ и строятся с помощью компактификации шестимерных $(2, 0)$ -теорий на поверхности Римана C с выколотыми точками. Системы Зайберга–Виттена в этих теориях являются системами Хитчина, приводящими к геометрическим структурам, описанным в разделе 6.

Проблемы, обсуждаемые в этой работе, тесно связаны с изучением операторов линий в таких теориях [37]–[41]. Полное пространство системы Хитчина, как и связанное с ним (дикое) многообразие характеров поверхности C , появляется как пространство вакуумов теории, компактифицированной на S^1 . Математическое ожидание суперсимметричных операторов линий, обматывающих S^1 , порождает голоморфные функции на многообразии характеров. Как показано в работе [37], разложения этих функций по кластерным координатам должны быть производящими функциями обрамленных БПЗ-индексов. С точки зрения математики это, грубо говоря, характеристики Эйлера модульного пространства устойчивого обрамленного представления БПЗ-колчана (вообще говоря, с поправками) [38].

Существует стандартное соответствие между грассманианами колчанов и модульными пространствами устойчивых обрамленных представлений, которое отождествляет эти производящие функции с характеристиками кластеров необрамленных представлений [42], [43]. В нашем случае оно принимает следующий вид. Для каждого $1 \leq k \leq n$ введем обрамленный колчан $\bar{Q}_n^k$, который имеет набор вершин $\{0, 1, \dots, 2n\}$, не содержит ориентированных 2-циклов и

$$(\bar{Q}_n^k)_{0i} = \begin{cases} 1, & i = 2k - 1, \\ -1, & i = 2k, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Для $\lambda = (\lambda_1 : \lambda_2) \in \mathbb{P}^1$ пусть $\bar{W}_n^\lambda$ означает потенциал

$$\bar{W}_n^\lambda = W_n + \lambda_1 a_k c d + \lambda_2 b_k c d$$

на $\overline{Q}_n^k$, где c и d обозначают соответственно стрелки из 0 в $2k - 1$ и из $2k$ в 0 . Представление M обрамленного колчана с потенциалом коциклично в том случае, если $\dim M_0 = 1$ и каждый нетривиальный подмодуль содержит M_0 . Для данного $e \in \mathbb{N}^{2n}$ напомним $\mathcal{M}_e^s(\overline{Q}_n^k, \overline{W}_n^\lambda)$ для пространства модулей коциклических обрамленных представлений, необрамленная часть которых $\bigoplus_{i=1}^{2n} M_i$ имеет размерность e .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Необрамленная часть коциклического представления M алгебры $J(\overline{Q}_n^k, \overline{W}_n^\lambda)$ изоморфна единственному подпредставлению модуля $M_{\nu_n(k)}^\lambda$. В частности, $\mathcal{M}_e^s(\overline{Q}_n^k, \overline{W}_n^\lambda) \cong \text{Gr}_e M_{\nu_n(k)}^\lambda$ для векторов всех размерностей $e \in \mathbb{N}^{2n}$. Таким образом,*

$$CC(M_{\nu_n(k)}^\lambda) = x_{2k-1} x_{2k}^{-1} \sum_{e \in \mathbb{Z}^n} \chi(\mathcal{M}_e^s(\overline{Q}_n^k, \overline{W}_n^\lambda)) y^e.$$

С другой стороны, одним из методов построений операторов линий в теориях класса $\mathcal{S}$ является построение с помощью операторов поверхностей в шестимерной $(2, 0)$ -теории, частично обматывающих замкнутые кривые на поверхности C . В случае простой замкнутой кривой, результирующее математическое ожидание должно быть следом некоторого представления голономии вблизи этой кривой [37], следовательно, этот след должен быть характером кластера. Разумеется, колчан Q_n хорошо известен как БПЗ-колчан чистой $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ -теории Янга–Миллса [35], [44], [45], следовательно, дикое многообразие характеров, связанное с $SL_n^{c,c}/\text{Ad } H$, – это многообразие, связанное с его системой Зайберга–Виттена периодической системой Тоды. С этой точки зрения гамильтонианы открытой релятивистской системы Тоды являются математическими ожиданиями петель Вильсона в фундаментальных представлениях группы $SU(N)$ [37]. Это связано с появлением замкнутой релятивистской системы Тоды в качестве системы Зайберга–Виттена пятимерной суперсимметричной модели Янга–Миллса с одним компактным измерением [46]. В самом деле, сами гамильтонианы Зайберга–Виттена задаются операторами линий, которые обматывают компактное измерение.

Список литературы

- [1] S. Fomin, A. Zelevinsky, *J. Amer. Math. Soc.*, **15**:2 (2002), 497–529.
- [2] P. Caldero, F. Chapoton, *Comment. Math. Helv.*, **81**:3 (2006), 595–616.
- [3] B. Keller, “Cluster algebras and derived categories”, *Derived Categories in Algebraic Geometry*, Eur. Math. Soc., Zurich, 2012, 123–183.
- [4] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, **103** (2006), 1–211.
- [5] G. Musiker, R. Schiffler, L. Williams, *Compos. Math.*, **149**:2 (2013), 217–263.
- [6] H. Williams, *Toda systems, cluster characters, and spectral networks*, arXiv: 1411.3692.
- [7] T. Brustle, J. Zhang, *Algebra Number Theory*, **5**:4 (2011), 529–566.
- [8] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Acta Math.*, **206**:2 (2011), 245–310.
- [9] R. Kedem, *J. Phys. A*, **41**:19 (2008), 194011, 14 pp.
- [10] P. Di Francesco, R. Kedem, *Lett. Math. Phys.*, **89**:3 (2009), 183–216.
- [11] E. Martinec, N. Warner, *Nucl. Phys. B*, **459**:1–2 (1996), 97–112, arXiv: hep-th/9509161.
- [12] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474, arXiv: hep-th/9505035.
- [13] D. Gaiotto, G. Moore, A. Neitzke, *Ann. Henri Poincaré*, **14**:7 (2013), 1643–1731, arXiv: 1204.4824.

- [14] A. B. Goncharov, R. Kenyon, *Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Sup.* (4), **46**:5 (2013), 747–813.
- [15] A. Marshakov, *J. Geom. Phys.*, **67** (2013), 16–36, arXiv:1207.1869.
- [16] V. V. Fock, A. Marshakov, *Loop groups, clusters, dimers and integrable systems*, arXiv:1401.1606.
- [17] H. Williams, *Int. Math. Res. Notices*, **2015**:22 (2015), 12042–12069.
- [18] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Compos. Math.*, **143**:1 (2007), 112–164.
- [19] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *J. Amer. Math. Soc.*, **25**:1 (2012), 21–76.
- [20] H. Derksen, J. Weyman, A. Zelevinsky, *Selecta Math.*, **14**:1 (2008), 59–119.
- [21] P. Caldero, B. Keller, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4), **39**:6 (2006), 983–1009.
- [22] Y. Palu, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **58**:6 (2008), 2221–2248.
- [23] P. Plamondon, *Adv. Math.*, **277**:1 (2011), 1–39.
- [24] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, **42**:6 (2009), 865–930.
- [25] V. V. Fock, A. B. Goncharov, “Dual Teichmüller and Lamination Spaces”, *Handbook of Teichmüller Theory*, v. I, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, 647–684.
- [26] P. Boalch, *Indag. Math. (N. S.)*, **25**:5 (2014), 872–900.
- [27] S. Fomin, A. Zelevinsky, *J. Amer. Math. Soc.*, **12**:2 (1999), 335–380.
- [28] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky, *Duke Math. J.*, **126**:1 (2005), 1–52.
- [29] T. Hoffmann, J. Kellendonk, N. Kutz, N. Reshetikhin, *Commun. Math. Phys.*, **212**:2 (2000), 297–321.
- [30] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Math. Intelligencer*, **22**:1 (2000), 23–33.
- [31] C. Ringel, *Linear Algebra Appl.*, **275–276** (1998), 471–493.
- [32] G. Cerulli-Irelli, *J. Algebraic Combin.*, **33**:2 (2011), 259–276.
- [33] O. Biquard, P. Boalch, *Compos. Math.*, **140**:1 (2004), 179–204.
- [34] E. Witten, *Anal. Appl. (Singap.)*, **6**:4 (2008), 429–501.
- [35] M. Alim, S. Cecotti, C. Cordova, S. Espahbodi, R. Rastogi, C. Vafa, *$N = 2$ quantum field theories and their BPS quivers*, arXiv:1112.3984.
- [36] A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr, C. Vafa, N. Warner, *Nucl. Phys. B*, **477**:3 (1996), 746–764, arXiv:hep-th/9604034.
- [37] D. Gaiotto, G. Moore, A. Neitzke, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **17**:2 (2013), 241–397.
- [38] C. Córdova, A. Neitzke, *JHEP*, **09** (2014), 099, 65 pp., arXiv:1308.6829.
- [39] M. Cirafici, *JHEP*, **11** (2013), 077, arXiv:1309.2656.
- [40] D. Xie, *Aspects of line operators of class S theories*, arXiv:1312.3371.
- [41] W.-Y. Chuang, D.-E. Diaconescu, J. Manschot, G. W. Moore, Y. Soibelman, *Geometric engineering of (framed) BPS states*, arXiv:1301.3065.
- [42] K. Nagao, *Duke Math. J.*, **162**:7 (2013), 1313–1367.
- [43] M. Reineke, *J. Algebra*, **320**:1 (2008), 94–115.
- [44] S. Cecotti, A. Neitzke, C. Vafa, *R -twisting and $4d/2d$ correspondences*, arXiv:1006.3435.
- [45] S. Cecotti, M. Del Zotto, *JHEP*, **10** (2012), 190, 34 pp., arXiv:1207.7205.
- [46] N. Nekrasov, *Nucl. Phys. B*, **531**:1–3 (1998), 323–344, arXiv:hep-th/9609219.