Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Хельминк, Е. А. Панасенко, С. В. Поленкова, Билинейные уравнения для строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 3, 512–526

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8893>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:21:49

© 2015 г. Г. Ф. Хельминк*, Е. А. Панасенко†, С. В. Поленкова‡

БИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТРОГОЙ ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Описаны два модуля алгебры Psd псевдодифференциальных операторов; для каждого из них определена ассоциированная система, из которой можно получить как условия совместности уравнения Лакса для строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили. На этих модулях построено множество билинейных уравнений, характеризующие решения строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили, которые получаются одеванием базисного образующего элемента алгебры Psd .

Ключевые слова: интегрируемые деформации, псевдодифференциальные операторы, совместные уравнения Лакса, строгая иерархия Кадомцева–Петвиашвили, дуальные волновые функции, билинейная форма.

DOI: 10.4213/tmf8893

1. ВВЕДЕНИЕ

Хирота был первым, кто заметил [1], что многие явные уравнения солитонов могут быть записаны в определенной билинейной форме, которая теперь носит его имя. Эта форма помогла, например, найти многосолитонные решения и обратную задачу рассеяния для таких нелинейных эволюционных уравнений. Вскоре Сато и его ученики показали (см. работы [2], [3]), что уравнения многих интегрируемых иерархий, наиболее важная из которых – иерархия Кадомцева–Петвиашвили (КП), могут быть записаны в билинейной форме, эквивалентной набору билинейных уравнений Хироты для τ -функций(ий) иерархий. Другие авторы (см., например, монографию [4]) использовали эту форму как отправную точку при работе с уравнениями солитонов. Отметим, что ключевым инструментом в работах школы Сато на эту тему было билинейное тождество – формула, для которой важна сходимост (см. раздел 4 настоящей статьи).

Работа частично поддержана государственной программой Министерства образования и науки Российской Федерации № 2014/285 (проект № 2476).

*Korteweg–de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands. E-mail: g.f.helminck@uva.nl

†Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Тамбов, Россия. E-mail: panlena_t@mail.ru

‡University of Twente, Enschede, The Netherlands. E-mail: s.v.polenkova@gmail.com

В настоящей работе мы рассматриваем строгую иерархию КП – интегрируемую иерархию, основанную на разбиении псевдодифференциальных операторов на строго дифференциальную и интегральную части. Такое разбиение определяет нелинейные уравнения этой иерархии. Они представляют собой набор совместных уравнений Лакса для различных степеней нормированного псевдодифференциального оператора M первого порядка. Наша цель – построить систему билинейных уравнений для потенциальных собственных векторов оператора M , не требующую каких-либо предположений о сходимости, но которая тем не менее определяет решения указанной иерархии. Значительный класс решений M этой иерархии получается одеванием базисного дифференцирования ∂ , по которому была построена алгебра псевдодифференциальных операторов, решением соответствующей задачи Коши.

Можно показать, что любое потенциальное решение M , полученное одеванием оператора ∂ , имеет собственный вектор w в модуле $\mathcal{O}$ псевдодифференциальных операторов, состоящем из возмущений собственного вектора, соответствующего тривиальному решению $M = \partial$. Мы показываем, что M является решением строгой иерархии КП тогда и только тогда, когда w удовлетворяет семейству уравнений, называемому линеаризацией иерархии. Собственная функция w в этом случае называется волновой функцией строгой иерархии КП. Эта модель оказывается очень полезной и для непосредственного построения решений иерархии.

Каждой потенциальной волновой функции w можно сопоставить ее дуальную функцию w^* из дуального модуля $\mathcal{O}^*$. Это можно охарактеризовать алгебраически с помощью семейства билинейных тождеств на $\mathcal{O} \times \mathcal{O}^*$. Похожее множество уравнений для w^* , называемое дуальной линеаризацией, позволяет определить, является ли функция w^* дуальной для волновой функции строгой иерархии КП. Как оказывается, чтобы получить совместные уравнения Лакса для M , требуются два множества билинейных уравнений относительно функции w и ее дуальной w^* .

Содержание статьи таково. В разделе 2 изложены необходимые свойства алгебры Psd псевдодифференциальных операторов и строгой иерархии КП из работы [5]. В разделе 3 представлены два Psd -модуля $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$, а также системы, линеаризация и ее дуальная, которые играют важную роль в описании билинейной формы иерархии. В заключение в разделе 4 приведено описание билинейных уравнений и показано, как они характеризуют решения линеаризации.

2. СТРОГАЯ ИЕРАРХИЯ КП

Строгая иерархия КП состоит из эволюционных уравнений для определенной деформации базисного дифференцирования ∂ в алгебре Psd псевдодифференциальных операторов.

Напомним некоторые основные факты об алгебре Psd . Чтобы “уравнять” действительный и комплексный случаи, а также подчеркнуть алгебраический характер интересующих нас уравнений, мы начнем с алгебры R над полем k нулевой характеристики и приоритетного k -линейного дифференцирования $\partial: R \mapsto R$. По заданным R и ∂ можно построить алгебру $R[\partial]$ дифференциальных операторов от ∂ с коэффициентами из R . Ее элементами являются k -линейные эндоморфизмы алгебры R вида $\sum_{i=0}^n a_i \partial^i$, $a_i \in R$. Поскольку мы хотим, чтобы равенство дифференциальных операторов из $R[\partial]$ приводило к равенству их коэффициентов, везде

далее будем считать, что имеет место следующее предположение:

$$\text{операторы } \partial^i, i \geq 0, \quad R\text{-линейно независимы в } R[\partial]. \quad (1)$$

Благодаря этому предположению алгебру дифференциальных операторов $R[\partial]$ можно расширить до алгебры псевдодифференциальных операторов, добавив обратные элементы всех степеней оператора ∂ и допустив существование бесконечных сумм этих отрицательных степеней. Таким образом, получаем множество $Psd = R[\partial, \partial^{-1}]$ всех формальных степенных рядов вида

$$p = \sum_{j=-\infty}^N p_j \partial^j, \quad p_j \in R.$$

Введя для каждого $n \in \mathbb{Z}$ обозначение

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!},$$

можно показать, что произведение двух рядов $a = \sum_j a_j \partial^j$ и $b = \sum_i b_i \partial^i$ определяется формулой, которая напоминает соответствующее соотношение в $R[\partial]$ и имеет вид

$$ab := \sum_j \sum_i \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j}{s} a_j \partial^s (b_i) \partial^{i+j-s}.$$

Таким образом, множество Psd приобретает структуру ассоциативной алгебры. На этой алгебре определен морфизм антиалгебры, называемый *операцией сопряжения*. Элемент, сопряженный к $P = \sum p_i \partial^i$, задается формулой

$$P^* = \sum_i (-\partial)^i p_i = \sum_i (-1)^i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} \partial^k (p_i) \partial^{i-k} = \sum_{\ell} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\ell+k} \binom{\ell+k}{k} \partial^k (p_{\ell+k}) \right\} \partial^{\ell}.$$

Внутри алгебры Psd будем использовать различные разложения. Пусть $s \in \mathbb{Z}$. Любой псевдодифференциальный оператор $P = \sum_j p_j \partial^j \in Psd$ может быть представлен как сумма:

$$P = P_{>s} + P_{\leq s}, \quad \text{где } P_{>s} = \sum_{j>s} p_j \partial^j, \quad P_{\leq s} = \sum_{j \leq s} p_j \partial^j. \quad (2)$$

Для $s = 0$ это соответствует записи оператора P в виде суммы его чисто дифференциальной части $P_{>0}$ и интегральной части $P_{\leq 0}$. Такое разбиение лежит в основе строгой иерархии КП.

Аналогично можно получить

$$P = P_{\geq s} + P_{<s}, \quad \text{где } P_{\geq s} = \sum_{j \geq s} p_j \partial^j, \quad P_{<s} = \sum_{j < s} p_j \partial^j. \quad (3)$$

При $s = 0$ это означает, в частности, разбиение оператора P на его дифференциальную часть $P_{\geq 0}$ и строго интегральную часть $P_{<0}$. Такое разбиение псевдодифференциальных операторов приводит к иерархии КП.

Как и любая ассоциативная k -алгебра, Psd является алгеброй Ли над полем k относительно коммутатора. Из правил умножения в Psd следует, что при $s = 0$ два разложения (2) и (3) определяют два способа разложения алгебры Ли Psd в прямую сумму двух подалгебр Ли: мы имеем, во-первых,

$$Psd = \{P \in Psd \mid P = P_{\leq 0}\} \oplus \{P \in Psd \mid P = P_{> 0}\} := Psd_{\leq 0} \oplus Psd_{> 0}$$

и, во-вторых,

$$Psd = \{P \in Psd \mid P = P_{< 0}\} \oplus \{P \in Psd \mid P = P_{\geq 0}\} := Psd_{< 0} \oplus Psd_{\geq 0}.$$

Через $\pi_{\geq 0}$ обозначим проекцию алгебры Psd на $Psd_{\geq 0}$, которая заключается в нахождении дифференциальной части элемента из Psd . Аналогично определим проекции алгебры Psd на $Psd_{\leq 0}$, $Psd_{> 0}$ и $Psd_{< 0}$, которые будем обозначать как $\pi_{\leq 0}$, $\pi_{> 0}$ и $\pi_{< 0}$ соответственно.

Подалгебре Ли $Psd_{\leq 0}$ можно сопоставить группу

$$D(0) = \left\{ p_0 + \sum_{j < 0} p_j \partial^j \mid p_0 \in R^* \right\}.$$

Расширение группы $D(0)$, а именно $\Delta(0) := \{\partial^m \mid m \in \mathbb{Z}\}D(0)$, будет играть важную роль в линеаризации строгой иерархии КП.

Рассмотрим теперь в алгебре Psd возмущение M базисного дифференцирования ∂ вида

$$M = \partial + \sum_{j=0}^{\infty} m_{j+1} \partial^{-j}. \quad (4)$$

Элементы M такого вида являются прообразами деформации оператора ∂ , которая получается при сопряжении или *одевании* элементом из $D(0)$ или из $\Delta(0)$.

Далее нас будут интересовать деформации $\{M^m \mid m \geq 1\}$ множества $\{\partial^m \mid m \geq 1\}$, эволюция которых задается уравнениями Лакса, форму которых, в свою очередь, определяют проекции $\pi_{\leq 0}$. А именно, предположим, что k -алгебра R наделена множеством $\{\partial_r \mid r \geq 1\}$ k -линейных операций дифференцирования, коммутирующих с ∂ и задающих инфинитезимальные образующие различных потоков эволюции. Каждый M^m должен удовлетворять уравнениям Лакса

$$\partial_r(M^m) = [M^m, \pi_{\leq 0}(M^r)] = [\pi_{> 0}(M^r), M^m] = [C_r, M^m] \quad \text{для всех } r \geq 1, \quad (5)$$

где C_r – краткое обозначение для $(M^r)_{> 0}$. Поскольку и ∂_r , и взятие коммутатора с C_r являются операциями дифференцирования в Psd , достаточно найти такой оператор M , что

$$\partial_r(M) = [C_r, M] = [M, \pi_{\leq 0}(M^r)]. \quad (6)$$

Уравнения (6) для оператора M вида (4) в алгебре Psd называются *уравнениями Лакса строгой иерархии КП*, а оператор M называется *решением* иерархии. Набор $(R, \partial, \{\partial_r \mid r \geq 1\})$ называют *реализацией* этой нелинейной системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Любая реализация строгой иерархии КП допускает *тривиальное решение* $M = \partial$. Так как $C_1 = \partial$ для любого M , при $r = 1$ уравнение Лакса

принимает вид $\partial_1(M) = \partial(M)$. Более того, в работе [5] было показано, что все операторы ∂_r , $r \geq 1$, коммутируют на k -подалгебре R , порожденной коэффициентами решения M и всех его производных относительно ∂ . Поэтому часто предполагают, что $\partial = \partial_1$, а также допускают, что все ∂_r , $r \geq 1$, коммутируют между собой. Такую реализацию $(R, \partial_1, \{\partial_r\})$ мы называем *стандартной* и используем для нее упрощенное обозначение $(R, \{\partial_r\})$. Мы также всегда полагаем $\partial = \partial_1$ для базисной реализации строгой иерархии КП, состоящей из алгебры R формальных степенных рядов $k[[s_r, r \geq 1]]$ и дифференцирований $\{\partial_r = \partial/\partial s_r \mid r \geq 1\}$.

В работе [5] было показано, что система уравнений (6) *совместна*, т. е. чисто дифференциальные операторы $\{C_r\}$ в Psd , соответствующие решению M строгой иерархии КП, удовлетворяют уравнениям

$$\partial_{r_1}(C_{r_2}) - \partial_{r_2}(C_{r_1}) - [C_{r_1}, C_{r_2}] = 0. \quad (7)$$

Эти уравнения называются *отношениями нулевой кривизны* для строгих отсечений $\{C_r\}$ решения M строгой иерархии КП. Отношения нулевой кривизны для строгих отсечений $\{C_r\}$ являются также достаточными для получения уравнений Лакса для M (см. статью [5]), а именно имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть R – k -алгебра с преимущественным k -линейным дифференцированием ∂ и пусть M – некоторый элемент алгебры Psd вида (4). Предположим, что R надлена множеством k -линейных дифференцирований $\{\partial_r \mid r \geq 1\}$, каждое из которых коммутирует с ∂ . Тогда M удовлетворяет уравнениям Лакса строгой иерархии КП в том и только в том случае, когда для $\{C_r \mid r \geq 1\}$ выполнены отношения нулевой кривизны (7).

Отметим, что решению M строгой иерархии КП можно сопоставить еще одно множество псевдодифференциальных операторов, удовлетворяющих отношениям нулевой кривизны. Действительно, если для каждого $r \geq 1$ положить $D_r := -(M^r)_{\leq 0}$, то согласно работе [6] операторы семейства $\{D_r\}$ будут удовлетворять уравнениям

$$\partial_{r_1}(D_{r_2}) - \partial_{r_2}(D_{r_1}) - [D_{r_1}, D_{r_2}] = 0. \quad (8)$$

Обратное будет выполнено при более слабых предположениях [6].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть M – потенциальное решение строгой иерархии КП относительно реализации $(R, \partial, \{\partial_i\})$. Если $\partial_1 = \partial$, то M является решением строгой иерархии КП тогда и только тогда, когда операторы семейства $\{D_r\}$ удовлетворяют отношениям нулевой кривизны (8).

Отношения нулевой кривизны (8) указывают на существование системы, для которой они являются условиями совместности. Пусть $(R, \{\partial_i\})$ – стандартная реализация. Так как все операторы D_r имеют максимум нулевой порядок относительно ∂ , имеет смысл рассмотреть следующую задачу: найти в $D(0)$ такой оператор K , что

$$\partial_r(K) = D_r K \quad \text{для всех } r \geq 1. \quad (9)$$

Можно проверить, что условия совместности уравнений этой системы, т. е. соотношения

$$\partial_{r_1}\partial_{r_2}(K) = \partial_{r_2}\partial_{r_1}(K) \quad \text{для всех } r_1, r_2 \geq 1,$$

эквивалентны уравнениям (8). В ситуации, когда условия из работы [6] для решения (9) сложно проверить в некоторой реализации $(R, \{\partial_i\})$, можно попытаться использовать другой подход, связанный с Psd -модулями, который будет описан в следующем разделе.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ЕЕ ДУАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Мы начнем с реализации $(R, \partial, \{\partial_r\})$ для строгой иерархии КП и ее потенциального решения $M \in Psd$, т. е. элемента алгебры Psd вида (4). Цель этого раздела – описать два Psd -модуля: в первом из них нас будут интересовать определенные собственные функции оператора M , а во втором мы будем искать подходящие собственные функции оператора M^* . И в том, и в другом случае мы предъявим набор уравнений для этих собственных функций, из которых будет следовать, что M получается процедурой одевания дифференцирования ∂ элементом из $D(0)$ и удовлетворяет уравнениям Лакса для строгой иерархии КП. Более того, мы покажем, как эти собственные функции связаны между собой.

Прежде чем определить вид элементов первого модуля и Psd -действие, мы обратимся к уравнениям, которым должна удовлетворять собственная функция w оператора M , и выясним, как получить из них уравнения Лакса. Система, которую мы имеем в виду, следующая:

$$Mw = zw, \quad \partial_r(w) = C_r w \text{ для всех } r \geq 1. \quad (10)$$

Эта система называется *линеаризацией строгой иерархии КП*. Применим дифференцирование ∂_r к первому уравнению в (10). Допуская, что действие ∂_r на $M\phi$ подчиняется правилу Лейбница, учитывая тот факт, что z есть скаляр по отношению к $R[\partial]$ -действию и ∂_r -действию, и используя второе уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \partial_r(Mw - zw) &= \partial_r(M)w + M\partial_r(w) - z\partial_r(w) = \\ &= \partial_r(M)w + MC_r w - C_r(zw) = (\partial_r(M) - [C_r, M])w = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Если в этом соотношении можно “отбросить” функцию w , то M удовлетворяет уравнениям Лакса строгой иерархии КП.

Таким образом, чтобы использовать уравнения (10), нам необходимо найти левое действие таких операторов, как M и C_r . Чтобы добиться этого, мы построим подходящий $R[\partial, \partial^{-1}]$ -модуль, и вид элементов этого модуля нам подскажет решение (10) для тривиального $M = \partial$. В этом случае для всех $r \geq 1$ имеем $C_r = \partial^r = M^r$, и уравнения (10) принимают вид

$$Mw = zw, \quad \partial_r(w) = M^r w = z^r w \text{ для всех } r \geq 1.$$

Можно заметить, что приближение первого порядка потока, отвечающего ∂_r , есть умножение на z^r . Пусть s_r – параметр для потока, отвечающего ∂_r , так что ∂_r действует как взятие частной производной $\partial/\partial s_r$ по s_r . Тогда уравнения линеаризации можно формально проинтегрировать.

Итак, рассмотрим формальный ряд

$$w_0 = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} s_r z^r\right). \quad (12)$$

Вместе с определенной выше операцией ∂_r он удовлетворяет уравнениям линеаризации для тривиального решения строгой иерархии КП. Пространством, в котором имеет смысл рассматривать уравнения (10), является пространство $\mathcal{O}$ так называемых *осциллирующих функций*; его можно понимать как семейство возмущений тривиального решения w_0 . Оно определяется следующим образом:

$$\mathcal{O} = \left\{ \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} s_r z^r \right) = \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 \mid a_j \in R \text{ для всех } j \right\}.$$

Если $a_\ell \neq 0$, то ℓ называется *степенью* элемента $(\sum_{j=-\infty}^{\ell} a_j z^j) w_0$ в $\mathcal{O}$. Следует отметить, что произведение $(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j) w_0$ в элементах пространства $\mathcal{O}$ носит формальный характер. Если мы выразим w_0 через элементарные функции Шура

$$\exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(s) z^n,$$

то это произведение как ряд по z и z^{-1} формально равно

$$\left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} s_r z^r \right) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell-k} p_k \right) z^\ell.$$

Поэтому, чтобы коэффициенты $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell-k} p_k$ были определены при всех $\ell \in \mathbb{Z}$, необходимы соответствующие условия сходимости. Их можно получить, рассматривая произведение в подходящем классе граничных значений (см. работу [5]). А чтобы эти коэффициенты попали в R , можно использовать естественное вложение $k[s_r]$ как k -подалгебры в R и тот факт, что ∂_r являются подходящими продолжениями операций $\partial/\partial s_r$ на $k[s_r]$.

Пространство $\mathcal{O}$ становится $R[\partial]$ -модулем с помощью естественного распространения операций:

$$\begin{aligned} b. \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 &= \left(\sum_{j=-\infty}^N b a_j z^j \right) w_0, \quad b \in R, \\ \partial. \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 &= \left(\sum_{j=-\infty}^N \partial(a_j) z^j + \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+1} \right) w_0. \end{aligned}$$

Отметим, что ∂ действует как обратимое преобразование на $\mathcal{O}$, таким образом, структуру $R[\partial]$ -модуля можно расширить так, чтобы $\mathcal{O}$ стало Psd -модулем.

Предположим также, что каждое дифференцирование ∂_r действует на $\mathcal{O}$ согласно правилу Лейбница

$$\partial_r \left(\left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 \right) = \left(\sum_{j=-\infty}^N \partial_r(a_j) z^j + \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+1} \right) w_0.$$

Это полностью определяет все операторы, действующие в (10). Заметим, что $\mathcal{O}$ является также свободным Psd -модулем с образующим элементом w_0 , поскольку

имеет место равенство

$$\left(\sum_j p_j \partial^j \right) w_0 = \left(\sum_j p_j z^j \right) w_0.$$

Таким образом, если $Qw = 0$ в $\mathcal{O}$, где $Q \in \text{Psd}$, и $w = Pw_0$, где $P \in \text{Psd}$, то можно сделать вывод, что $QP = 0$ и даже $Q = 0$, если P обратим. Это возможно для класса осциллирующих функций. Элемент $w \in \mathcal{O}$ называется *осциллирующей функцией типа $\alpha_\ell z^\ell$* , где α_ℓ обратим в R , если он представим в виде

$$w = w(s, z) = \left(\alpha_\ell z^\ell + \sum_{k < \ell} \alpha_k z^k \right) w_0 = K.w_0, \quad \text{где} \quad K = \sum_{k \leq \ell} \alpha_k \partial^k. \quad (13)$$

Здесь s есть краткое обозначение для $\{s_r \mid r \geq 1\}$.

Далее, осциллирующая функция w типа $\alpha_\ell z^\ell$ называется *волновой функцией* строгой иерархии КП, если найдется такой оператор M , что уравнения (10) выполнены для M и w . Отметим, что в этом случае M будет решением строгой иерархии КП, так как все преобразования, описанные выше, здесь правомерны. Оператор M тогда полностью определяется функцией w . Действительно, если $w = K.w_0$, как в (13), то первое уравнение в (10) может быть записано в виде

$$Mw = MK.w_0 = zw = zK.w_0 = K\partial.w_0,$$

и, следовательно, M получается при одевании дифференцирования ∂ оператором K или $K\partial^{-\ell} \in D(0)$, т. е.

$$M = K\partial K^{-1} = K\partial^{-\ell}\partial\partial^\ell K^{-1}.$$

Для того чтобы получить уравнения (10), на самом деле достаточно доказать более слабое утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть M – оператор первого порядка в Psd вида (4) и w – осциллирующая функция типа $\alpha_\ell z^\ell$, удовлетворяющая уравнению $Mw = zw$. Предположим, что для любого $r \geq 1$ найдется не имеющий постоянного члена дифференциальный оператор $Q_r \in R[\partial]$ такой, что

$$\partial_r(w) = Q_r w.$$

Тогда $Q_r = C_r$ для любого $r \geq 1$. Более того, M является решением строгой иерархии КП, которое можно получить одеванием оператора ∂ подходящим элементом из $D(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K удовлетворяет равенству $w = Kw_0$. Как было показано выше, из уравнения $Mw = zw$ следует, что $M = K\partial K^{-1}$. Согласно определению действия оператора ∂_r на $\mathcal{O}$ имеем, с одной стороны,

$$\partial_r(w) = \{\partial_r(K) + K\partial^r\}.w_0,$$

а с другой стороны, это должно равняться $Q_r K.w_0$. Отсюда получаем тождество

$$\partial_r(K)K^{-1} + K\partial^r K^{-1} = \partial_r(K)K^{-1} + M^r = Q_r.$$

Так как $\partial_r(K)K^{-1}$ имеет только члены с неположительными степенями относительно ∂ , то, сравнивая строго дифференциальные части операторов в разных частях равенства, получаем $M_{>0}^r = (Q_r)_{>0} = Q_r$. Утверждение доказано.

В работе [3] важную роль в описании билинейной формы иерархии КП играла дуальная система уравнений. Здесь мы рассмотрим аналогичную систему для строгой иерархии КП, а также предложим подходящую для нее алгебраическую реализацию. Эта реализация будет состоять из второго *Psd*-модуля $\mathcal{O}^*$, называемого “дуальным” модулю $\mathcal{O}$, поскольку он связан с антиинволюцией сопряжения в *Psd*. Если найти соотношения, сопряженные отношениям нулевой кривизны для $\{C_r\}$, то можно заметить, что операторы $-C_r^*$ также удовлетворяют отношениям нулевой кривизны. Следовательно, подходящей линеаризацией для псевдодифференциальных операторов из этого множества $\{-C_r^*\}$ будет

$$M^* \tilde{w} = z \tilde{w}, \quad \partial_r(\tilde{w}) = -C_r^* \tilde{w} \text{ для всех } r \geq 1. \quad (14)$$

Будем называть эту систему *дуальной линеаризацией* строгой иерархии КП. Из нее также следуют уравнения Лакса для M^* . Рассуждая, как в случае линеаризации (10), применим дифференцирование ∂_r к первому уравнению в (14). Если правило Лейбница справедливо для действия оператора ∂_r на $M^* \tilde{w}$, а z — скаляр относительно $R[\partial]$ -действия и ∂_r -действия, то, учитывая второе уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \partial_r(M^* \tilde{w} - z \tilde{w}) &= \partial_r(M^*) \tilde{w} + M^* \partial_r(\tilde{w}) - z \partial_r(\tilde{w}) = \\ &= \partial_r(M^*) \tilde{w} - M^* C_r^* \tilde{w} + C_r^*(z \tilde{w}) = (\partial_r(M^*) + [C_r^*, M^*]) \tilde{w} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если функцию $\tilde{w}$ можно “отбросить”, то M^* будет удовлетворять уравнениям Лакса

$$\partial_r(M^*) + [C_r^*, M^*] = 0, \quad (16)$$

а если мы возьмем оператор, сопряженный к левой части уравнения (16), то получим уравнения Лакса строгой иерархии КП для M . Таким образом, система (14) дает альтернативный способ нахождения решений M строгой иерархии КП.

Остается указать пространство, которому принадлежит $\tilde{w}$. Это снова возмущение решения, соответствующего тривиальному случаю $M^* = -\partial$. Так как $C_r = \partial^r$, мы имеем $-C_r^* = -(-\partial)^r$ и получаем уравнения

$$M^* \tilde{w} = (-\partial) \tilde{w} = z \tilde{w}, \quad \partial_r(\tilde{w}) = -(-\partial)^r \tilde{w} = -z^r \tilde{w} \text{ для всех } r \geq 1,$$

тривиальным решением которых будет

$$w_0^* = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} -s_r z^r\right). \quad (17)$$

Тогда дуальное пространство $\mathcal{O}^*$ будет состоять из формальных произведений

$$\left\{ \sum_{j \leq N} a_j z^j \right\} e^{-\sum s_r z^r} = \left\{ \sum_{j \leq N} a_j z^j \right\} w_0^*, \text{ где } a_j \in R \text{ для всех } j.$$

Действие кольца $R[\partial]$ на $\mathcal{O}^*$, как можно ожидать, определяется естественным распространением операций:

$$\begin{aligned} b \left\{ \left(\sum_j a_j z^j \right) e^{-\sum s_r z^r} \right\} &= \left(\sum_j b a_j z^j \right) e^{-\sum s_r z^r}, \\ \partial \left\{ \left(\sum_j a_j z^j \right) e^{-\sum s_r z^r} \right\} &= \left(\sum_j \partial(a_j) z^j - \sum_j a_j z^{j+1} \right) e^{-\sum s_r z^r}. \end{aligned}$$

В частности, ∂ действует как обратимое преобразование на $\mathcal{O}^*$, что превращает $\mathcal{O}^*$ в Psd -модуль. Причем $\mathcal{O}^*$ будет свободным Psd -модулем, поскольку

$$\left(\sum p_j (-\partial)^j \right) e^{-\sum s_r z^r} = \left(\sum p_j z^j \right) e^{-\sum s_r z^r}.$$

Действие дифференцирования ∂_r на $\mathcal{O}^*$ определяется аналогично действию оператора ∂ соотношением

$$\partial_r \left(\left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0^* \right) = \left(\sum_{j=-\infty}^N \partial_r(a_j) z^j - \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+r} \right) w_0^*,$$

которое гарантирует для ∂_r выполнение правила Лейбница.

Пусть $\beta_\ell \in R^*$. Элемент $\tilde{w} \in \mathcal{O}^*$ будем называть *дуальной осциллирующей функцией типа $\beta_\ell z^\ell$* , если он представим в виде

$$\tilde{w} = \left\{ \beta_\ell z^\ell + \sum_{k < \ell} \beta_k z^k \right\} w_0^* = \tilde{K} \cdot w_0^*, \quad \text{где} \quad \tilde{K} = \sum_{k \leq \ell} \beta_k (-\partial)^k. \quad (18)$$

Отметим, что если $\tilde{w} = \tilde{K} \cdot w_0^* \in \mathcal{O}^*$ – дуальная осциллирующая функция типа $\beta_\ell z^\ell$, то $\tilde{w}^* = (K^{-1})^* \cdot w_0 \in \mathcal{O}$ есть осциллирующая функция типа $\beta_\ell^{-1} z^{-\ell}$. Элемент $\tilde{w}^*$ называется *сопряженным к $\tilde{w}$* , и наоборот, $\tilde{w}$ называется *сопряженным к $\tilde{w}^*$* . В основе этой двойственности лежит автоморфизм второго порядка $\Delta(0)$, действующий как $K \rightarrow (K^{-1})^*$.

Дуальная осциллирующая функция w^* типа $\beta_\ell z^\ell$ называется *дуальной волновой функцией* строгой иерархии КП, если существует такой оператор M , что уравнения (14) выполнены для M^* и w^* . В этом случае M есть решение строгой иерархии КП, так как все проделанные выше манипуляции для перехода от уравнений (14) к уравнениям Лакса (16) правомерны. Оператор M тогда полностью определяется функцией w^* . Действительно, если $w^* = \tilde{K} \cdot w_0^*$, как в (18), то первое уравнение в (14) можно записать в виде

$$M^* w^* = M^* \tilde{K} \cdot w_0^* = z w^* = z \tilde{K} \cdot w_0^* = \tilde{K}(-\partial) \cdot w_0^*,$$

откуда следует, что M получается одеванием оператора ∂ оператором $K = ((\tilde{K})^*)^{-1}$ или оператором $K \partial^\ell \in D(0)$, а именно

$$M = K \partial K^{-1} = K \partial^\ell \partial \partial^{-\ell} K^{-1}.$$

Все вышесказанное мы резюмируем в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть M – оператор из алгебры Psd , полученный одеванием элемента ∂ элементом из $D(0)$. Тогда M есть решение строгой иерархии КП в том и только в том случае, когда в Psd найдется такой оператор K , что M и $w = K \cdot w_0$ удовлетворяют линеаризации строгой иерархии КП или M^* и $w^* = (K^{-1})^* \cdot w_0^*$ удовлетворяют ее дуальной версии (14).

4. БИЛИНЕЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛЯ СТРОГОЙ ИЕРАРХИИ КП

Напомним, следуя [3], что билинейная форма иерархии КП является следствием дифференцирования билинейного тождества

$$\operatorname{Res}_{z=0} w(t, z) w^*(s, z) = 0 \quad (19)$$

для осциллирующей функции w типа z^ℓ и дуальной осциллирующей функции w^* типа $z^{-\ell}$. Здесь t – краткое обозначение для $\{t_r \mid r \geq 1\}$ аналогично обозначению s . Недостаток формулы (19) заключается в том, что она требует условий сходимости, для того чтобы вычет в этой формуле имел смысл. Для решений Сигала–Вильсона это следует в первую очередь из работ [7], [8].

Для строгой иерархии КП мы предлагаем здесь алгебраический подход, инспирированный формулой (19), но не требующий предположений сходимости. Мы начнем с семейства билинейных отношений на $\mathcal{O} \times \mathcal{O}^*$, которые характеризуют дуальную функцию для осциллирующей функции типа $\beta_\ell^{-1} z^\ell$. Затем представим еще два множества билинейных форм на $\mathcal{O} \times \mathcal{O}^*$ для осциллирующей функции типа $\beta_\ell^{-1} z^\ell$ и ее дуальной, которые определяют условия выполнения для них утверждения 3.1.

Рассмотрим билинейные формы между *Psd*-модулями $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$, которые приводят к описанию сопряженного элемента. Пусть спаривание $\mathfrak{B}_1: \mathcal{O} \times \mathcal{O}^* \rightarrow R$ задано следующим образом: если $w = w(s, z) = (\sum_j a_j(s) z^j) e^{\sum s_r z^r}$ принадлежит $\mathcal{O}$, а элемент $\tilde{w} = \tilde{w}(s, z) = (\sum_k b_k(s) z^k) e^{-\sum s_r z^r}$ содержится в $\mathcal{O}^*$, то полагаем

$$\mathfrak{B}_1(w, \tilde{w}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{-k-1}(s) b_k(s);$$

эта сумма, очевидно, является конечной величиной и, следовательно, принадлежит R . Отметим, что $\mathfrak{B}_1$ – это то, что остается в формуле (19) после подстановки $t = s$. С помощью спаривания $\mathfrak{B}_1$ можно охарактеризовать сопряженный элемент осциллирующей функции типа $\beta_\ell^{-1} z^\ell$. Важную роль при этом играет следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Для любых двух элементов $w(s, z) = P(s, \partial) w_0(s, z) \in \mathcal{O}$ и $\tilde{w}(s, z) = Q(s, \partial) w_0^*(s, z) \in \mathcal{O}^*$ выполнено равенство*

$$(P(s, \partial) Q(s, \partial)^*)_{<0} = - \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_1(w(s, z), \partial^n(\tilde{w}(s, z))) (-\partial)^{-n-1}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать (с помощью непосредственных вычислений), что коэффициенты при ∂^{-n-1} в обеих частях равенства (20) равны. Пусть $P = \sum_j a_j \partial^j$ и $Q = \sum_k b_k \partial^k$. Найдем сначала коэффициент $\mathfrak{B}_1(w(s, z), \partial^n(\tilde{w}(s, z)))$. Так как

$$\begin{aligned} \partial^n(\tilde{w}) &= \left\{ \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \sum_k \partial^{n-\ell}(b_k) (-z)^{k+\ell} \right\} w_0^*(s, z) = \\ &= \left\{ \sum_p \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (-1)^p \partial^{n-\ell}(b_{p-\ell}) \right) z^p \right\} w_0^*(s, z), \end{aligned}$$

получаем, что

$$\mathfrak{B}_1(w(s, z), \partial^n(\tilde{w}(s, z))) = \sum_p a_{-p-1} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (-1)^p \partial^{n-\ell}(b_{p-\ell}).$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} PQ^* &= \sum_{j,k} a_j \partial^j (-\partial)^k b_k = \sum_{j,k} (-1)^k a_j \partial^{j+k} b_k = \\ &= \sum_{j,k} (-1)^k a_j \sum_{r=0}^{\infty} \binom{j+k}{r} \partial^r (b_k) \partial^{j+k-r} = \\ &= \sum_s \left\{ \sum_j \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+s}{r} (-1)^{r+s+j} a_j \partial^r (b_{r+s-j}) \right\} \partial^s. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент при ∂^{-n-1} , $n \geq 0$, равен

$$\begin{aligned} &(-1)^{n+1} \sum_j \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r-n-1}{r} (-1)^{r+j} a_j \partial^r (b_{r-j-n-1}) = \\ &= (-1)^{n+1} \sum_j \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^j a_j \partial^r (b_{r-j-n-1}) = \\ &= (-1)^{n+1} \sum_j (-1)^j a_j \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \partial^{n-\ell}(b_{-\ell-j-1}) = \\ &= (-1)^n \sum_p (-1)^p a_{-p-1} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \partial^{n-\ell}(b_{p-\ell}) = \\ &= (-1)^n \mathfrak{B}_1(w(s, z), \partial^n(\tilde{w}(s, z))), \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение.

Применяя утверждение 4.1 к функции $w(s, z)$ и ей сопряженной $w^*(s, z)$, для всех $n \geq 0$ получаем

$$\mathfrak{B}_1(w(s, z), \partial^n(w^*(s, z))) = 0, \quad (21)$$

поскольку в этом случае $PQ^* = 1$. Отметим, что соотношение (21) можно получить из формулы (19), подействовав на нее оператором ∂^n и подставив затем $t = s$.

Билинейные уравнения (21) также характеризуют $w^*(s, z)$ среди дуальных осциллирующих функций типа $\beta_\ell z^{-\ell}$. Так, если $\tilde{w}(s, z) = Q(s, \partial)w_0^*(s, z)$ – дуальная осциллирующая функция, удовлетворяющая соотношению (21), в котором $w^*(s, z)$ заменена на $\tilde{w}(s, z)$, то согласно утверждению 4.1 имеем

$$PQ^* = \partial^0 + (PQ^*)_{<0} = 1.$$

Другими словами, $Q = (P^*)^{-1}$ и $\tilde{w}(s, z) = w^*(s, z)$.

Резюмируем описанную характеристику сопряженного элемента.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Пусть w – осциллирующая функция типа $\beta_\ell^{-1}z^\ell$, а $\tilde{w}$ – дуальная осциллирующая функция типа $\beta_\ell z^{-\ell}$. Тогда $\tilde{w}$ является сопряженным элементом для w в том и только в том случае, когда она удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{B}_1(w(s, z), \partial^n(\tilde{w}(s, z))) = 0 \quad \text{для всех } n \geq 0.$$

Применяя оператор ∂^m , $m \geq 0$, к уравнению (21) при $n = 0$, можно получить более сильное утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция w^* , дуальная осциллирующей функции w типа $\beta_\ell^{-1}z^\ell$, характеризуется следующим свойством: для всех $n \geq 0$ и $m \geq 0$ выполнено равенство

$$\mathfrak{B}_1(\partial^m(w(s, z)), \partial^n(w^*(s, z))) = 0. \quad (22)$$

В следующем наборе билинейных уравнений мы задействует остальные операции дифференцирования ∂_r . А именно, для всех $r \geq 1$ и $n \geq 0$ рассмотрим уравнения

$$\mathfrak{B}_1(\partial_r(w(s, z)), \partial^n(w^*(s, z))) = 0 \quad (23)$$

для осциллирующей функции w типа $\beta_\ell^{-1}z^\ell$ и дуальной ей функции w^* . И снова эти уравнения можно получить как результат дифференцирования формулы (19): достаточно применить к ней операцию $\frac{\partial}{\partial t_r} \partial^n$, а затем подставить $t = s$. Отметим, что для выполнения соотношений (23) также необходимо, чтобы w была волновой функцией строгой иерархии КП. Действительно, в этом случае ∂_r действует на w как дифференциальный оператор из $R[\partial]$, и тогда требуемое равенство следует из уравнений (22).

Выясним, что дают уравнения (23); для этого представим осциллирующую функцию w типа $\beta_\ell^{-1}z^\ell$ как $w = \beta_\ell^{-1}K_\ell w_0$, где $K_\ell = \partial^\ell + \sum_{i < \ell} k_i \partial^i$. Исходя из того как определено действие каждого ∂_r на $\mathcal{O}$, можно сделать вывод, что $\partial_r(w)$ есть осциллирующая функция типа $\beta_\ell^{-1}z^{\ell+r}$. Аналогично, $\partial^k(w)$ является осциллирующей функцией типа $\beta_\ell^{-1}z^{\ell+k}$ для каждого $k \geq 0$. Следовательно, используя пошаговую процедуру вычитания подходящих слагаемых, кратных $\partial^k(w)$, можно найти нормированный дифференциальный оператор $Q_r \in R[\partial]$ порядка r такой, что

$$\partial_r(w) - Q_r(w) = \left(\sum_{j < 0} g_j z^j \right) w_0 = G_r w_0,$$

где $G_r \in Psd_{<0}$. Объединяя билинейные уравнения (22) и (23) и используя тот факт, что спаривание $\mathfrak{B}_1$ является R -линейным по первому аргументу, получаем, что для всех $r \geq 1$ и $n \geq 0$

$$\mathfrak{B}_1(\partial_r(w(s, z)) - Q_r(w(s, z)), \partial^n(w^*(s, z))) = \mathfrak{B}_1(G_r w_0, \partial^n(w^*(s, z))) = 0.$$

Тогда согласно утверждению 4.1 выполнено условие $(G_r K_\ell^{-1} \beta_\ell)_{<0} = 0$, следовательно, $G_r = 0$, поскольку $G_r \in Psd_{<0}$. Таким образом, для всех $r \geq 0$ имеем

$$\partial_r(w(s, z)) - Q_r(w(s, z)) = 0. \quad (24)$$

Так как $w(s, z) = \beta_\ell^{-1} K_\ell w_0$, уравнение (24) сводится к следующему уравнению в Psd :

$$\begin{aligned} Q_r &= -\frac{\partial_r(\beta_\ell)}{\beta_\ell} + \beta_\ell^{-1} \partial_r(K_\ell) K_\ell^{-1} \beta_\ell + \beta_\ell^{-1} K_\ell \partial^r K_\ell^{-1} \beta_\ell = \\ &= -\frac{\partial_r(\beta_\ell)}{\beta_\ell} + \beta_\ell^{-1} \partial_r(K_\ell) K_\ell^{-1} \beta_\ell + M^r. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $L = K_\ell \partial K_\ell^{-1}$. Тогда $M = \beta_\ell^{-1} L \beta_\ell$, и из уравнения (25) следует, что

$$(Q_r)_{<0} = 0 = \beta_\ell^{-1} \partial_r(K_\ell) K_\ell^{-1} \beta_\ell + (M^r)_{<0} = \beta_\ell^{-1} \partial_r(K_\ell) K_\ell^{-1} \beta_\ell + \beta_\ell^{-1} (L^r)_{<0} \beta_\ell.$$

Другими словами, при любом $r \geq 1$ для L выполнено равенство

$$\partial_r(K_\ell) K_\ell^{-1} + (L^r)_{<0} = 0,$$

следовательно, L есть решение иерархии КП.

Отметим, что уравнение (25) означает, что постоянный член Q_r равен

$$-\frac{\partial_r(\beta_\ell)}{\beta_\ell} + \beta_\ell^{-1} (L^r)_{\geq 0}(\beta_\ell).$$

Чтобы избавиться от этого члена, введем в рассмотрение еще одно k -билинейное спаривание $\mathfrak{B}_0: \mathcal{O} \times \mathcal{O}^* \rightarrow R$, которое определим следующим образом: если

$$\begin{aligned} w &= w(s, z) = \left(\sum_j a_j(s) z^j \right) e^{\sum s_r z^r} \in \mathcal{O}, \\ \tilde{w} &= \tilde{w}(s, z) = \left(\sum_k b_k(s) z^k \right) e^{-\sum s_r z^r} \in \mathcal{O}^*, \end{aligned}$$

то полагаем

$$\mathfrak{B}_0(w, \tilde{w}) := \sum_j \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r+j} a_j \partial^r (b_{r-j});$$

это снова конечная сумма, которая будет принадлежать R . Второй набор билинейных уравнений, справедливость которых мы требуем для функции w и ее дуальной, таков:

$$\mathfrak{B}_0(\partial_r(w(s, z)), w^*(s, z)) = 0 \quad \text{для всех } r \geq 1. \quad (26)$$

Так как $\partial_r(w(s, z)) = Q_r w(s, z)$, вычисления коэффициентов PQ^* в доказательстве утверждения 4.1 показывают, что условия (26) означают равенство нулю постоянного члена в $Q_r \beta_\ell^{-1} K_\ell K_\ell^{-1} \beta_\ell = Q_r$. Другими словами, w удовлетворяет утверждению 3.1, и M является решением строгой иерархии КП.

Резюмируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 4.1. *В $\mathcal{O}$ имеют место следующие свойства.*

1. Пусть $w = \beta_\ell^{-1} K_\ell w_0$ – осциллирующая функция типа $\beta_\ell^{-1} z^\ell$ и w^* – ее дуальная. Тогда w является волновой функцией строгой иерархии КП в том и только в том случае, когда w и w^* удовлетворяют билинейным уравнениям (23) и (26).

В частности, $M = \beta_\ell^{-1} K_\ell \partial K_\ell^{-1} \beta_\ell$ есть решение строгой иерархии КП, а β_ℓ удовлетворяет при всех $r \geq 1$ равенству

$$\partial_r(\beta_\ell) = (L^r)_{\geq 0}(\beta_\ell), \quad \text{где} \quad L = K_\ell \partial K_\ell^{-1}.$$

2. Если $w = K_\ell w_0$ – осциллирующая функция типа z^ℓ и w^* – ее дуальная, то w является волновой функцией иерархии КП в том и только в том случае, когда w и w^* удовлетворяют билинейным уравнениям (23). Оператор $L = K_\ell \partial K_\ell^{-1}$ при этом есть решение иерархии КП.

Список литературы

- [1] R. Hirota, “Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations”, *Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications*, Lecture Notes in Mathematics, **515**, ed. R. M. Miura, 1976, 40–68.
- [2] M. Sato, Y. Mori, *RIMS Kokyuroku*, **388** (1980), 183; M. Sato, Y. Sato, *RIMS Kokyuroku*, **414** (1981), 181.
- [3] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory* (Kyoto, Japan, 13–16 May, 1981), eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Sci., Singapore, 1983, 39–119.
- [4] В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993.
- [5] Г. Ф. Хельминк, А. Г. Хельминк, Е. А. Панасенко, *ТМФ*, **174**:1 (2013), 154–176.
- [6] G. F. Helminck, A. G. Helminck, E. A. Panasenko, *J. Geom. Phys.*, **85** (2014), 196–205.
- [7] G. F. Helminck, G. F. Post, *Lett. Math. Phys.*, **16**:4 (1988), 359–364.
- [8] G. Segal, G. Wilson, *Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci.*, **61** (1985), 5–65.