Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Шейнман, Иерархии конечномерных уравнений Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности и полупростые алгебры Ли, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 3, 527–544

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 07:06:52

© 2015 г.

О. К. Шейнман*

ИЕРАРХИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАКСА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Исходя из $\mathbb{Z}$ -градуировок полупростых алгебр Ли и инвариантных полиномов на последних построены иерархии уравнений Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности. Доказана коммутативность соответствующих потоков.

Ключевые слова: алгебры операторов Лакса, уравнения Лакса, иерархии, полупростые алгебры Ли, римановы поверхности.

DOI: 10.4213/tmf8894

1. ВВЕДЕНИЕ

И. М. Кричевером в работе [1] были выведены уравнения Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности, построены в общем виде соответствующие иерархии коммутирующих потоков и доказана их гамильтоновость. Этот подход охватывает ряд интегрируемых систем, включая системы Калоджеро–Мозера и Хитчина для системы корней A_n . Он восходит к работе [2], использует параметры Тюринга и уравнения движения для них.

В работе [3] было показано, что операторы Лакса, введенные в [1], образуют алгебру Ли, обобщающую алгебру петель для $\mathfrak{gl}(n)$, и построены ее аналоги для ортогональной и симплектической алгебр. Большую роль здесь играло задание разложений Лорана операторов Лакса в терминах параметров Тюринга [1], [2], [4] так, чтобы их вид был инвариантен относительно операции коммутирования и их коразмерность в пространстве формальных рядов Лорана со значениями в алгебре $\mathfrak{g}$ была равна $k \dim \mathfrak{g}$, где k – порядок полюса. Было показано, что полученные

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: sheinman@mi.ras.ru

бесконечномерные алгебры Ли, названные нами алгебрами операторов Лакса, обладают почти градуированной структурой и центральными расширениями, аналогичными центральным расширениям алгебр петель. В последующих работах (см. обзор и ссылки в [5]) автор доказал теорему существования и гамильтоновость коммутирующих потоков для операторов Лакса, принадлежащих этим алгебрам Ли. В [6] была построена алгебра операторов Лакса для алгебры Ли типа G_2 , также в терминах параметров Тюринга. Единственность центральных расширений и алгебры операторов Лакса для произвольного числа отмеченных точек на римановой поверхности изучалась в работах [7] и [8] соответственно.

Оставалось неясным, можно ли предложить конструкцию алгебр операторов Лакса в терминах систем корней, пригодную для любых полупростых алгебр Ли (см. постановку задачи в гл. 4 в [5], и в работе [6]). Э. Б. Винберг [9] связал сформулированные выше требования к рядам Лорана операторов Лакса в точках Тюринга с $\mathbb{Z}$ -градуировками соответствующей конечномерной алгебры Ли (см. соотношение (2.1) ниже). На основе этого наблюдения в работе [10] по произвольной полупростой алгебре Ли и $\mathbb{Z}$ -градуировке на ней построена алгебра операторов Лакса, ее почти градуированные структуры и центральные расширения (см. также [11]). Показано, как по $\mathbb{Z}$ -градуировке восстановить параметры Тюринга или их аналогии. Работы [10], [11] открывают возможность изложить теорию уравнений Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности в терминах общей теории полупростых алгебр Ли.

В настоящей работе мы делаем шаг к реализации этой возможности – строим в терминах $\mathbb{Z}$ -градуировок и инвариантных полиномов на алгебрах Ли M -операторы, зависящие от спектрального параметра на римановой поверхности, и доказываем теорему существования семейства коммутирующих потоков, задаваемых уравнениями типа Лакса. В результате мы получаем общее доказательство существования коммутативных иерархий уравнений Лакса со спектральным параметром на римановой поверхности, в отличие от предыдущих работ автора, где рассматривались только классические алгебры Ли, причем каждая отдельно.

В разделе 2 мы приводим основные определения и факты, касающиеся алгебр операторов Лакса [10], и сведения о соответствующих градуировках (большая их часть вынесена в приложение). В разделе 3 мы строим M -операторы и доказываем формулу размерности пространства всех M -операторов (соотношение (3.5) ниже).

Настоящая работа, хотя и в более общем контексте, близко следует программе, определенной статьей [1], в той ее части, которая относится к иерархиям коммутирующих потоков. В разделе 4 мы выводим условие, при котором M -оператор определяет векторное поле на конечномерном подпространстве специального вида алгебры операторов Лакса, обозначаемом ниже как $\mathcal{L}^D$. Наконец, в разделе 5 мы определяем семейство M -операторов, определяющих коммутирующие векторные поля на $\mathcal{L}^D$. Соответствующие коммутирующие потоки на $\mathcal{L}^D$ задаются уравнениями типа Лакса с операторами M из этого семейства. В разделе 6 мы рассматриваем в качестве примера известные эллиптические системы Калоджеро–Мозера для классических систем корней.

2. АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ ЛАКСА

Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ – ее картановская подалгебра, $h \in \mathfrak{h}$ – такой элемент, что $\alpha_i(h) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ ¹⁾ для любого простого корня α_i алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } h)X = pX\}$ и $k = \max\{p \mid \mathfrak{g}_p \neq 0\}$. Тогда $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=-k}^k \mathfrak{g}_i$ задает $\mathbb{Z}$ -градуировку на алгебре $\mathfrak{g}$ (подробнее о градуировках такого вида см. [12], раздел 2, § 3.5). Назовем k глубиной градуировки. Очевидно, $\mathfrak{g}_p = \bigoplus_{\substack{\alpha \in R \\ \alpha(h)=p}} \mathfrak{g}_\alpha$, где R – система корней алгебры $\mathfrak{g}$. Определим также следующую фильтрацию алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\tilde{\mathfrak{g}}_p = \bigoplus_{q=-k}^p \mathfrak{g}_q, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_p \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{p+1}, \quad p \geq -k, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_{-k} = \mathfrak{g}_{-k}, \dots, \tilde{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{g}, \quad \tilde{\mathfrak{g}}_p = \mathfrak{g}, \quad p > k.$$

Пусть Σ – комплексная компактная риманова поверхность с двумя множествами отмеченных точек: Π и Γ , L – мероморфное отображение $\Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$, голоморфное вне отмеченных точек, которое может иметь полюсы произвольного порядка в точках Π и имеет разложения следующего вида в окрестности точек $\gamma \in \Gamma$:

$$L(z) = \sum_{p \geq -k} L_p z^p, \quad L_p \in \tilde{\mathfrak{g}}_p, \quad (2.1)$$

где z – локальная координата в окрестности γ . Градуирующий элемент h может меняться от точки к точке множества Γ , но ниже для простоты мы полагаем его неизменным.

Обозначим линейное пространство всех таких отображений через $\mathcal{L}$. Поскольку соотношение (2.1) сохраняется при коммутировании, $\mathcal{L}$ является алгеброй Ли, которую мы называем *алгеброй операторов Лакса*.

Пусть D – неспециальный дивизор на Σ . Сопоставим ему подпространство

$$\mathcal{L}^D = \left\{ L \in \mathcal{L} \mid (L) + D + k \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \geq 0 \right\},$$

где (L) обозначает дивизор L . Уточним, что под дивизором векторнозначной функции мы понимаем поточечный минимум дивизоров ее компонент. Тогда

$$\dim \mathcal{L}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D - g + 1). \quad (2.2)$$

Действительно, размерность пространства всех функций со значениями в $\mathfrak{g}$, дивизором D вне Γ и полюсами порядка k в точках $\gamma \in \Gamma$ по теореме Римана–Роха в общем положении равна $(\dim \mathfrak{g})(\deg D + k|\Gamma| - g + 1)$. Однако условия (2.1) имеют коразмерность $k(\dim \mathfrak{g})|\Gamma|$, что и приводит к соотношению (2.2). Действительно, ввиду симметричности градуировки имеем $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_i + \dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-i-1} = \dim \mathfrak{g}$, $i = -k, \dots, -1$. Таким образом, суммарная коразмерность условий (2.1) в каждой точке $\gamma \in \Gamma$ равна $k(\dim \mathfrak{g})$, и таких точек $|\Gamma|$.

В работе [10] на основе соотношения (2.2) вводится почти градуированная структура в $\mathcal{L}$. Там же описаны почти градуированные центральные расширения $\mathcal{L}$, они

¹⁾Можно брать здесь $\mathbb{Z}_- \cup \{0\}$, но для всех простых корней одновременно.

аналогичны центральным расширениям алгебры петель. Здесь для нас пространство $\mathcal{L}^D$ важно, поскольку на нем определена иерархия коммутирующих потоков, задаваемых уравнениями типа Лакса.

Рассмотрим в качестве примера некоторые градуировки классических алгебр Ли и алгебры G_2 , соответствующие простым корням (другие примеры см. в [10]). Для простого корня α_i пространство градуировки $\mathfrak{g}_p$ определяется как прямая сумма корневых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, таких что α_i содержится в разложении α по простым корням с кратностью $-p$ (такая градуировка может быть задана элементом $h \in \mathfrak{h}$, таким что $\alpha_i(h) = -1$ и $\alpha_j(h) = 0$ ($j \neq i$)). Заметим, что глубина градуировки по данному простому корню равна кратности вхождения последнего в разложение старшего корня. В настоящем разделе мы рассматриваем только пример, связанный с системой корней A_n . Примеры для систем корней B_n , C_n , D_n и G_2 содержатся в приложении.

Пусть дана система корней A_n . Ей соответствует алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ и диаграмма Дынкина

Рассмотрим на $\mathfrak{g}$ градуировку глубины 1, заданную простым корнем α_1 . Блочная структура градуирующих пространств изображена на рис. 1.

Рис. 1. Случай A_n .

Матрицы, соответствующие подпространству $\mathfrak{g}_{-1} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$, могут быть представлены в виде $\alpha\beta^t$, где вектор α фиксирован и $\alpha^t = (1, 0, \dots, 0)$, вектор $\beta \in \mathbb{C}^n$ произволен. Такая матрица принадлежит алгебре $\mathfrak{sl}(n)$, если $\beta^t\alpha = 0$. Элемент $L_0 \in \mathfrak{g}$ принадлежит подпространству фильтрации $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ тогда и только тогда, когда α – его собственный вектор. Таким образом, мы приходим к следующему разложению оператора Лакса для $\mathfrak{sl}(n)$ в окрестности точки $\gamma \in \Gamma$ [1], [3], [5]:

$$L(z) = \alpha\beta^t z^{-1} + L_0 + \dots,$$

где $\beta^t\alpha = 0$ и $L_0\alpha = \varkappa\alpha$ (для некоторого $\varkappa \in \mathbb{C}$). Множество точек Γ и соответствующих им векторов α называется параметрами Тюринга.

3. M -ОПЕРАТОРЫ

Назовем M -оператором мероморфное отображение $M: \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$, голоморфное вне множеств Π и Γ и такое, что в любой точке $\gamma \in \Gamma$

$$M(z) = \frac{\nu h}{z} + \sum_{i=-k}^{\infty} M_i z^i, \quad (3.1)$$

где $M_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_i$ при $i < 0$, $M_i \in \mathfrak{g}$ при $i \geq 0$, $h \in \mathfrak{h}$ – элемент, задающий градуировку на алгебре $\mathfrak{g}$ в точке γ , и $\nu \in \mathbb{C}$. Совокупность M -операторов обозначим через $\mathcal{M}$. Очевидно, $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ при $\nu = 0$.

Выберем произвольный неотрицательный дивизор

$$D = \sum_{i=1}^N m_i P_i, \quad m_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Вычислим размерность пространства $\mathcal{M}^D = \{M \in \mathcal{M} \mid (M) + D \geq 0\}$. По теореме Римана–Роха с учетом коразмерности разложений M -операторов в точках $\gamma \in \Gamma$ и дополнительного параметра ν в каждой из них имеем

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D + k|\Gamma| - g + 1) - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=-k}^{-1} \operatorname{codim} \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma + |\Gamma|, \quad (3.2)$$

где $\tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma$ – пространства градуировки в точке γ (здесь градуировки при различных γ не предполагаются одинаковыми), $\tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma$ – пространства соответствующей фильтрации. Заменяя в (3.2) $\operatorname{codim} \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma$ на $\dim \mathfrak{g} - \dim \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma$, получаем

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=-k}^{-1} \operatorname{codim} \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=-k}^{-1} (\dim \mathfrak{g} - \dim \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma) = (\dim \mathfrak{g})k|\Gamma| - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=-k}^{-1} \dim \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma.$$

Таким образом, имеем

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D - g + 1) + \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{i=-k}^{-1} \dim \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma + |\Gamma|,$$

и окончательно

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D - g + 1) + \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\sum_{i=-k}^{-1} \dim \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma + 1 \right). \quad (3.3)$$

Предположим теперь, что градуированная структура во всех точках $\gamma \in \Gamma$ одна и та же. Тогда

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D - g + 1) + \left(\sum_{i=-k}^{-1} \dim \tilde{\mathfrak{g}}_i^\gamma + 1 \right) |\Gamma|. \quad (3.4)$$

Подберем $|\Gamma|$ так, что последнее слагаемое равно $(\dim \mathfrak{g})l$, где $l \in \mathbb{Z}_+$. Это всегда можно сделать, причем не единственным способом. Тогда

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D + l - g + 1). \quad (3.5)$$

Ниже мы всегда считаем, что $l - g + 1 \geq 0$. Например, для алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{so}(2n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, G_2 выполняется соотношение

$$\dim \mathfrak{g} - \left(\sum_{i=-k}^{-1} \dim \tilde{\mathfrak{g}}_i + 1 \right) n = 0 \quad (3.6)$$

(см. примеры 1–4 ниже), и мы можем взять $|\Gamma| = ng$, где $n = \text{rank } \mathfrak{g}$. Тогда $l = g$, и мы получаем

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D + 1). \quad (3.7)$$

В таком виде формула размерности $\mathcal{M}^D$ была получена в работе [1].

ПРИМЕР 1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, градуировка глубины 1 задается простым корнем α_1 . Тогда $k = 1$, $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} = n - 1$, $\dim \mathfrak{g} - (\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + 1)n = \dim \mathfrak{g} - n^2 = 0$.

ПРИМЕР 2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$, градуировка глубины 1 задается простым корнем α_1 , $k = 1$, $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} = 2n - 2$, $\dim \mathfrak{g} - (\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + 1)n = \dim \mathfrak{g} - (2n - 1)n = 0$.

ПРИМЕР 3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, градуировка глубины 2 задается простым корнем α_1 , $k = 2$, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2n - 2$, $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} = \dim \mathfrak{g}_{-2} + \dim \mathfrak{g}_{-1} = 2n - 1$, $\dim \mathfrak{g} - (\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-2} + \dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + 1)n = \dim \mathfrak{g} - (2n + 1)n = 0$.

ПРИМЕР 4. $\mathfrak{g} = G_2$, градуировка глубины 2 задается простым корнем α_1 , $k = 2$, $n = 2$, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 4$, $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} = \dim \mathfrak{g}_{-2} + \dim \mathfrak{g}_{-1} = 5$, $\dim \mathfrak{g} - (\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-2} + \dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + 1)n = \dim \mathfrak{g} - 7 \cdot 2 = 0$ ($n = 2$).

Рассмотрим случай $g = 1$. Тогда пример 1 отвечает системе Калоджеро–Мозера для системы корней A_n .

ПРИМЕР 5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, $|\Gamma| = 2n$. Градуировки на алгебре $\mathfrak{g}$ рассматриваются те же, что и в примерах 2, 3 соответственно. Поскольку соотношение (3.6) сохраняет силу, $l = 2$. Мы получаем

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D + 2). \quad (3.8)$$

ПРИМЕР 6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1)$, градуировка глубины 1 задается простым корнем α_1 , $k = 1$, $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} = 2n - 1$, $\dim \mathfrak{g} = n(2n + 1)$. Таким образом, $2 \dim \mathfrak{g} = (\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} + 1)(2n + 1)$, и мы можем взять $|\Gamma| = 2n + 1$, $l = 2$. В этом случае формула размерности также имеет вид (3.8).

Примеры 5 и 6 дают системы Калоджеро–Мозера для систем корней D_n , C_n и B_n .

Заметим, что условие (3.6), а вместе с ним и формула размерности (3.7) не выполняются не только для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1)$, но и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. В последнем случае $k = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = n - 1$, $\dim \mathfrak{g} = n^2 - 1$, в то время как $(\dim \mathfrak{g}_{-1} + 1) \text{rank } \mathfrak{g} = n(n - 1)$.

При $g = 1$ и $|\Gamma| = n$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1)$ имеется альтернатива формуле размерности (3.7), которая в этом случае неверна:

$$\dim \mathcal{M}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D) + \dim \mathfrak{g} - n. \quad (3.9)$$

Эта формула непосредственно вытекает, например, из (3.3).

В дальнейшем мы пользуемся формулой размерности (3.5).

4. М-ОПЕРАТОРЫ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Зададим гладкую зависимость множества Γ от времени, т. е. рассмотрим гладкую кривую $\Gamma(t)$ в $\Sigma \times \cdots \times \Sigma$ (в числе $|\Gamma|$ сомножителей). Поскольку $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ зависят от Γ , мы будем обозначать их $\mathcal{L}_t$ и $\mathcal{M}_t$ в необходимых случаях.

Пусть $L = L(t)$, $M = M(t)$ – две гладкие кривые, такие что $L(t) \in \mathcal{L}_t$ и $M(t) \in \mathcal{M}_t$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{L} = [L, M], \quad (4.1)$$

где $\dot{L} = dL/dt$. Для того чтобы пара L, M была его решением, необходимо, чтобы в каждой точке $\gamma \in \Gamma$ выполнялись соотношения

$$\dot{z} = -\nu, \quad \dot{L}_p = \sum_{i+j=p} [L_i, M_j] + \dot{L}_p = \sum_{i+j=p} [L_i, M_j] + \nu \sum_{s=-k}^p (p+1-s)L_{p+1}^s, \quad p = -k, \dots, 0. \quad (4.2)$$

(здесь L_{p+1}^s – проекция L_{p+1} на $\mathfrak{g}_s$). Чтобы получить их, достаточно сравнить разложения

$$\dot{L} = -kL_{-k}\dot{z}z^{-k-1} + \sum_{p=-k}^{\infty} (\dot{L}_p + (p+1)L_{p+1}\dot{z})z^p \quad (4.3)$$

и

$$[L, M] = kL_{-k}\nu z^{-k-1} + \sum_{p=-k}^{\infty} \left(\sum_{i+j=p} [L_i, M_j] + \nu \sum_{s=-k}^p (p+1-s)L_{p+1}^s - (p+1)L_{p+1}\nu \right) z^p. \quad (4.4)$$

Допуская вольность обозначений, мы пишем здесь $\dot{z}$ вместо $\dot{z}_\gamma$. Если действовать формально точно, надо записывать ряды для L, M по степеням $z - z_\gamma$, где z_γ – координата точки γ , которая тоже предполагается зависящей от t . При дифференцировании такого ряда по t возникает $\dot{z}_\gamma$.

Заметим также, что ввиду условий $M_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_i$, $i < 0$, члены разложений обеих частей уравнения (4.1) степени $i < -k - 1$ обращаются в нуль, т. е. в этих степенях уравнение (4.1) не доставляет новых соотношений.

Пусть $\mathcal{L}^D = \{L \in \mathcal{L} \mid (L) + D \geq 0\}$, $T_L \mathcal{L}^D$ – касательное пространство к $\mathcal{L}^D$ в точке $L \in \mathcal{L}^D$, $M \in \mathcal{M}$. Заметим, что выше не предполагается, что $\dot{L} \in T_L \mathcal{L}^D$. Точно так же мы не можем ничего сказать об $\dot{L}_p$, кроме того, что это элементы $\mathfrak{g}$, поскольку элемент h , задающий градуировку, зависит от t .

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\dot{L}$ и M удовлетворяют соотношениям (4.2) при каждом $\gamma \in \Gamma$. В этом случае $[L, M] \in T_L \mathcal{L}^D$ тогда и только тогда, когда $([L, M]) + D \geq 0$ вне Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. План доказательства таков. Сначала мы строим вспомогательное пространство $\mathcal{T}^D$ и, применяя теорему Римана–Роха, убеждаемся, что $\dim \mathcal{T}^D = \dim T_L \mathcal{L}^D$. Затем мы замечаем, что $T_L \mathcal{L}^D \subseteq \mathcal{T}^D$, следовательно, эти пространства совпадают. И, наконец, показываем, что $[L, M] \in \mathcal{T}^D \Leftrightarrow ([L, M]) + D \geq 0$ вне Γ .

Определим $\mathcal{T}^D$ как пространство мероморфных отображений $T: \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$, голоморфных вне множеств Π и Γ , удовлетворяющих условию

$$(T) + D \geq 0$$

вне Γ и имеющих разложение

$$T = \sum_{i=-k-1}^{\infty} T_i z^i \quad (4.5)$$

при каждом $\gamma \in \Gamma$, где $T_i \in \mathfrak{g}$, $i = -k-1, k, \dots, \infty$,

$$\begin{aligned} T_i &= \dot{L}_i + (i+1)L_{i+1}\dot{z}, & i &= -k, \dots, -1, \\ T_0 &= \dot{L}_0 + L_1\dot{z}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$L_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_i$ фиксированны, $\dot{L}_i \in \mathfrak{g}$ – свободные параметры. Сравнивая правые части (4.3) и (4.6), заключаем, что $T_L \mathcal{L}^D \subseteq \mathcal{T}^D$.

Вычислим размерность пространства $\mathcal{T}^D$. Если мы опустим условия (4.6), то размерность полученного таким образом пространства $\mathcal{T}$ мероморфных функций вычисляется по теореме Римана–Роха: $\dim \mathcal{T} = (\dim \mathfrak{g})(\deg D + (k+1)|\Gamma| - g + 1)$. Условия (4.6) дают $(\dim \mathfrak{g})(k+1)$ соотношений в каждой точке $\gamma \in \Gamma$, т. е. всего $(\dim \mathfrak{g})(k+1)|\Gamma|$ соотношений. Суммарная размерность параметров $\dot{L}_i$, $i = -k, \dots, 0$, также равна $(\dim \mathfrak{g})(k+1)|\Gamma|$, но они удовлетворяют такому же числу соотношений (4.2). Таким образом, подпространство $\mathcal{T}^D$ выделяется в пространстве $\mathcal{T}$ с помощью $(\dim \mathfrak{g})(k+1)|\Gamma|$ эффективных соотношений, следовательно,

$$\dim \mathcal{T}^D = \dim \mathcal{T} - (\dim \mathfrak{g})(k+1)|\Gamma| = (\dim \mathfrak{g})(\deg D - g + 1).$$

Но размерность пространства $T_L \mathcal{L}^D$ такая же, поскольку $\dim T_L \mathcal{L}^D = \dim \mathcal{L}^D$ (это конечномерные пространства), и аналогичный подсчет (см. доказательство теоремы 2.2 в работе [10]) дает $\dim \mathcal{L}^D = (\dim \mathfrak{g})(\deg D - g + 1)$. Таким образом, доказано, что $T_L \mathcal{L}^D = \mathcal{T}^D$.

Сравнивая (4.4) и (4.6), мы видим, что при условиях (4.2) разложение (4.4) удовлетворяет условиям (4.6). Следовательно, для $[L, M] \in \mathcal{T}^D$ необходимо и достаточно $([L, M]) + D \geq 0$ (вне Γ). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соотношения (4.2) выступают здесь аналогом уравнений движения параметров Тюринга [1], [5].

Перейдем к следующему свойству M -операторов.

ЛЕММА 1. Пусть даны два M -оператора M_a и M_b и два касательных векторных поля ∂_a и ∂_b на $\mathcal{L}^D$, заданные равенствами $\partial_a L = [L, M_a]$ и $\partial_b L = [L, M_b]$. Продолжим²⁾ их на $\mathcal{M}^D$, полагая

$$\begin{aligned} \partial_a M_p &= \sum_{i+j=p} [M_i, M_{a,j}] + \nu_a \sum_{s=-k}^p (p+1-s) M_{p+1}^s, \\ \partial_b M_p &= \sum_{i+j=p} [M_i, M_{b,j}] + \nu_b \sum_{s=-k}^p (p+1-s) M_{p+1}^s \quad (p = -k, \dots, 0), \end{aligned} \quad (4.7)$$

²⁾Такое продолжение не единственно.

где M_{p+1}^s – проекция M_{p+1} на $\mathfrak{g}_s$, и

$$\partial_a z = -\nu_a, \quad \partial_b z = -\nu_b, \quad \partial_a h = [h, M_{a,0}], \quad \partial_b h = [h, M_{b,0}], \quad (4.8)$$

где

$$M(z) = \frac{\nu h}{z} + \sum_{i=-k}^{\infty} M_i z^i$$

– разложение в ряд Лорана для $M \in \mathcal{M}^D$ в окрестности $\gamma \in \Gamma$. Тогда

$$\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b] \in \mathcal{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того что $\partial_a L = [L, M_a]$ и $\partial_b L = [L, M_b]$, пары L, M_a и L, M_b удовлетворяют соотношениям (4.2) с заменой $\dot{L}_p$ на $\partial_a L_p$ и $\partial_b L_p$ соответственно и равенства (4.7) действительно являются продолжением этих соотношений. Аналогично обстоит с $\partial_a z, \partial_b z$ в (4.8). Соотношения для h в (4.8) – это дополнительное условие на продолжение векторного поля, которое не следует из предыдущего, поскольку h при z^{-1} возникает только в M -операторах.

Представим ряды Лорана операторов M_a и M_b в окрестности $\gamma \in \Gamma$ в виде

$$M_a = M_a^- + \frac{\nu_a h}{z} + \sum_{i \geq 0} M_{a,i} z^i, \quad M_b = M_b^- + \frac{\nu_b h}{z} + \sum_{i \geq 0} M_{b,i} z^i, \quad (4.9)$$

где

$$M_a^- = \sum_{i=-k}^{-1} M_{a,i} z^i, \quad M_b^- = \sum_{i=-k}^{-1} M_{b,i} z^i.$$

Соотношения (4.7), аналогично соотношениям (4.2), можно записать в виде

$$\partial_a M_b^- = [M_b^-, M_a]^- , \quad \partial_b M_a^- = [M_a^-, M_b]^- , \quad (4.10)$$

где $[\cdot, \cdot]^-$ означает главную часть коммутатора.

Лемма доказывается прямым вычислением главной части выражения $\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b]$ в произвольной точке $\gamma \in \Gamma$. На первом шаге имеем

$$\begin{aligned} \partial_a M_b &= \partial_a \left(M_b^- + \frac{\nu_b h}{z} + \sum_{i \geq 0} M_{b,i} z^i \right) = \\ &= \partial_a M_b^- + \frac{(\partial_a \nu_b) h}{z} + \frac{\nu_b (\partial_a h)}{z} - \frac{\nu_b h (\partial_a z)}{z^2} + O(1), \end{aligned}$$

где $O(1)$ – ряд по неотрицательным степеням с коэффициентами в $\mathfrak{g}$. Во втором с конца слагаемом сделаем замену $\partial_a z = -\nu_a$, а в третьем с конца – $\partial_a h = [M_{a,0}, h]$ (ввиду (4.8)). Следующим шагом заменим $\partial_a M_b^-$ на $[M_b^-, M_a]^- + O(1)$ в силу (4.10). Коммутатор здесь сократится с $[M_a, M_b^-]$ в $[M_a, M_b]$, что видно из (4.9). Заметим, что член $\nu_b h (\partial_a z) z^{-2} = -\nu_a \nu_b h z^{-2}$ симметричен по a и b и сократится с соответствующим членом в $\partial_b M_a$. Итак, обозначая многоточием те члены, которые заведомо сократятся в результате, имеем

$$\partial_a M_b = \frac{(\partial_a \nu_b) h}{z} + \frac{\nu_b (\partial_a h)}{z} + \dots + O(1).$$

Вычисляя аналогично $\partial_b M_a$, получаем

$$\partial_a M_b - \partial_b M_a = [M_b^-, M_a^-] + \frac{(\partial_a \nu_b - \partial_b \nu_a)h}{z} + \frac{\nu_b(\partial_a h) - \nu_a(\partial_b h)}{z} + \dots + O(1). \quad (4.11)$$

Теперь вычислим $[M_a, M_b]$ исходя из (4.9):

$$[M_a, M_b] = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_a[h, M_{b,i}]z^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \nu_b[M_{a,i}, h]z^{i-1} + \dots + O(1). \quad (4.12)$$

Заметим, что в силу (4.8) $\nu_b(\partial_a h)z^{-1}$ в (4.11) сокращается с членом при $i = 0$ второй суммы в (4.12), и аналогично $-\nu_a(\partial_b h)z^{-1}$ сокращается с нулевым членом первой суммы. То, что остается от этих двух сумм в (4.12), есть $O(1)$.

Итак,

$$\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b] = [M_b^-, M_a^-] + \frac{(\partial_a \nu_b - \partial_b \nu_a)h}{z} + O(1).$$

Поскольку при $i < 0$ $M_{a,i} \in \tilde{\mathfrak{g}}_i$ и $M_{b,i} \in \tilde{\mathfrak{g}}_i$, то и $[M_b^-, M_a^-]$ обладает этим свойством, а значит, $\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b] - M$ -оператор. ■

5. ИЕРАРХИИ УРАВНЕНИЙ ЛАКСА

Индексы a, b , введенные в разделе 4, обозначают здесь тройки вида $\{\chi, P \in \Pi, m > -m_P\}$, где χ – инвариантный полином на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, m_P – коэффициент, с которым точка P входит в дивизор D .

ПРИМЕР 7. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ можно взять $\chi(L) = \text{tr } L^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Так же можно поступить и для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$, предполагая, что $p \in 2\mathbb{Z}_+$.

Введем также $l - g + 1$ фиксированных точек $P_j \notin (\Pi \cup \Gamma)$, $j = 1, \dots, l - g + 1$, которые будут служить для нормировки M -операторов (здесь l то же, что и в соотношении (3.5)).

Следующий ниже фрагмент, до конца доказательства леммы 2, инспирирован работой [13]. Препятствием установления эквивалентности результатов, полученных в настоящей работе и в работе [13], является лишь неоднозначность отображения логарифмирования на группе Ли.

Определим *вариацию* $\delta\chi(L) \in \mathfrak{g}$ полинома χ в точке $L \in \mathfrak{g}$ исходя из равенства

$$d\chi(L) = \langle \delta\chi(L), \delta L \rangle, \quad (5.1)$$

где $d\chi$ – дифференциал χ как функции на $\mathfrak{g}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – невырожденная инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Если $L \in \mathcal{L}$, т.е. функция L рассматривается как мероморфная функция на Σ со значениями в $\mathfrak{g}$, то такой же будет и $\delta\chi(L)$. Если эта функция рассматривается как функция локальной координаты w на Σ , то мы пишем $\delta\chi(L(w))$.

ЛЕММА 2. Пусть χ – инвариантный полином на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда

$$[\delta\chi(L), L] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность χ по определению означает, что для любого $g \in \exp \mathfrak{g}$ справедливо равенство

$$\chi((\operatorname{Ad} g)L) = \chi(L).$$

Вычисляя дифференциал обеих частей равенства, ввиду его инвариантности относительно замен переменных, а также ввиду (5.1) имеем

$$\langle \delta\chi((\operatorname{Ad} g)L), \delta((\operatorname{Ad} g)L) \rangle = \langle \delta\chi(L), \delta L \rangle.$$

Согласно равенству $\delta((\operatorname{Ad} g)L) = (\operatorname{Ad} g)\delta L$ и инвариантности билинейной формы (благодаря которой $\operatorname{Ad} g$ является ортогональным оператором)

$$\langle (\operatorname{Ad} g^{-1})\delta\chi((\operatorname{Ad} g)L), \delta L \rangle = \langle \delta\chi(L), \delta L \rangle.$$

Поскольку последнее равенство выполняется для каждого $\delta L \in \mathfrak{g}$ и билинейная форма невырожденна, получаем эквивариантность $\delta\chi(L)$:

$$\delta\chi((\operatorname{Ad} g)L) = (\operatorname{Ad} g)\delta\chi(L). \quad (5.2)$$

Положим здесь $g = e^{tL}$ и продифференцируем полученное равенство при $t = 0$. Так как левая часть равна $\delta\chi(L)$ и не зависит от t , получим утверждение леммы. ■

ЛЕММА 3. Пусть $L \in \mathcal{L}$, $M \in \mathcal{M}$, ξ_M – векторное поле на $\mathcal{L}$, определенное равенством

$$\xi_M L = [L, M],$$

χ – инвариантный полином на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда

$$\xi_M \delta\chi(L) = [\delta\chi(L), M].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (5.2) $g = e^{-tM}$. Дифференцируя обе части полученного равенства при $t = 0$, в точности получим утверждение леммы. ■

ЛЕММА 4. Для каждого $a = \{\chi, P, m\}$ и каждого $L \in \mathcal{L}$ существует единственный M -оператор M_a , имеющий вне множества Γ только один полюс, а именно в точке P , в котором

$$M_a(w) = w^{-m} \delta\chi(L(w)) + O(1), \quad (5.3)$$

где w – локальный параметр в окрестности P , и $M_a(P_j) = 0$, $j = 1, \dots, l - g + 1$. Если $L \in \mathcal{L}^D$, то $([L, M_a]) + D \geq 0$ вне Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дивизор M_a вне Γ состоит из одной точки P и имеет в ней порядок $d = \operatorname{ord}_P w^{-m} \delta\chi(L(w))$. Согласно формуле (3.5) размерность пространства таких операторов равна $(\dim \mathfrak{g})(d + l - g + 1)$. Равенство (5.3) фиксирует $(\dim \mathfrak{g})d$ степеней свободы, и еще $(\dim \mathfrak{g})(l - g + 1)$ соотношений дают условия нормировки. Таким образом, существование и единственность M_a доказаны.

Согласно (5.3) и лемме 2 в окрестности точки P имеем $[L, M_a] = [L, O(1)]$. То же самое верно и в остальных точках множества Π , поскольку M_a там голоморфен. Поэтому $([L, M_a]) \geq (L)$ вне множества Γ . При $(L) + D \geq 0$ имеем $([L, M_a]) + D \geq 0$, что доказывает второе утверждение леммы. ■

Лемма 4 определяет M_a как функцию от L , которую мы обозначим $M_a(L)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Идея о связи M -операторов и дифференциалов инвариантных полиномов является одной из основных в книге [14], где она формулируется в виде $M = \frac{1}{2}r d\phi(L)$, ϕ – инвариантный полином, r – классическая r -матрица.

Назовем точку $P \in \Sigma$ *регулярной* для оператора Лакса L , если $L(P)$ определено и является регулярным элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и *нерегулярной*, если это значение определено, но регулярным не является. Множество нерегулярных точек данного оператора Лакса конечно. Из этого следует, что множество операторов Лакса, для которых множество нерегулярных точек имеет пустое пересечение с множеством Π , открыто.

ТЕОРЕМА 2. *Соотношения*

$$\partial_a L = [L, M_a], \quad (5.4)$$

где $M_a = M_a(L)$, определяют множество коммутирующих векторных полей на открытом подмножестве в $\mathcal{L}^D$, состоящем из операторов Лакса, для которых множество нерегулярных точек имеет пустое пересечение с множеством Π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4 и теореме 1 векторное поле ∂_a является касательным к $\mathcal{L}^D$.

Коммутатор $[\partial_a, \partial_b]$ вычисляется следующим образом:

$$\partial_a \partial_b L = \partial_a [L, M_b] = [\partial_a L, M_b] + [L, \partial_a M_b] = [[L, M_a], M_b] + [L, \partial_a M_b].$$

Таким образом,

$$(\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a) L = [L, \partial_a M_b - \partial_b M_a] + [[L, M_a], M_b] - [[L, M_b], M_a].$$

С помощью тождества Якоби получаем

$$[\partial_a, \partial_b] L = [L, \partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b]].$$

Здесь мы предполагаем, что векторные поля продолжены с $\mathcal{L}^D$ на $\mathcal{M}$, как это сформулировано в лемме 1.

Для коммутативности ∂_a и ∂_b достаточно выполнения равенства $\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b] = 0$. Проверим, что оно действительно выполняется. Сначала покажем, что выражение в левой части голоморфно в любой точке $P \in \Pi$. Предположим сначала, что a и b соответствуют одной и той же точке $P \in \Pi$, т. е. $a = (\chi_a, P, m)$, $b = (\chi_b, P, m')$. Обозначим $M_a - w^{-m} \delta \chi_a(L)$ через M_a^+ , а $M_b - w^{-m'} \delta \chi_b(L)$ через M_b^+ . Тогда ввиду (5.3) M_a^+ и M_b^+ голоморфны в точке P . Имеем $\partial_a M_b = w^{-m'} \partial_a \delta \chi_b(L) + \partial_a M_b^+$. Применяя к последнему лемму 3, получим

$$\partial_a M_b = w^{-m'} [\delta \chi_b(L), M_a] + \partial_a M_b^+ = w^{-m'} [\delta \chi_b(L), w^{-m} \delta \chi_a(L) + M_a^+] + \partial_a M_b^+.$$

По лемме 2 $\delta \chi_a(w)$ и $\delta \chi_b(w)$ коммутируют с $L(w)$ при любом w , где, как и выше, w – локальная координата в окрестности точки P . Однако согласно предположениям теоремы $L(w) \in \mathfrak{g}$ – регулярный элемент при достаточно малых w . Поэтому его централизатор совпадает с содержащей его картановской подалгеброй, а следовательно, он коммутативен. Поэтому получаем

$$[\delta \chi_a(w), \delta \chi_b(w)] = 0. \quad (5.5)$$

Применяя (5.5) к предыдущему соотношению, получаем

$$\partial_a M_b = w^{-m'} [\delta \chi_b(L), M_a^+] + \partial_a M_b^+,$$

и аналогичная формула имеет место для $\partial_b M_a$.

Далее имеем

$$\begin{aligned}[M_a, M_b] &= [M_a^+ + w^{-m}\delta\chi_a(L), M_b^+ + w^{-m'}\delta\chi_b(L)] = \\ &= [M_a^+, M_b^+] + [M_a^+, w^{-m'}\delta\chi_b(L)] + [w^{-m}\delta\chi_a(L), M_b^+].\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b] = \partial_a M_b^+ - \partial_b M_a^+ + [M_a^+, M_b^+].$$

Функция в правой части этого равенства голоморфна в окрестности точки P .

Согласно лемме 1 $\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b]$ является M -оператором. Согласно только что доказанному этот M -оператор имеет нулевой дивизор вне множества Γ . Из (3.5) получаем, что размерность пространства таких M -операторов равна $l - g + 1$. Благодаря тому, что M_a и M_b удовлетворяют нормировочному условию $M_a(P_j) = M_b(P_j) = 0$, $j = 1, \dots, l - g + 1$, наш оператор ему тоже удовлетворяет. Следовательно, $\partial_a M_b - \partial_b M_a + [M_a, M_b] = 0$.

В случае, когда a и b соответствуют различным точкам, доказательство аналогично. ■

СЛЕДСТВИЕ 1. Уравнения Лакса $\dot{L} = [L, M_a]$ задают коммутирующие потоки на $\mathcal{L}^D$.

Действительно, эти уравнения переписываются в виде $\dot{L} = \partial_a L$, где ∂_a – коммутирующие касательные векторные поля на $\mathcal{L}^D$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае классических алгебр Ли (исключая D_n) пространство инвариантных полиномов порождено полиномами вида $\chi_p(L) = \text{tr } L^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, где p четно для ортогональной и симплектической алгебр. Тогда $\delta\chi_p(L) = pL^{p-1}$. Лемма 2 и соотношение (5.5) становятся очевидными, а лемма 3 легко доказывается индукцией по p .

6. СИСТЕМЫ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА

Системы Калоджеро–Мозера являются предметом исследования во множестве работ начиная с основополагающих работ Калоджеро. Теоретико-групповой подход к ним заложен в работе [15]. Представление Лакса со спектральным параметром в случае эллиптического потенциала получено в [16]. С точки зрения теории голоморфных расслоений системы Калоджеро–Мозера и их разновидности рассматривались в ряде работ (см., например, [17], [1]).

Здесь мы рассматриваем в качестве примера развитой выше теории эллиптические системы Калоджеро–Мозера для классических алгебр Ли.

Начнем с примера, рассмотренного в работе [1], – эллиптической системы Калоджеро–Мозера для системы корней A_n . Определим $\mathfrak{gl}(n)$ -значный оператор Лакса, задавая его матричные элементы следующим образом:

$$L_{ij} = f_{ij} \frac{\sigma(z + q_j - q_i)\sigma(z - q_j)\sigma(q_i)}{\sigma(z)\sigma(z - q_i)\sigma(q_i - q_j)\sigma(q_j)}, \quad i \neq j, \quad L_{jj} = p_j, \quad (6.1)$$

где σ – функция Вейерштрасса, $f_{ij} \in \mathbb{C}$ – постоянные. С точностью до постоянных f_{ij} данный вид оператора L определен требованиями, что он эллиптивен и имеет простые полюсы в точках $z = q_i$, $i = 1, \dots, n$, и $z = 0$. Последняя точка является

единственным элементом множества Π . Путем редукции оставшихся калибровочных степеней свободы в работе [1] получено, что $f_{ij}f_{ji} = 1$. Для гамильтониана второго порядка, соответствующего полюсу $z = 0$, мы получаем в согласии с [5], с точностью до нормировки,

$$H = \operatorname{res}_{z=0} z^{-1} \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 - \sum_{i < j} L_{ij} L_{ji} \right).$$

По теореме сложения для функций Вейерштрасса имеем

$$-L_{ij} L_{ji} = \frac{\sigma(z + q_i - q_j) \sigma(z + q_j - q_i)}{\sigma(z)^2 \sigma(q_i - q_j)^2} = \wp(q_i - q_j) - \wp(z),$$

где $\wp$ – функция Вейерштрасса, следовательно,

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + \sum_{i < j} \wp(q_i - q_j).$$

Рассмотрим теперь случаи $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$. Положим $\Gamma = \{\pm q_1, \dots, \pm q_n\}$, $|\Gamma| = 2n$, и воспользуемся результатами примера 5 в разделе 3.

Чтобы получить систему Калоджеро–Мозера, соответствующую серии D_n , возьмем оператор Лакса в виде

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

где A, B, C – матрицы размера $n \times n$, $B = -B^t$, $C = -C^t$. Это стандартная форма элементов алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$.

Пусть A задано соотношениями (6.1). Для $i < j$ положим

$$B_{ij} = f_{ij}^B \frac{\sigma(z + q_j + q_i) \sigma(z - q_j)}{\sigma(z) \sigma(z + q_i) \sigma(q_i + q_j)}, \quad C_{ji} = f_{ji}^C \frac{\sigma(z - q_j - q_i) \sigma(z + q_i)}{\sigma(z) \sigma(z - q_j) \sigma(q_i + q_j)}, \quad (6.3)$$

где $f_{ij}^B, f_{ij}^C \in \mathbb{C}$ – постоянные. Эти соотношения полностью определяют матрицы B и C ввиду кососимметричности последних. Аналогично случаю $\mathfrak{gl}(n)$ мы получаем $f_{ij}^B f_{ji}^C = -1$, редуцируя оставшиеся калибровочные степени свободы. Для гамильтониана мы получаем

$$\begin{aligned} H &= -\operatorname{res}_{z=0} z^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i < j} A_{ij} A_{ji} + 2 \sum_{i < j} B_{ij} C_{ji} \right) = \\ &= -\sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i < j} \wp(q_i - q_j) + 2 \sum_{i < j} \wp(q_i + q_j), \end{aligned}$$

что является известной формой гамильтониана второго порядка эллиптической модели Калоджеро–Мозера для D_n .

Переходя к системе Калоджеро–Мозера для системы корней C_n , возьмем L в виде (6.2), где $B = B^t$, $C = C^t$. Соответствующие матричные элементы A_{ij} определяются правыми частями соотношений (6.1), B_{ij} и C_{ij} определяются соотношениями (6.3). Соотношения (6.3) имеют смысл и для $i = j$, в этом случае их вклад в гамильтониан второго порядка равен

$$B_{ii} C_{ii} = f_{ii}^B f_{ii}^C (\wp(2q_i) - \wp(z)),$$

где мы можем положить $f_{ii}^B f_{ii}^C = 2$. Следовательно,

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i < j} \wp(q_i - q_j) + 2 \sum_{i < j} \wp(q_i + q_j) + 2 \sum_{i=1}^n \wp(2q_i),$$

что является известной формой гамильтониана второго порядка эллиптической системы Калоджеро–Мозера в симплектическом случае.

Наконец, для системы корней B_n возьмем $\Gamma = \{\pm q_1, \dots, \pm q_n, q_0\}$ (см. пример 6 в разделе 3), а оператор Лакса в виде

$$L = \begin{pmatrix} A & a & B \\ -b^t & 0 & -a^t \\ C & b & -A^t \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

где A, B, C – матрицы размера $n \times n$, $B = -B^t$, $C = -C^t$, $a, b \in \mathbb{C}^n$. Это стандартный вид элемента алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n+1)$. Пусть A, B, C заданы, как для системы корней D_n , а a, b задаются с помощью своих координат следующим образом:

$$a_i = f_i^a \frac{\sigma(z - q_0 - q_i)\sigma(z)}{\sigma(z - q_0)\sigma(z - q_i)\sigma(q_i)}, \quad b_i = f_i^b \frac{\sigma(z - q_0 + q_i)\sigma(z - q_i)}{\sigma(z)\sigma(z - q_0)\sigma(q_i)}. \quad (6.5)$$

По формулам сложения $a_i b_i = f_i^a f_i^b (\wp(q_i) - \wp(z - q_0))$. Для гамильтониана имеем

$$\begin{aligned} H &= -\operatorname{res}_{z=0} z^{-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i < j} A_{ij} A_{ji} + 2 \sum_{i < j} B_{ij} C_{ji} + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) = \\ &= - \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i < j} \wp(q_i - q_j) + 2 \sum_{i < j} \wp(q_i + q_j) + 2 \sum_{i=1}^n (\wp(q_i) - \wp(q_0)). \end{aligned}$$

Заметим, что $p_0 = 0$, поэтому $q_0 = \text{const}$ задает инвариантное подмногообразие иерархии коммутирующих потоков (в лаксовой форме уравнений движения соответствующим фактом является соотношение $\nu_0 = 0$, вытекающее из того, что M – элемент $\mathfrak{so}(2n+1)$). Ограничивая систему на это инвариантное подмногообразие и опуская $\wp(q_0)$ как несущественную константу, получаем известный вид гамильтониана второго порядка эллиптической системы Калоджеро–Мозера B_n .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление операторов Лакса через параметры Тюринга

П.1. Система корней D_n , $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$. Диаграмма Дынкина имеет вид

Здесь и ниже α с индексами обозначает простые корни, α без индекса – параметры Тюринга.

Градуировка глубины 1 задается простым корнем α_1 . Блочная структура подпространств градуировки, соответствующая представлению $\mathfrak{so}(2n)$ как алгебры Ли

Рис. 3. Случай C_n . Рис. 4. Случай B_n .

Подпространство $\mathfrak{g}_{-1}$ состоит из матриц вида $(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\sigma$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{2n+1}$, $\alpha^t = (1, 0, \dots, 0)$, и $\beta^t\sigma\alpha = 0$ (заметим, что, кроме того, $\alpha^t\sigma\alpha = 0$). Снова α является собственным вектором элементов из $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ (т. е. $L_0\alpha = \varkappa\alpha$, где $\varkappa \in \mathbb{C}$). Таким образом, мы получаем следующий вид разложения L в γ -точке:

$$L(z) = (\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\sigma z^{-1} + L_0 + \dots,$$

где α, β, L_0 удовлетворяют перечисленным выше соотношениям [3], [5].

П.4. Система корней G_2 . Диаграмма Дынкина имеет вид

Алгебра Ли G_2 имеет точное семимерное представление матрицами, вид которых представлен на рис. 5б, где зависимые блоки имеют один и тот же цвет (светло-серый, темно-серый или белый). Через $[x]$ (где $x \in \mathbb{C}^3$, $x^T = (x_1, x_2, x_3)$) мы обозначаем кососимметрическую матрицу $[x] = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Градуировка глубины 2 задается простым корнем α_2 . Блочная структура пространств градуировки представлена на рис. 5а.

Рис. 5. Случай G_2 , глубина 2.

Благодарности. Автор благодарит И. М. Кричевера и А. В. Михайлова за обсуждение работы.

Список литературы

- [1] I. M. Krichever, *Commun. Math. Phys.*, **229**:2 (2002), 229–269.
- [2] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 47–68.
- [3] И. М. Кричевер, О. К. Шейнман, *Функц. анализ и его прилож.*, **41**:4 (2007), 46–59, [arXiv:math.RT/0701648](#).
- [4] А. Н. Тюрин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:3 (1965), 657–688.
- [5] О. К. Sheinman, *Current algebras on Riemann surfaces*, De Gruyter Expositions in Mathematics, **58**, Walter de Gruyter, Berlin, Boston, 2012.
- [6] О. К. Шейнман, *Докл. РАН*, **455**:1 (2014), 23–25, [arXiv:1304.2510](#).
- [7] М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман, *УМН*, **63**:4(382) (2008), 131–172, [arXiv:0711.4688](#).
- [8] М. Шлихенмайер, *Матем. сб.*, **205**:5 (2014), 117–160, [arXiv:1304.3902](#).
- [9] Э. Б. Винберг, частное сообщение, 2014.
- [10] О. К. Sheinman, “Lax operator algebras and gradings on semi-simple Lie algebras”, *Transformation Groups*, 2015, 16 pp., DOI: 10.1007/s00031-015-9340-y; [arXiv:1406.5017](#).
- [11] О. К. Шейнман, *Докл. РАН*, **461**:2 (2015), 143–145.
- [12] Э. Б. Винберг, В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, “Строение групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **41**, ВИНТИ, М., 1990, 5–258.
- [13] W. M. Goldman, *Invent. Math.*, **85**:2 (1986), 263–302.
- [14] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход*, ИКИ, М., Ижевск, 2003.
- [15] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **71**:5 (1981), 313–400.
- [16] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прилож.*, **14**:4 (1980), 45–54.
- [17] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Smirnov, A. Zotov, *Characteristic classes and integrable systems for simple Lie groups*, [arXiv:1007.4127](#).

Поступила в редакцию 19.02.2015