Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Зинн-Жюстен, Колчаные переменные и квантовые уравнения Книжника–Замолодчикова, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 3, 438–459

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8895>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:33:00

© 2015 г.

П. Зинн-Жюстен^{*†}

КОЛЧАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

Показано, как эквивариантные объемы тензорных произведений колчаных переменных типа A задаются матричными элементами вершинных операторов центрально расширенных янгианских дублей и как эти элементы удовлетворяют в некоторых случаях рациональному квантовому уравнению Книжника–Замолдчикова уровня один.

Ключевые слова: колчаные переменные, квантовое уравнение Книжника–Замолдчикова, квантовые интегрируемые системы, эквивариантная когомология.

DOI: 10.4213/tmf8895

1. ВВЕДЕНИЕ

Становится все более понятно, что существует глубинная связь между теориями обобщенных когомологий и интегрируемыми системами, на что было впервые указано в работе [1]. Простейшим примером такой связи является тот факт, что рациональные квантовые интегрируемые системы должны быть связаны с (эквивариантными) когомологиями. Эта связь несколько случайно была отмечена в работах [2], [3] при исследовании определенных решений квантового уравнения Книжника–Замолдчикова. Одна из целей настоящей работы состоит в том, чтобы попытаться продемонстрировать это соответствие на примерах последних исследований, в частности на примере из работы [4], в которой был задан естественный формат для данного соответствия. Основной составляющей в определении квантовой интегрируемой системы является решение уравнения Янга–Бакстера – так называемая R -матрица, лежащая в основе этой системы. И в самом деле, в работе [4] содержится “рецепт” вычисления R -матрицы в терминах некоторых алгебро-геометрических данных. В обратную сторону, в работах [2], [3] на основе определенной квантовой интегрируемой системы алгебраические переменные вводились

Работа поддержана грантами ERC 278124 LIC и грантом ARC DP140102201.

^{*}Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, CNRS UMR, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Paris, France. E-mail: pzinn@lpthe.jussieu.fr

[†]Department of Mathematics and Statistics, The University of Melbourne, Victoria, Australia

таким образом, что в рамках указанной интегрируемой модели можно было проводить вычисления в эквивариантных когомологиях этих переменных. Эти два подхода тесно связаны между собой: среди уравнений, задающих квантовое уравнение Книжника–Замолотчикова, можно обнаружить так называемое обменное соотношение, которое оказывается прямым следствием определения R -матрицы, приведенного в работе [4].

В настоящей работе исследования, проведенные в статьях [3], [5], обобщаются на случай произвольных колчаных переменных Накаджимы типа A . В разделе 2 дается определение этих колчаных переменных и приводится явное описание (имеющее место только в случае переменных типа A), которое оказывается особенно удобным при явных вычислениях. В разделе 3 сначала обсуждается обменное соотношение и определение R -матрицы, а затем вводится главное техническое средство исследования – вершинные операторы для центрально расширенного янгианного дубля. Далее демонстрируется, что эквивариантные объемы тензорных произведений колчаных переменных совпадают с матричными элементами этих вершинных операторов, и делается заключение, что в некоторых случаях эти объемы удовлетворяют квантовому уравнению Книжника–Замолотчикова. Так как описание в настоящей работе несколько лапидарно, в приложении приводится детально разобранный пример конструкции.

Не предполагается, что эта работа представляет собой совершенно строго написанный математический текст; некоторые доказательства даются в набросках или опускаются; вместо этого автор пытается сконцентрироваться на основных идеях в ущерб техническим деталям.

2. КОЛЧАННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Определим вкратце необходимые геометрические объекты; детали можно найти в обширной литературе, посвященной этому предмету. В частности, читатель может обратиться к работам Накаджимы [6]–[9], к лекциям [10] и к ссылкам в этих работах.

2.1. Определение. Пусть даны две последовательности конечномерных векторных пространств V_a и W_a , имеющих размерности $v = (v_a)$ и $w = (w_a)$, где $a = 1, \dots, k-1$. Определим соответствующие колчаные переменные Накаджимы типа A_{k-1} как факторпространства линейных отображений $(B_{a,a+1}, B_{a+1,a}, i_a, j_a)$ в

$$\bigoplus_{a=1}^{k-2} (\text{Hom}(V_a, V_{a+1}) \oplus \text{Hom}(V_{a+1}, V_a)) \oplus \bigoplus_{a=1}^{k-1} (\text{Hom}(W_a, V_a) \oplus \text{Hom}(V_a, W_a)),$$

удовлетворяющие условиям отображений моментов $\mu = 0$, где

$$\mu = (B_{a,a-1}B_{a-1,a} - B_{a,a+1}B_{a+1,a} + i_a j_a)_{a=1, \dots, k-1}$$

(условимся обозначать индексом $k = 0$, что соответствующий член отсутствует), при естественном действии в $G_v = \prod_{a=1}^{k-1} GL(V_a)$, а именно

$$(g_a) \in G_v : (B_{a,a+1}, B_{a+1,a}, i_a, j_a) \mapsto (g_{a+1}B_{a,a+1}g_a^{-1}, g_aB_{a+1,a}g_{a+1}^{-1}, g_a i_a, j_a g_a^{-1}).$$

Получим алгебро-геометрический фактор, рассмотрев подкольцо G_v -инвариантных функций

$$\mathfrak{M}_0(v, w) = \mu^{-1}(0) // G_v,$$

где $\mathfrak{M}(v, w)$ – аффинное сингулярное множество переменных. В большинстве случаев множество $\mathfrak{M}_0(v, w)$ оказывается достаточным для целей изложения в настоящей работе, но в одном случае будет необходимо рассмотреть фактор GIT (geometric invariant theory, геометрическая теория инвариантов)

$$\mathfrak{M}(v, w) = \mu^{-1}(0) //_{\theta} G_v,$$

где θ – некоторый подходящий характер (см., например, работы [8], [10]), а $\mathfrak{M}(v, w)$ представляет собой гладкое квазипроективное многообразие. Если это не будет вызывать недоразумений, будем писать просто $\mathfrak{M}_0$ вместо $\mathfrak{M}_0(v, w)$ и т. д.

2.2. Комбинаторные данные. Свяжем с w и v веса алгебры $SL(k)$

$$\mu = \sum_{a=1}^{k-1} w_a \omega_a, \quad \lambda = \sum_{a=1}^{k-1} w_a \omega_a - \sum_{a=1}^{k-1} v_a \alpha_a,$$

где ω_a – фундаментальные веса алгебры $SL(k)$, а α_a – ее простые корни. В дальнейшем будем предполагать, что λ – вес неприводимого представления алгебры $SL(k)$ со старшим весом μ . Нам также потребуется поднять μ и λ на веса алгебры $GL(k)$. Это поднятие неединственно, но имеется очевидный вариант поднятия, при котором k -й вес μ остается нулевым¹⁾. Получающиеся при этом веса алгебры $GL(k)$ удобно описать в виде клеточных массивов, как видно на следующем примере:

$$w = (2, 1, 3) \rightarrow \mu = 2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} + 3 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array},$$

$$v = (1, 0, 1) \rightarrow \lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Более того, для простоты будем предполагать в дальнейшем, что вес λ доминантен²⁾. Естественный морфизм $p: \mathfrak{M}(v, w) \rightarrow \mathfrak{M}_0(v, w)$ оказывается при этом сюръекцией, обеспечивающей разрешение сингулярностей множества $\mathfrak{M}_0(v, w)$.

2.3. Поперечный срез замыканий нильпотентных орбит. Существует несколько альтернативных описаний множества $\mathfrak{M}_0$ в терминах поперечных срезов замыканий нильпотентных орбит. Одно из них особенно хорошо подходит для наших целей – это срез Мирковича–Выборнова [11].

Введем обозначения $N = \sum_{a=1}^{k-1} w_a$, $M = \sum_{a=1}^{k-1} v_a$. Взяв μ и λ , соотнесем с этими величинами две новые последовательности целых чисел $m = (m_1, \dots, m_N)$

¹⁾Эффект выбора другого способа поднятия на $GL(k)$ обсуждается в п. 3.2.3.

²⁾От этого предположения можно отказаться, если в дальнейшем заменить $\mathfrak{M}_0(v, w)$ на образ морфизма p .

и $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N)$ соответственно, определенные следующим образом (см. также работу [11], п. 5.1). Эти числа суть произвольные перестановки последовательностей чисел клеток в каждом столбце клеточных диаграмм μ и λ , определенных в предыдущем пункте (где для простоты обозначений ℓ всегда имеет длину N , т.е. может содержать нули). Сразу заметим, что упорядочение набора ℓ несущественно, однако упорядочение набора m приводит к изоморфной, но другой конструкции, и эту свободу удобно сохранить. В вышеприведенном примере m и ℓ – перестановки множеств $(3, 3, 3, 2, 1, 1)$ и $(4, 3, 2, 2, 2, 0)$ соответственно. Заметим, что $\sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \ell_i = M$.

Тогда $\mathfrak{M}_0$ изоморфно $\overline{\mathcal{O}_\ell} \cap \mathcal{T}_m$, где:

- $\mathcal{O}_\ell$ – $GL(M)$ -орбита действия нильпотентных $(M \times M)$ -матриц жорданова типа ℓ , т.е. матриц с жордановыми блоками размеров ℓ_i , $i = 1, \dots, N$;
- $\mathcal{T}_m = x_m + \mathcal{T}'_m$, где:

x_m есть нильпотентный оператор жорданова типа m , взятый в жордановой форме, т.е. x_m является блочно-диагональным оператором с блоками $\pi_1 = [1, m_1]$, $\pi_2 = [m_1 + 1, m_1 + m_2]$, $\dots$, $\pi_N = [M - m_N + 1, M]$, и в каждом диагональном блоке ненулевые элементы – это единицы над диагональю;

$\mathcal{T}'_m$ есть линейное подпространство, определенное следующим образом: в каждом блоке размера $\pi_i \times \pi_j$ (с тем же разбиением строк и столбцов в отрезки, как и выше), единственные ненулевые элементы содержатся в последней строке и в первых $\min(m_i, m_j)$ столбцах.

Важным свойством пересечения $\overline{\mathcal{O}_\ell}$ и $\mathcal{T}_m$ оказывается то, что это пересечение трансверсально (см. детали в работе [11]).

2.4. Колчаные переменные тензорных произведений. Пусть прямая сумма $W := \bigoplus_{a=1}^{k-1} W_a$ задается (упорядоченным) базисом $(e_1, \dots, e_N)$, где $e_i \in W_{m_i}$, при некоторых $m \in \{1, \dots, k-1\}^N$, причем $\#\{i : m_i = a\} = w_a$. Заметим, что последнее условие в точности характеризует последовательности $(m_1, \dots, m_N)$ из предыдущего пункта. Это задает изоморфизм между $\mathfrak{gl}(W)$ (между $GL(W)$) и $\mathfrak{gl}(N)$ (соответственно $GL(N)$), а также борелевскую подгруппу с ее унитарной подгруппой, картановским тором и их алгебрами Ли. С помощью вышеприведенного изоморфизма определим следующие множества матриц:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} &= \{\text{строго верхнетреугольные матрицы}\} \subset \mathfrak{gl}(W), \\ T &= \{\text{обратимые диагональные матрицы}\} \subset GL(W). \end{aligned}$$

Заметим, что фактически $T \subset \prod_{a=1}^{k-1} GL(W_a)$, поэтому матрицы из T действуют естественным образом,

$$g \in T: (B_a, i_a, j_a) \mapsto (B_a, i_a g^{-1}, g j_a),$$

и, так как это действие коммутирует с действием в G_v , мы имеем действие на $\mathfrak{M}_0$ (или на $\mathfrak{M}$).

Рассмотрим специальную однопараметрическую подгруппу

$$g(t) = \text{diag}(t^{-i}, i = 1, \dots, N) \in T, \quad t \in \mathbb{C}^\times.$$

Введем обозначение

$$\mathfrak{Z}_0 = \{x \in \mathfrak{M}_0 : g(t)x \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0\}.$$

Ниже нам однажды также понадобится рассмотреть $\mathfrak{Z} := p^{-1}(\mathfrak{Z}_0)$.

Применяя альтернативное описание из п. 2.3, можно переписать $\mathfrak{Z}_0$ в следующем виде. Во-первых, вложим $\mathfrak{gl}(N)$ в $\mathfrak{gl}(M)$ как множество матриц, пропорциональных единичной внутри каждого блока размера $\pi_i \times \pi_j$, отвечающего жорданову разложению матрицы x_m . Тогда с помощью этого разложения просто получим, что

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{n}.$$

Аффинная схема $\mathfrak{Z}_0$ обычно оказывается редуцируемой, и ее размерность равна $\dim \mathfrak{M}_0/2$ (это, конечно, связано со свойством лагранжевости, которое здесь не обсуждается). Обозначим через $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}$ ее неприводимые компоненты, где α пробегает некоторый набор индексов, который можно выбрать в следующем виде. Он состоит из набора таблиц формы λ со следующими ограничениями:

- индекс i встречается m_i раз, $i = 1, \dots, N$;
- индексы в строках расположены в строго возрастающем порядке, индексы в столбцах нестрого возрастают (т.е. эта таблица сопряжена квазистандартной таблице Юнга).

Такую разметку можно получить как обобщение алгоритма Шпальтенштейна [12], в котором общий элемент X из $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}$ интерпретируется как $(M \times M)$ -матрица и, если вычислить жордановы формы миноров в левом верхнем углу $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq m_1 + \dots + m_h}$, $h = 1, \dots, N$, соответствующая возрастающая последовательность разбиений образует таблицу α .

Похожим образом можно ввести $\mathfrak{Z} = p^{-1}(\mathfrak{Z}_0)$. Его неприводимые компоненты $\mathfrak{Z}_\alpha$ индексируются следующим образом: α представляет собой совокупность подмножеств α_i множества $\{1, \dots, k\}$, $i = 1, \dots, N$, такую, что

$$\#\alpha_i = m_i, \quad \#\{i : a \in \alpha_i\} = \lambda_a, \quad a = 1, \dots, k$$

(где λ_a – длины строк таблицы λ , рассматриваемой как клеточная диаграмма). Тогда отображение φ из $\text{Irr}(\mathfrak{Z}_0)$ в $\text{Irr}(\mathfrak{Z})$, отвечающее взятию p^{-1} , связывает с таблицей T последовательность подмножеств α_i номеров тех строк, в которых i содержится в T . В общем случае это отображение не сюръективно.

2.5. Мультистепени. Как было отмечено выше, тор $T \cong (\mathbb{C}^\times)^N$ действует на $\mathfrak{M}_0$. Более того, имеется дополнительное $\mathbb{C}^\times$ -действие следующего вида. В исходном определении множества $\mathfrak{M}_0$ это действие просто масштабирует каждое линейное отображение:

$$\mathbb{C}^\times \ni t : (B_{a,a+1}, B_{a+1,a}, i_a, j_a) \mapsto (tB_{a,a+1}, tB_{a+1,a}, ti_a, tj_a).$$

В п. 2.3 это действие осуществляется на срезе $\mathcal{T}_m$ как масштабное преобразование элемента в последней строке каждого блока размера $\pi_i \times \pi_j$ с $t^{\text{per}-2(\text{col}-1)}$, где per – периметр, $\text{per} = m_i + m_j$, а col – количество столбцов, номер столбца пробегает значения от 1 до $\min(m_i, m_j)$.

Нетрудно проверить, что действие $T \times \mathbb{C}^\times$ сохраняет $\mathfrak{Z}_0$ и, следовательно, его компоненты $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}$. Рассмотрим их *эквивариантные объемы* в специальной полиномиальной нормировке. Напомним, что из результатов п. 2.3 получается, что вложение, которое мы обозначаем символом ι , действует из $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{n}$ в $\mathcal{T}_m \cap \mathfrak{n}$.

Рассмотрим теперь поднятие в $(T \times \mathbb{C}^\times)$ -эquivариантной когомологии:

$$\Psi_\alpha := \iota_*[\mathfrak{Z}_{0,\alpha}] \in H_{T \times \mathbb{C}^\times}^*(\mathcal{T}_m \cap \mathfrak{n}).$$

Поскольку множество $\mathcal{T}_m \cap \mathfrak{n}$ equivариантно стягиваемо, его equivариантная когомология совпадает с когомологией точки, т. е. представляет собой кольцо многочленов. Запишем это как

$$H_{T \times \mathbb{C}^\times}^*(\mathcal{T}_m \cap \mathfrak{n}) = \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N, \hbar/2],$$

где каждая z_i есть координата на $\mathfrak{t} := \text{Lie}(T)$, отвечающая элементу базиса e_i , а $\hbar/2$ отвечает дополнительному $\mathbb{C}^\times$ -действию³⁾. Величины Ψ_α иногда называются *мультистепенями* множеств $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}$ в $\mathcal{T}_m \cap \mathfrak{n}$. Они оказываются однородными многочленами степени, равной коразмерности множества $\mathfrak{Z}_0$ в $\mathcal{T}_m \cap \mathfrak{n}$. Эта величина не зависит от m (что следует из свойства трансверсальности, см. п. 3.2.2) и задается соотношением

$$\text{codim } \mathfrak{Z}_0 = \sum_{a=1}^k \frac{\lambda_a(\lambda_a - 1)}{2},$$

где λ_a – длины строк клеточной диаграммы λ .

2.6. Интерпретация с точки зрения теории представлений. Обозначим через L_α неприводимое представление алгебры $SL(k)$ со старшим весом α . Известно, что существует естественный изоморфизм между старшей гомологией Бореля–Мура множества $\mathfrak{Z}_0$ и пространством $\text{Hom}_{SL(k)}(L_\lambda, L_{\omega_{m_1}} \otimes L_{\omega_{m_2}} \otimes \dots \otimes L_{\omega_{m_N}})$. В частности, число неприводимых компонент множества $\mathfrak{Z}_0$ равно кратности множителя L_λ в прямом произведении $L_{\omega_{m_1}} \otimes L_{\omega_{m_2}} \otimes \dots \otimes L_{\omega_{m_N}}$.

Таким образом, мы можем интерпретировать $\Psi := \iota_*$ как элемент множества $\mathcal{H} \otimes \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N, \hbar/2]$, где

$$\mathcal{H} := (L_{\omega_{m_1}}^* \otimes L_{\omega_{m_2}}^* \otimes \dots \otimes L_{\omega_{m_N}}^* \otimes L_\lambda)^{SL(k)}.$$

В более явном виде $\Psi = \sum_\alpha \Psi_\alpha u^\alpha$, где векторы u^α образуют базис, дуальный $[\mathfrak{Z}_{0,\alpha}]$.

3. ВЕРШИННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И КВАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ КНИЖНИКА–ЗАМОЛОДЧИКОВА

В предыдущем разделе для заданного семейства колчаных переменных и базиса $(e_1, \dots, e_N)$ пространства $W = \bigoplus_{a=1}^{k-1} W_a$ мы определили геометрически набор многочленов Ψ_α и вектор многочленов $\Psi \in \mathcal{H} \otimes \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N, \hbar/2]$. Изучим теперь свойства этих многочленов.

Почеркнем, что представленная конструкция зависит следующим образом от выбора базиса $(e_1, \dots, e_N)$. Будем применять по мере надобности обозначение $\mathfrak{Z}_0 := \mathfrak{Z}_0^{e_1, \dots, e_N}$ и аналогичные обозначения для других геометрических объектов. Заметим, однако, что Ψ зависит от e_i только через комбинаторные данные величин m_i (так что $e_i \in W_{m_i}$). В самом деле, для двух базисов с одной и той же m_i существует

³⁾Множитель $1/2$ в генераторе $\hbar/2$ вводится для соответствия с обозначениями теории интегрируемых систем. На самом деле следует в дальнейшем произвести подстановку $\hbar \rightarrow -\hbar$ для достижения полного соответствия, но это противоречит требованию положительности, приходящему из геометрии.

очевидный изоморфизм из каждого W_a в себя, который эквивариантен относительно соответствующих двух тором, а потому эквивариантные классы величин $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}$, рассматриваемых как элементы множества $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N, \hbar/2]$, совпадают. Поэтому положим

$$\Psi = \Psi^{m_1, \dots, m_N}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^{m_1, \dots, m_N}.$$

3.1. Обменные соотношения. Первым важным результатом оказывается то, что Ψ удовлетворяет так называемому обменному соотношению. Как будет показано далее, оно представляет собой целый ряд соотношений, связывающих не отдельные величины $\Psi^{m_1, \dots, m_N}$ (если не все m_i одинаковы), а все перестановки последовательности m_i . Этот материал тесно связан с главой 4 работы [4]: то, что мы называем обменным соотношением, представляет собой на самом деле определение R -матрицы из указанной работы с некоторыми деталями, как мы увидим из доказательства следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для каждого $i = 1, \dots, N - 1$ существует матрица*

$$\check{R}_i(z) \in \text{Hom}(\mathcal{H}^{m_1, \dots, m_i, m_{i+1}, \dots, m_N}, \mathcal{H}^{m_1, \dots, m_{i+1}, m_i, \dots, m_N}) \otimes \mathbb{Q}(z, \hbar),$$

удовлетворяющая соотношениям

$$\check{R}_i(u)\check{R}_{i+1}(u+v)\check{R}_i(v) = \check{R}_{i+1}(v)\check{R}_i(u+v)\check{R}_{i+1}(u), \quad i = 1, \dots, N - 2, \quad (1)$$

$$\check{R}_i(u)\check{R}_i(-u) = 1, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (2)$$

$$\check{R}_i(u)\check{R}_j(v) = \check{R}_i(v)\check{R}_j(u), \quad |i - j| > 1, \quad (3)$$

такая что

$$\begin{aligned} & \Psi^{m_1, \dots, m_{i+1}, m_i, \dots, m_N}(z_1, \dots, z_{i+1}, z_i, \dots, z_N) = \\ & = \check{R}_i(z_i - z_{i+1})\Psi^{m_1, \dots, m_i, m_{i+1}, \dots, m_N}(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_N). \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что $\check{R}_i(z)$ – рациональная функция как от z , так и от $\hbar$, но в интегрируемых системах традиционно указывается зависимость только от z .

Представим здесь основные моменты доказательства.

• Первая основная идея состоит в том, чтобы сравнить различные $\mathfrak{Z}^{e_1, \dots, e_N}$ при перестановках e_i (появление симметрической группы $\mathcal{S}_N$ связано с тем, что “калибровочная группа” $\prod_a GL(W_a)$ имеет тип A). Известно, что классы неприводимых компонент $\mathfrak{Z}^{e_1, \dots, e_N}$ образуют базис (подходящим образом локализованного) кольца эквивариантных когомологий многообразия $\mathfrak{M}$. Поскольку перестановки набора e_i не изменяют тора T , имеются $N!$ различных базисов пространства $H_{T \times \mathbb{C}^*}^{*, \text{loc}}(\mathfrak{M})$ как свободных модулей над $H_{T \times \mathbb{C}^*}^{*, \text{loc}}(\cdot)$. Можно ограничиться только элементарными перестановками, и тогда формально

$$[\mathfrak{Z}_\alpha^{\dots e_{i+1}, e_i \dots}] = \sum_\beta (\check{\mathfrak{R}}_i)_\alpha^\beta [\mathfrak{Z}_\beta^{\dots e_i, e_{i+1} \dots}],$$

где $(\check{\mathfrak{R}}_i)_\alpha^\beta$ – матрицы в $H_{T \times \mathbb{C}^*}^{*, \text{loc}}(\cdot)$. Этот анализ не вполне удовлетворителен, поэтому вкратце отметим, как его можно улучшить (это не является необходимым при формулировке любой из теорем данной работы, но необходимо для их доказательств).

Над базисом $[3_\alpha]$ можно произвести произвольное линейное преобразование, если только оно совместимо с действием группы $\mathcal{S}_N$. Хорошим выбором такого преобразования будет переход к “устойчивому” базису, который мы здесь определять не будем (см. работу [4] и приложение к настоящей работе) и который отвечает переходу от $[3_\alpha]$, например, к $[3'_\alpha] = \sum_\beta c_\alpha^\beta [3_\beta]$. Коэффициенты c_α^β замены базисов задают верхнетреугольную матрицу (относительно естественного упорядочения на множестве индексов) с целочисленными элементами; R -матрицы, определенные в этом новом базисе формулами $[3'^{\dots, e_{i+1}, e_i, \dots}] = \sum_\beta (\check{\mathfrak{R}}'_i)_\alpha^\beta [3'_\beta]^{\dots, e_i, e_{i+1}, \dots}]$, обладают целым рядом замечательных свойств [4]. В частности, они “локальны” относительно тензорного произведения. Одним из практических следствий этого оказывается то, что элементы матрицы $\check{\mathfrak{R}}'_i$ (а потому и элементы матрицы $\check{\mathfrak{R}}_i$) как элементы пространства $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_N, \hbar/2)$ являются функциями только от $z_i - z_{i+1}$ и $\hbar$.

• Далее произведем поднятие с $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}_0$ с применением p_* . Поскольку размерности всех компонент множеств $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Z}_0$ совпадают, для произвольно выбранной компоненты $\mathfrak{Z}_\alpha$ множества $\mathfrak{Z}$ применение преобразования p приводит к одному из двух возможных исходов: или этот оператор переводит указанную компоненту в нечто, имеющее меньшую размерность, или она переводится в неприводимую компоненту множества $\mathfrak{Z}_0$, которая есть не что иное, как $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}$, если отождествить таблицу α с ее образом при отображении φ (см. п. 2.4). Во втором случае отображение оказывается взаимно однозначным. Отсюда получаем, что в эквивариантной когомологии класс $[\mathfrak{Z}_\alpha]$ отображается или в ноль, или в класс $[\mathfrak{Z}_{0,\alpha}]$. В конечном итоге получим в точности то же самое равенство

$$[\mathfrak{Z}_{0,\alpha}^{\dots, e_{i+1}, e_i, \dots}] = \sum_\beta (\check{\mathfrak{R}}_i)_\alpha^\beta [\mathfrak{Z}_{0,\beta}^{\dots, e_i, e_{i+1}, \dots}], \quad (5)$$

где область изменения индексов ограничена подходящим образом.

• Наконец, перейдем к вычислению эквивариантных объемов в предписанной нормировке, задаваемой пространством вложения. На этой стадии имеются две трудности.

Во-первых, чтобы превратить равенство (5) в равенство многочленов, нам необходимо ввести параметризацию тора. При этом разрушается симметрия между $\dots, e_i, e_{i+1}, \dots$ и $\dots, e_{i+1}, e_i, \dots$, поскольку z_i становится координатой, отвечающей e_i . Если после этого применить ι_* к обеим частям равенства (5), то правая часть будет себя вести ожидаемым образом: $\check{\mathfrak{R}}_i$ становится $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_N, \hbar/2)$ -значной матрицей, а фактически, как уже отмечалось, – $\mathbb{Q}(z_i - z_{i+1}, \hbar)$ -значной матрицей (можно еще уточнить это утверждение, так как в силу требования локализации допускаются только знаменатели в виде произведений множителей $a\hbar + z_i - z_{i+1}$, $a \in \mathbb{Z}$); так что $[\mathfrak{Z}_{0,\beta}^{\dots, e_i, e_{i+1}, \dots}]$ принимает вид $\Psi_\beta^{\dots, m_i, m_{i+1}, \dots}$. Однако левая часть равенства не в точности равна $\Psi_\alpha^{\dots, m_{i+1}, m_i, \dots}$, как можно было бы наивно предполагать, поскольку имеет место рассогласование в параметризации тора: необходимо переставить переменные z_i и z_{i+1} , чтобы учесть этот эффект.

Во-вторых, пространства вложений для $\mathfrak{Z}_0^{\dots, e_i, e_{i+1}, \dots}$ и $\mathfrak{Z}_0^{\dots, e_{i+1}, e_i, \dots}$ не совпадают: это означает, что при переходе от (5) к эквивариантным объемам необходимо ввести поправочный множитель, который отвечает отношению эквивариантных объемов множеств $\mathcal{T}_{\dots, m_i, m_{i+1}, \dots} \cap \mathfrak{n}$ и $\mathcal{T}_{\dots, m_{i+1}, m_i, \dots} \cap \mathfrak{n}$. Последние объемы можно на самом деле

вычислить явно, и они оказываются равными

$$\prod_{a=1}^{\min(m_i, m_{i+1})} \frac{a\hbar - z_i + z_{i+1}}{a\hbar - z_{i+1} + z_i}.$$

Чтобы учесть этот поправочный множитель, введем новую нормировку R -матрицы:

$$\check{R}_i(z) := \prod_{a=1}^{\min(m_i, m_{i+1})} \frac{a\hbar - z}{a\hbar + z} \check{\mathfrak{R}}_i(z) \quad (6)$$

(это не самый важный момент, но он оказывается существенным для явного сравнения результатов работ [3], [5] и результатов приложения к настоящей работе с результатами статьи [4]).

Собирая все воедино, получим, что уравнение (4) в точности выполняется.

• Последовательные замены базиса должны приводить к соотношениям симметрической группы $\mathcal{S}_N$ для операторов $\check{\mathfrak{R}}_i$. Однако, как было объяснено выше, следует также учесть возможные репараметризации тора, вызываемые перестановками элементов e_i . Другими словами, после первой замены базиса, приводящей к $\check{\mathfrak{R}}_i$, следующая замена базиса, отвечающая элементарной перестановке $(j, j+1)$, задается вместо $\check{\mathfrak{R}}_j$ оператором $\tau_i \check{\mathfrak{R}}_j$, где τ_i – оператор, действующий в $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_N, \hbar/2)$ и переставляющий z_i и z_{i+1} . В более общем подходе, если рассмотреть $(\check{\mathfrak{R}}_i)_\alpha^\beta$ как операторы умножения в пространстве $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_N, \hbar/2)$, точное утверждение будет состоять в том, что $\tau_i \check{\mathfrak{R}}_i$ удовлетворяет соотношениям симметрической группы. Переписывая это в явном виде, убирая τ_i (с учетом того что τ_i само по себе удовлетворяет тем же соотношениям), приходим к условиям (1)–(3) сначала для $\check{\mathfrak{R}}_i$, а затем, с учетом того что преобразование (6) сохраняет эти условия, получим это же утверждение для $\check{R}_i$.

Нетрудно увидеть, что при заданных многочленах Ψ условия (4) задают матрицу $\check{R}_i$ единственным образом при $N \geq 3$. Поэтому уравнение (4) можно в принципе рассматривать как (несколько завуалированное) определение R -матрицы, и в этом смысле оно эквивалентно (при $N \geq 3$) определению из работы [4].

3.2. Корреляционные функции янгианых вершинных операторов. Обменных соотношений (4) недостаточно для того, чтобы однозначно задать векторы Ψ , состоящие из многочленов. Приведем теперь формулу для этих векторов, которая задает их единственным образом (с точностью до нормировки).

Начнем с центрально расширенного дубля янгиана алгебры $\mathfrak{sl}(k)$, который обозначим через $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$. Этот дубль был введен в работе [13], а случай $k = 2$ был впоследствии исследован в [14]. Можно интерпретировать этот дубль как “рациональный” аналог (в смысле классификации решений уравнения Янга–Бакстера) “тригонометрических” квантовых аффинных алгебр, и можно ожидать, что теория его представлений аналогична теории представлений этих квантовых алгебр, хотя некоторые из фактов, описанных ниже, не были получены строго, насколько это известно автору.

Значение центрального элемента неприводимого представления дубля $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$ называется *уровнем*. В данном случае интересными оказываются два типа модулей над $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$:

- вычислительные модули $L_\nu(z)$, где z – формальный параметр, эти модули имеют нулевой уровень и изоморфны $L_\nu \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ как $U(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$ -модули;
- модули со старшим весом $\mathcal{V}_{1,\lambda}$, где старший вес в $\widehat{\mathfrak{sl}(k)}$ выделен в уровень, равный в дальнейшем единице, и имеется старший вес λ конечномерной алгебры $\mathfrak{sl}(k)$; на самом деле на уровне один вес λ может быть только нулевым (случай так называемого вакуумного представления) или фундаментальным весом.

Определим (дуальные) вершинные операторы (ВО) $\Phi_{\omega_a}(z)$, $a = 1, \dots, k-1$, типа I, т. е. сплетающие операторы

$$\Phi_{\omega_a}^{1,\lambda,\lambda'}(z): \mathcal{V}_{1,\lambda} \otimes L_{\omega_a}(z) \rightarrow \mathcal{V}_{1,\lambda'}.$$

Они определены однозначно с точностью до умножения на скалярный множитель, явный вид нормировки будет для наших целей несуществен. Более того, эти ВО оказываются “идеальными” в том смысле, что λ' полностью определяется λ и ω_i . В явном виде, если $\lambda = \omega_b$, $b = 0, \dots, k-1$ (где $\omega_0 := 0$), то $\lambda' = \omega_{b+a \pmod k}$. В силу этого обстоятельства можно опускать верхние индексы и писать просто $\Phi_{\omega_a}(z)$.

Важной составляющей оказывается бозонная реализация представлений уровня один. Эта конструкция была введена в работах [13], [14] для $k = 2$, и ее можно непосредственно обобщить на случай произвольного k . Она состоит из $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$ -модуля $\mathcal{B}$, который является бозонным пространством Фока, т. е. прямой суммой копий модуля со старшим весом $\widehat{\mathfrak{gl}(1)^{k-1}}$ – алгебры Гейзенберга, лежащей внутри $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$. Векторы старших весов обозначаются через $|\lambda\rangle$, где λ пробегает решетку весов алгебры $\mathfrak{sl}(k)$. В частности, если λ – нулевой или фундаментальный вес, то $|\lambda\rangle$ есть вектор старшего веса всего дубля $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$ с ассоциированным подмодулем $\mathcal{V}_{1,\lambda}$.

Дуальный модуль $\mathcal{B}^*$ схожим образом является прямой суммой модулей наименьшего веса; мы будем обозначать векторы низших весов через $\langle \lambda|$.

Введем еще одно обозначение. Вектор $|\lambda\rangle$ старшего веса алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}(1)^{k-1}}$, где λ – доминантный вес, порождает подмодуль конечномерной алгебры $\mathfrak{sl}(k)$, изоморфный L_λ . Это определяет единственный (с точностью до нормировки) вектор пространства $L_\lambda^* \otimes \mathcal{B}$, который будет обозначаться как $|L_\lambda^*\rangle$. Ниже нам потребуется $|L_\lambda\rangle$ вместо $|L_\lambda^*\rangle$; заметим, что $L_\lambda^* \cong L_{\lambda^*}$, где по определению $\lambda^* := -w_0\lambda$, а w_0 – самая длинная перестановка в S_k .

Теперь можно сформулировать теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнено следующее соотношение:*

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{\kappa(z_1, \dots, z_N)} \langle 0 | \Phi_{\omega_{m_1}}(z_1) \dots \Phi_{\omega_{m_N}}(z_N) | L_\lambda \rangle, \quad (7)$$

где $\kappa(z_1, \dots, z_N)$ – мероморфная скалярная функция.

Заметим, что произведение ВО в этом выражении является произведением линейных операторов, действующих на $\mathcal{B}$. Подводя итог, заметим, что правая часть равенства (7) есть элемент пространства $L_{\omega_{m_1}}^* \otimes L_{\omega_{m_2}}^* \otimes \dots \otimes L_{\omega_{m_N}}^* \otimes L_\lambda$, как и следовало ожидать (и на самом деле, сплетающее свойство для ВО алгебры $\mathfrak{sl}(k)$ говорит о том, что это произведение лежит в $\mathfrak{sl}(k)$ -инвариантном подпространстве, как и левая часть равенства, ср. п. 2.6).

Утверждение теоремы составляет основной результат работы. Далее приводится набросок его доказательства. Оно производится в два этапа: сначала теорема доказывается в случае $\mu = N\omega_1$, а затем обобщается на общий случай с применением процедуры слияния. Заметим, что, в отличие от перестановочных соотношений, геометрическое доказательство теоремы 1 нам неизвестно.

3.2.1. Случай $\mu = N\omega_1$: орбитальные переменные. При $\mu = N\omega_1$ множество $\mathfrak{Z}_0 = \overline{\mathcal{O}_\ell} \cap \mathfrak{n}$ известно как орбитальная схема, связанная с замыканием нильпотентной орбиты $\mathfrak{M}_0 = \overline{\mathcal{O}_\ell}$, а ее неприводимые компоненты $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}$ называются *орбитальными переменными* (и $\mathfrak{M}$ – кокасательное расслоение для подходящего многообразия частичных флагов). Эти структуры уже исследовались в похожем контексте в работах [3], [5], хотя формула из теоремы 1, выраженная в терминах вершинных операторов, не была выписана в этих работах.

Одним из основных результатов работы [5] является утверждение о том, что Ψ удовлетворяет обменному соотношению (4), где R -матрицу можно выписать в явном виде:

$$\check{R}_i(z) = \frac{\hbar - zP_{i,i+1}}{\hbar + z}, \quad (8)$$

где оператор $P_{i,i+1}$ переставляет индексы i и $i+1$ тензорного произведения (имеется общий знак минус, отличающий это выражение от результата работы [5], что вызвано различием в обозначениях).

Теперь ВО $\Phi(z) := \Phi_{\omega_1}(z)$ уровня один удовлетворяет собственному перестановочному соотношению

$$\check{R}^*(z_1 - z_2)\Phi(z_1)\Phi(z_2) = \Phi(z_2)\Phi(z_1), \quad (9)$$

но с другой нормировкой R -матрицы [14],

$$\check{R}^*(z) = \frac{f(z)}{f(-z)}\check{R}(z), \quad f(z) = \frac{\Gamma(1 - z/k\hbar)}{\Gamma(1 - (z - \hbar)/k\hbar)}.$$

Отсюда, если положить

$$\kappa(z_1, \dots, z_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} f(z_j - z_i) \quad (10)$$

и задать, как и в теореме 1,

$$\Xi(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{\kappa(z_1, \dots, z_N)} \langle 0 | \Phi(z_1) \dots \Phi(z_N) | L_\lambda \rangle,$$

то функция Ξ будет удовлетворять обменному соотношению (4) (с такой же нормировкой R -матрицы, как и нормировка Ψ).

Далее, явное выражение (8) (тождественный оператор плюс оператор перестановки индексов) для R -матрицы показывает, что если имеется один элемент матрицы Ψ в стандартном базисе пространства весов $(\mathbb{C}^k)^{\otimes N}$ (который в нашем случае отождествляется с устойчивым базисом), то все прочие элементы определяются однозначно с помощью многократного применения обменного соотношения (4). В явном виде, записав эти элементы как $\Psi'_\alpha = \sum_\beta c_\alpha^\beta \Psi_\beta$ и аналогично для функции Ξ , мы получаем $\Psi = \Xi$, если можно показать, что $\Psi'_\alpha = \Xi'_\alpha$ при некотором α .

С геометрической стороны рассмотрим (стандартную) таблицу $\alpha^{(0)}$ формы λ , которая получается при заполнении клеток индексами $1, \dots, N$ строка за строкой, например

1	2	3
4	5	

Определим линейное пространство $\mathfrak{Z}_{0,\alpha^{(0)}}$, элементами которого являются верхнетреугольные $(N \times N)$ -матрицы U такие, что $U_{ij} = 0$, если i и j стоят в одной и той же строке таблицы $\alpha^{(0)}$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{Z}_{0,\alpha^{(0)}}$, определенная таким образом, есть неприводимая компонента множества $\mathfrak{Z}_0$, (поскольку $\mathfrak{Z}_{0,\alpha^{(0)}}$ в нем содержится и имеет максимальную размерность), и $\mathfrak{Z}_{0,\alpha^{(0)}}$ действительно соответствует некоторой таблице $\alpha^{(0)}$. Немедленно получаем, что

$$\Psi_{\alpha^{(0)}} = \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq N: \\ i \text{ и } j \text{ в одной строке } \alpha^{(0)}}} (\hbar + z_i - z_j).$$

Таблица $\alpha^{(0)}$ имеет специальный вид, так как она оказывается наименьшей из возможных относительно естественного упорядочения таблиц, для которых матрица перехода от базиса к устойчивому базису имеет треугольную структуру. Отсюда заключаем, что $\Psi'_{\alpha^{(0)}} = \Psi_{\alpha^{(0)}}$, где, как обычно, $\alpha^{(0)}$ отождествляется со своим образом относительно преобразования φ , а именно с

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{\lambda_1}, \dots, \underbrace{k, \dots, k}_{\lambda_k}). \quad (11)$$

Со стороны ВО можно представить вычисление вакуумного среднего в тех же терминах, что и в работе [15] (в которой рассмотрен только случай $k = 2$). Альтернативно, можно начинать с соответствующих вычислений для квантованных аффинных алгебр $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$, как в работе [16] (см. раздел 9) с последующим вычислением предела $\epsilon \rightarrow 0$ при $q = e^{-\epsilon\hbar/2}$, $w = e^{\epsilon z}$ (где w обозначает произвольный мультипликативный спектральный параметр).

Можно получить, что в случае, когда $\alpha^{(0)}$ – произвольная слабо возрастающая последовательность, т. е. она имеет вид (11), выполняется следующее тождество:

$$\langle 0 | \Phi(z_1)_{\alpha_1^{(0)}} \dots \Phi(z_N)_{\alpha_N^{(0)}} | \lambda^* \rangle = \prod_{1 \leq i < j \leq N} f(z_i - z_j) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq N: \\ \alpha_i^{(0)} = \alpha_j^{(0)}}} (\hbar + z_i - z_j)$$

(где через $\Phi(z)_a$, $a = 1, \dots, k$, обозначен элемент матрицы $\Phi(z)$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^k$).

Собирая все вышеприведенные формулы, можно заключить, что $\Psi'_{\alpha^{(0)}} = \Xi'_{\alpha^{(0)}}$ и, следовательно, $\Psi = \Xi$.

3.2.2. Процедура слияния и поперечный срез. Начнем с объяснения процедуры слияния и того, как она позволяет свести вычисление правой части уравнения (7) к случаю с $\mu = M\omega_1$ из предыдущего пункта.

Пусть задан фундаментальный вес ω_a алгебры $SL(k)$, $a = 1, \dots, k-1$; тогда имеется (единственное с точностью до нормировки) вложение p_a пространства L_{ω_a} в $L_{\omega_1}^{\otimes a}$ как $U(\mathfrak{sl}(k))$ -модуля. Более того, пространство

$$L_{\omega_1}\left(z - \frac{a-1}{2}\hbar\right) \otimes L_{\omega_1}\left(z - \frac{a-3}{2}\hbar\right) \otimes \dots \otimes L_{\omega_1}\left(z + \frac{a-1}{2}\hbar\right)$$

редуцируемо для всего действия янгiana $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$, и образ вложения p_a образует инвариантное подпространство, изоморфное $L_{\omega_a}(z)$. (Заметим снова, что в стандартных обозначениях теории интегрируемых систем нужно изменить знак $\hbar \rightarrow -\hbar$.)

Рассмотрим теперь оператор

$$\Phi\left(z - \frac{a-1}{2}\hbar\right) \Phi\left(z - \frac{a-3}{2}\hbar\right) \dots \Phi\left(z + \frac{a-1}{2}\hbar\right) p_a. \quad (12)$$

По определению он является сплетающим оператором, и мы заключаем, что он совпадает с $\Phi_{\omega_a}(z)$ с точностью до нормировки в силу единственности сплетающего оператора. Следовательно, правая часть уравнения (7) представляет собой не что иное, как

$$\frac{1}{\kappa'(z_1, \dots, z_N)} \left\langle 0 \left| \Phi\left(z_1 - \frac{m_1-1}{2}\hbar\right) \dots \Phi\left(z_1 + \frac{m_1-1}{2}\hbar\right) p_1 \times \dots \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Phi\left(z_N - \frac{m_N-1}{2}\hbar\right) \dots \Phi\left(z_N + \frac{m_N-1}{2}\hbar\right) p_N \right| L_\lambda \right\rangle, \quad (13)$$

где все нормировки выделены в скалярную функцию κ' , т. е.

$$\kappa'(z_1, \dots, z_N) = \kappa(z_1, \dots, z_N) \prod_{i=1}^N c_{m_i}(z_i)$$

(явное вычисление коэффициентов $c_a(z)$ не требуется). Таким образом, правая часть (7) теперь выглядит как специальный случай с $\mu = M\omega_1$.

Рассмотрим теперь левую часть (7). Используем, наконец, конструкцию из п. 2.3. Напомним, что $\mathfrak{M}_0 = \overline{\mathcal{O}_\ell} \cap \mathcal{T}_m$, где в текущем контексте следует рассматривать $\mathfrak{M}_0^{(1)} := \overline{\mathcal{O}_\ell}$ как сингулярное многообразие Накаямы, связанное с $\mu = M\omega_1$ при том же параметре λ . Аналогично, $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_0^{(1)} \cap \mathcal{T}_m$, где $\mathfrak{Z}_0^{(1)} := \overline{\mathcal{O}_\ell} \cap \mathfrak{n}$ – колчанная переменная тензорного произведения для $\mu = M\omega_1$, т. е. $m = \underbrace{(1, \dots, 1)}_M$.

Хорошим свойством среза Мирковича–Выборнова оказывается то, что он все еще трансверсален на $\mathfrak{Z}_0^{(1)}$. Более точно, для заданной неприводимой компоненты $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}^{(1)}$ пересечение или пусто, или трансверсально и неприводимо (неприводимость на самом деле вытекает из рассуждения, приведенного ниже).

Вычислим теперь мультистепени. Величины $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}^{(1)}$ инвариантны относительно действия тора $T^{(1)} \cong (\mathbb{C}^\times)^M \times \mathbb{C}^\times$, но срез с $\mathcal{T}_m$ сохраняется только подтором $T \subset T^{(1)}$ с $T \cong (\mathbb{C}^\times)^M \times \mathbb{C}^\times$. Конструкцию подтора $(\mathbb{C}^\times)^M$ легко понять: в соответствии

с результатами п. 2.4 она отвечает сопряжению относительно обратимых диагональных матриц, которые пропорциональны единичной в каждом жордановом блоке x_m . Дополнительная размерность многообразия $\mathbb{C}^\times$ представляет собой более тонкий эффект; явная формула для нее была приведена в начале п. 2.5. Перепишем ее теперь в следующем виде. Произвольный элемент среза $\mathcal{T}_m$, каким, например, является сам x_m , имеет единицы сразу над диагональю в каждом жордановом блоке. Чтобы действие T сохраняло $\mathcal{T}_m$, веса этих элементов относительно T должны быть нулевыми. Теперь веса $\mathfrak{gl}(M)$ относительно $T^{(1)}$ просто равны $\hbar + z_i^{(1)} - z_j^{(1)}$, $i, j = 1, \dots, M$ (где верхние индексы (1) добавлены для удобства), и каждый из них соответствует элементу на месте (i, j) . Можно заключить, что $\mathfrak{t}^*$, рассматриваемое как фактор $\mathfrak{t}^{(1)*}$, порождается величинами $z_1^{(1)}, \dots, z_M^{(1)}, \hbar$, подчиненными соотношениям

$$\hbar + z_i^{(1)} - z_{i+1}^{(1)} = 0, \quad i, i+1 \in \pi_h, \quad h = 1, \dots, N.$$

Заметим, что само многообразие $\mathbb{C}^\times$, рассматриваемое как подгруппа группы T , не определен канонически, что отвечает свободе в решении вышеприведенных уравнений, $z_i^{(1)} = z_h + \text{const} + i\hbar$, $i \in \pi_h$, позволяющей сдвигать z_h на постоянную величину. Как и в п. 2.5, будем фиксировать этот сдвиг требованием, что среднее от $z_i^{(1)}$ должно быть равно z_h в каждом π_h .

В результате заключаем, что

$$[\mathfrak{Z}_{0,\alpha}^{(1)}]_T = \Psi_\alpha^{(1)} \left(z_1 - \frac{m_1 - 1}{2} \hbar, \dots, z_1 + \frac{m_1 - 1}{2} \hbar, \dots, z_N - \frac{m_N - 1}{2} \hbar, \dots, z_N + \frac{m_N - 1}{2} \hbar \right), \quad (14)$$

где левая часть равенства есть мультистепень относительно действия T , в то время как $\Psi_\alpha^{(1)}(z_1, \dots, z_M)$ по определению представляет собой мультистепень относительно действия $T^{(1)}$.

Теперь трансверсальность пересечения означает, что мультистепень компоненты $\mathfrak{Z}_{\alpha,0}^{(1)}$ в $\mathfrak{n}$ равна мультистепени пересечения $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}^{(1)} \cap \mathcal{T}_m$ в $\mathfrak{n} \cap \mathcal{T}_m$. Отсюда можно заключить, что левая часть равенства (14) представляет собой не что иное, как $\sum_\beta x_{\alpha,\beta} \Psi_\beta$, где $x_{\alpha,\beta}$ – кратность компоненты $\mathfrak{Z}_{0,\beta}^{(1)}$ в $\mathfrak{Z}_{0,\alpha}^{(1)} \cap \mathcal{T}_m$.

Из более подробного анализа, который мы здесь опускаем, следует, что устойчивые базисы можно отождествить со стандартным базисом (пространства весов) $L_{\omega_{m_1}} \otimes \dots \otimes L_{\omega_{m_N}}$ (заметим, что это требование фактически вытекает из локальности базиса относительно тензорного произведения и того обстоятельства, что это произведение сохраняет разложение пространства весов). Это фиксирует матрицу $x_{\alpha,\beta}$ и влечет, что

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \Psi^{(1)} \left(z_1 - \frac{m_1 - 1}{2} \hbar, \dots, z_1 + \frac{m_1 - 1}{2} \hbar, \dots, \right. \\ \left. z_N - \frac{m_N - 1}{2} \hbar, \dots, z_N + \frac{m_N - 1}{2} \hbar \right) (p_1 \otimes \dots \otimes p_N).$$

Сравнивая это выражение с (13), применяя соотношение (7) для $\mu = M\omega_1$, можно фиксировать величины

$$\kappa'(z_1, \dots, z_N) := \kappa\left(z_1 - \frac{m_1 - 1}{2}\hbar, \dots, z_1 + \frac{m_1 - 1}{2}\hbar, \dots, z_N - \frac{m_N - 1}{2}\hbar, \dots, z_N + \frac{m_N - 1}{2}\hbar\right),$$

где κ задано формулой (10), что приводит к равенству (7) в общем случае.

В качестве финальной реплики заметим, что вершинные операторы $\Phi_{\omega_i}(z)$ также удовлетворяют обменному соотношению

$$\check{R}_{\omega_a, \omega_b}^*(z_1 - z_2)\Phi_{\omega_a}(z_1)\Phi_{\omega_b}(z_2) = \Phi_{\omega_b}(z_2)\Phi_{\omega_a}(z_1),$$

где из конструкции слияния (ср. (9) и (12)) следует, что $\check{R}_{\omega_a, \omega_b}^*(z)$ задается как произведение ab матриц $\check{R}^*$ (с точностью до нормировки). Это отождествляет геометрически определенные R -матрицы из предложения 1 с R -матрицами янгиана $D\bar{Y}(\mathfrak{sl}(k))$ в тензорном произведении двух вычислительных (evaluation) модулей, отвечающих фундаментальным представлениям, как и следовало ожидать (и, как обычно, с точностью до скалярного множителя).

3.2.3. Соотношения рекурсии и условия колеса. В качестве побочного эффекта ту же стратегию, что и в предыдущем пункте, можно применить к исследованию следующего вопроса: что происходит, когда при построении $\mathfrak{M}_0$ в виде трансверсального среза методом из п. 2.3 применяется другое поднятие μ из $SL(k)$ в $GL(k)$, состоящее в добавлении дополнительных столбцов высоты k ? Другими словами, что произойдет, если мы возьмем $\tilde{m} = (m_1, \dots, m_{p-1}, k, m_p, \dots, m_N)$ и аналогично $\tilde{\ell} = (k, \ell_1, \dots, \ell_N)$ (напомним, что порядок в $\tilde{\ell}$ несуществен).

Нетрудно увидеть, что в $\overline{\mathcal{O}_{\tilde{\ell}} \cap \mathcal{I}_{\tilde{m}}}$ k строк и столбцов матрицы размера $M \times M$, отвечающей блоку размера k в $x_{\tilde{m}}$, полностью фиксируются, т. е. диагональный блок имеет жорданов вид, а остальные элементы обращаются в ноль. Отсюда получим прямой изоморфизм $\overline{\mathcal{O}_{\tilde{\ell}} \cap \mathcal{I}_{\tilde{m}}} \cong \overline{\mathcal{O}_{\tilde{\ell}} \cap \mathcal{I}_m} = \mathfrak{M}_0$ и аналогично для многообразия тензорных произведений $\overline{\mathcal{O}_{\tilde{\ell}} \cap \mathcal{I}_{\tilde{m}} \cap \tilde{n}} \cong \overline{\mathcal{O}_{\tilde{\ell}} \cap \mathcal{I}_m \cap n} = \mathfrak{Z}_0$. Эти изоморфизмы многообразий, имеющих различные размерности, приводят к соотношениям рекурсии для Ψ .

На первом этапе обозначим через $\Psi_{\alpha}^{\tilde{m}}$ мультистепени неприводимых компонент пересечения $\overline{\mathcal{O}_{\tilde{\ell}} \cap \mathcal{I}_{\tilde{m}} \cap \tilde{n}}$; эти мультистепени естественным образом нумеруются таблицей $\tilde{\lambda}$ (клеточной диаграммой, связанной с $\tilde{\ell}$). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha}^{\tilde{m}}(z_1, \dots, z_{p-1}, \zeta, z_p, \dots, z_N) &= \prod_{i=1}^{p-1} \prod_{a=0}^{m_i-1} \left(\left(\frac{m_i + k}{2} - a \right) \hbar + z_i - \zeta \right) \times \\ &\times \prod_{i=p}^N \prod_{a=0}^{m_i-1} \left(\left(\frac{m_i + k}{2} - a \right) \hbar + \zeta - z_i \right) \Psi_{\alpha}^m(z_1, \dots, z_N), \end{aligned}$$

где нильпотентные орбиты суть $\tilde{\ell}$ в левой части и ℓ в правой части, а линейные множители ответственны за разность размерностей вложенных пространств. Таблица α получается из таблицы $\tilde{\alpha}$ удалением клеток с индексом p с последующей перенумеровкой $i \mapsto i - 1$ при $i > p$.

При этом можно рассматривать срез с $\tilde{m}$ как срез единицы с последовательностью $(m_1, \dots, m_{p-1}, n_1, \dots, n_r, m_p, \dots, m_N)$, где $n_1 + \dots + n_r = k$ и теперь $n_i < k$. Сравнивая мультистепени, получаем настоящее соотношение рекурсии, связывающее между собой величины Ψ , определенные в разделе 2:

$$\begin{aligned} & \Psi_{\tilde{\alpha}}^{m_1, \dots, n_1, \dots, n_r, \dots, m_N}(z_1, \dots, z_{p-1}, \zeta_1, \dots, \zeta_r, z_p, \dots, z_N) \Big|_{\zeta_{i+1} - \zeta_i = \frac{n_i + n_{i+1}}{2} \hbar} = \\ & = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists i < j \in \{p, p+1, \dots, p+r-1\}: \text{строка}(i) \geq \text{строка}(j) \text{ в } \tilde{\alpha}, \\ \prod_{i=1}^{p-1} \prod_{a=0}^{m_i-1} \left(\left(\frac{m_i + n_1}{2} - a \right) \hbar + z_i - \zeta_1 \right) \times & (15) \\ \times \prod_{i=p}^N \prod_{a=0}^{m_i-1} \left(\left(\frac{m_i + n_r}{2} - a \right) \hbar + \zeta_r - z_i \right) \Psi_{\alpha}^{m_1, \dots, m_N}(z_1, \dots, z_N) & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ & n_1 + \dots + n_r = k, \end{aligned}$$

где снова α получается из $\tilde{\alpha}$ удалением клеток с индексами $p, \dots, p+r-1$ с последующим сдвигом $i \mapsto i-r$ для $i \geq p+r$. В случае $m_i = n_i = 1$ это соотношение рекурсии уже было отмечено в работе [3], но без геометрического доказательства.

Можно продолжить это рассуждение на один шаг вперед. Что произойдет, когда элемент в m (строго) больше k , а последовательность ℓ имеет обычный вид ($\ell_i \leq k$ при всех i)? В этом случае сразу получаем, что $\overline{\mathcal{O}}_{\ell} \cap T_m = \emptyset$, и с помощью тех же самых рассуждений имеем

$$\begin{aligned} & \Psi^{\dots, n_1, \dots, n_2, \dots, n_r, \dots}(\dots, \zeta_1, \dots, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \dots) \Big|_{\zeta_{i+1} - \zeta_i = \frac{n_i + n_{i+1}}{2} \hbar} = 0, \\ & n_1 + \dots + n_r > k. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, в отличие от (15), положение переменных ζ_i произвольно до тех пор, пока они упорядочены. Уравнения (16) известны как *условия колеса* (wheel conditions).

3.3. Рациональное квантовое уравнение Книжника–Замолодчикова.

Обсудим, наконец, важный специальный случай функции Ψ , когда $|\lambda\rangle$ – вектор старшего веса янгиана $DY(\widehat{\mathfrak{sl}(k)})$. Как уже было отмечено, отсюда вытекает, что λ равно или нулевому, или фундаментальному весу алгебры $SL(k)$; эквивалентно, отсюда вытекает, что клеточная диаграмма λ представляет собой или прямоугольник высоты k , или “квазипрямоугольник” (прямоугольник с одним дополнительным частным столбцом). Заметим, что при заданном w существует единственное v , такое, что λ удовлетворяет этим условиям. В этом случае можно ожидать, что $\Psi(z_1, \dots, z_N)$ будет удовлетворять рациональному квантовому уравнению Книжника–Замолодчикова (также известному как разностное уравнение Книжника–Замолодчикова) [17], которое имеет смысл рационального предела (тригонометрического) квантового уравнения Книжника–Замолодчикова [18]. Заметим, что автор не нашел в литературе вывод этого факта, хотя он должен следовать из рассуждений, которые имеют место при выводе стандартного квантового уравнения Книжника–Замолодчикова для матричных элементов ВО в квантовых аффинных алгебрах [18], [19].

Рациональное квантовое уравнение Книжника–Замолодчикова представляет собой систему разностных уравнений вида

$$\Psi(z_1, \dots, z_i + s, \dots, z_N) = S_i(z_1, \dots, z_N) \Psi(z_1, \dots, z_i, \dots, z_N), \quad i = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где s равно номеру уровня плюс дуальное число Кокстера (измеряемое в единицах $\hbar$), так что здесь $s = (k + 1)\hbar$, а S_i – некоторые линейные операторы, явный вид которых не потребуется. Видно, что с помощью многократного применения уравнений (4) (например, путем переставления аргумента $z_i + s$ направо до конца в левой части и переставления аргумента z_i налево до конца в правой части) получается уравнение (17), эквивалентное другому уравнению, в котором потребуется циклический сдвиг параметров z_i . Более точно, получим следующее уравнение цикличности:

$$\Psi^{m_2, \dots, m_N, m_1}(z_2, \dots, z_N, z_1 + (k + 1)\hbar) = \rho \Psi^{m_1, \dots, m_N}(z_1, \dots, z_N), \quad (18)$$

где оператор вращения ρ является постоянным оператором (т. е. оператором, не содержащим зависимости от z_i), который осуществляет циклический сдвиг множителей тензорного произведения в $L_{\omega_{m_1}}^* \otimes \dots \otimes L_{\omega_{m_N}}^*$. В случае $\lambda = 0$ этот оператор имеет явное комбинаторное определение: $\rho_\alpha^\beta = \varepsilon^{m_1} \delta_\alpha^{\rho(\beta)}$, где $\varepsilon = (-1)^{M/k-1}$, а $\rho(\beta)$ получается из β с помощью таблицы типа продвижения (удаление m_1 букв 1 с последующим циклическим сдвигом индексов).

Отметим техническое отличие между системой (4), (18) и уравнением (17): первая смешивает различные векторы $\Psi^{m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(N)}}$ для $\sigma \in \mathcal{S}_N$, а последняя содержит только один вектор $\Psi^{m_1, \dots, m_N}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой короткой заметке мы выразили мультистепенные неприводимых компонент тензорных произведений колчаных переменных в терминах корреляционных функций подходящих янгианых вершинных операторов. С помощью формул бозонизации были получены явные выражения для этих мультистепеней и без особого труда выведены разнообразные свойства указанных выражений такие, как условия конформных блоков (см. работу [5]). В специальном случае было показано, что эти величины суть (полиномиальные) решения квантового уравнения Книжника–Замолодчикова, хотя полное геометрическое доказательство этого факта все еще отсутствует. Действительно, только обменное соотношение (“неаффинная” часть квантового уравнения Книжника–Замолодчикова, так как полное квантовое уравнение Книжника–Замолодчикова связано с аффинным действием группы Вейля) было выведено геометрически.

Имеется много возможностей обобщения подхода представленной работы. В частности, можно выйти за рамки типа A в случае двух типов подлежащих диаграмм Дынкина.

- Собственно колчан должен принадлежать типу ADE, и это приводит к тому, что решения уравнения Янга–Бакстера связаны с соответствующим дублем янгиана. Помимо этого, можно ожидать появления решений не типа ADE (или не полупростых, или скрученных), которые можно получить с помощью подходящих сложений. Можно выйти за рамки конечных диаграмм Дынкина, что имеет место в гипотезе Алдая–Гайотто–Тачикавы (см. работу [4], часть II).

- Можно взять калибровочную группу типа, отличного от GL . В частном случае типа C (симплектические) калибровочные группы должны приводить к системам с границами, т. е. к решениям уравнения отражений (см. связанную с этим случаем

работу [20]), что должно, в свою очередь, приводить к решениям квантового уравнения Книжника–Замолотчикова других типов (в смысле работы [21]), однако никакой интерпретации в терминах вершинных операторов вне рамок типа А неизвестно.

Наконец, предлагаемый нами метод должен быть расширен на случай К-теории и, возможно, на эллиптические когомологии. Его также интересно интерпретировать в контексте соответствия калибровочная теория – интегрируемые системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Простой пример

Рассмотрим колчан типа A_3

где N – четное целое число, белые точки обозначают вставки V_a , серая точка задает W_2 (все остальные W_a равны нулю), а стрелки – линейные отображения. Имеем

$$\begin{aligned} \mu &= N\omega_2, & m &= (\underbrace{2, \dots, 2}_N), \\ \lambda &= 0, & \ell &= (\underbrace{4, \dots, 4}_{N/2}). \end{aligned}$$

Кольцо G_v -инвариантных функций порождается генераторами

(где на картинке представлено произведение операторов вдоль путей, начинающихся и заканчивающихся в отмеченной вершине), которые удовлетворяют соотношениям

$$B(A^2 + B) = (A^2 + B)B = A^3 + AB + BA = 0, \quad (\text{П.1})$$

вытекающим из условий отображений моментов:

Например,

и тогда

$$B(A^2 + B) = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = - \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} = 0,$$

где индексы обозначают упорядочение движений вдоль путей.

При $\lambda = 0$ можно ожидать, что этот список соотношений окажется исчерпывающим (при общих λ , т. е. при более низких значениях v можно ожидать появления дополнительных соотношений, ограничивающих ранги генераторов A и B). Чтобы проверить это утверждение, применим изоморфизм со срезом Мирковича–Выборнова. В данном случае $M = 2N$, замыкание нильпотентной орбиты имеет вид $\overline{\mathcal{O}}_\ell = \{X \ M \times M, \ X^4 = 0\}$ и срез задается как

$$\mathcal{T}_\mu = \left\{ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \star & \star & \star & \star & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \star & \star & \star & \star & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{cc} N & N \\ N & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & A \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Если $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B & A \end{pmatrix}^4 = 0$, получим то же уравнение, что и выше. В итоге $\mathfrak{M}_0$ есть множество $(N \times N)$ -матриц A, B , удовлетворяющих уравнению (II.1). Аналогично, $\mathfrak{Z}_0$ есть множество строго верхнетреугольных $(N \times N)$ -матриц A, B , удовлетворяющих тому же (II.1). Тор $T \cong (\mathbb{C}^\times)^N$ действует на A и B одновременными сопряжениями, а дополнительная переменная цикла $\mathbb{C}^\times$ действует как $A \mapsto t^2 A, B \mapsto t^4 B$.

Еще больше ограничим рассмотрение на случай $N = 4$. Применив программу `Macaulay2` [22], мы нашли, что $\mathfrak{Z}_0$ имеет три компоненты (и это соответствует размерности пространства $(L_{\omega_2}^{\otimes 4})^{SL(4)}$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_{0, \begin{array}{c} \overline{12} \\ \overline{12} \\ \overline{34} \\ \overline{34} \end{array}} &= \{A, B: A_{1,2} = A_{3,4} = B_{1,2} = B_{3,4} = 0\}, \\ \mathfrak{Z}_{0, \begin{array}{c} \overline{12} \\ \overline{13} \\ \overline{24} \\ \overline{34} \end{array}} &= \{A, B: B_{1,2} = B_{2,3} = B_{3,4} = (A^3 + AB + BA)_{1,4} = 0\}, \\ \mathfrak{Z}_{0, \begin{array}{c} \overline{13} \\ \overline{13} \\ \overline{24} \\ \overline{24} \end{array}} &= \{A, B: A_{2,3} = B_{2,3} = (AB + BA)_{1,4} = (B^2)_{1,4} = 0\} \end{aligned}$$

с мультистепенями

$$\begin{aligned} \Psi_{\begin{array}{c} \overline{12} \\ \overline{12} \\ \overline{34} \\ \overline{34} \end{array}} &= (\hbar + z_1 - z_2)(\hbar + z_3 - z_4)(2\hbar + z_1 - z_2)(2\hbar + z_3 - z_4), \\ \Psi_{\begin{array}{c} \overline{12} \\ \overline{13} \\ \overline{24} \\ \overline{34} \end{array}} &= (2\hbar + z_1 - z_2)(2\hbar + z_2 - z_3)(2\hbar + z_3 - z_4)(3\hbar + z_1 - z_4), \\ \Psi_{\begin{array}{c} \overline{13} \\ \overline{13} \\ \overline{24} \\ \overline{24} \end{array}} &= (\hbar + z_2 - z_3)(2\hbar + z_2 - z_3)(3\hbar + z_1 - z_4)(4\hbar + z_1 - z_4). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что уравнения

$$\tau_i \Psi = \check{R}_i(z_i - z_{i+1}) \Psi, \quad i = 1, \dots, 3,$$

единственным образом задают R -матрицы

$$\check{R}_1(z) = \check{R}_3(z) = \begin{pmatrix} \frac{(\hbar - z)(2\hbar - z)}{(\hbar + z)(2\hbar + z)} & 0 & 0 \\ \frac{z(2\hbar - z)}{(\hbar + z)(2\hbar + z)} & \frac{2\hbar - z}{2\hbar + z} & 0 \\ \frac{-z(\hbar - z)}{(\hbar + z)(2\hbar + z)} & \frac{2z}{2\hbar + z} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\check{R}_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2z}{2\hbar + z} & \frac{-z(\hbar - z)}{(\hbar + z)(2\hbar + z)} \\ 0 & \frac{2\hbar - z}{\hbar + z} & \frac{z(2\hbar - z)}{(\hbar + z)(2\hbar + z)} \\ 0 & 0 & \frac{(\hbar - z)(2\hbar - z)}{(\hbar + z)(2\hbar + z)} \end{pmatrix}$$

и что эти матрицы удовлетворяют уравнениям (1)–(3).

Кроме того, Ψ удовлетворяет примечательному условию цикличности (см. соотношение (18))

$$\Psi(z_2, z_3, z_4, z_1 + 5\hbar) = \rho \Psi(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

где $\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (тот факт, что $\rho^2 = 1$, объясняет равенство $\check{R}_1(z) = \check{R}_3(z)$).

Наконец, Ψ удовлетворяет условию колеса:

$$\begin{aligned} \Psi(z, z + 2\hbar, z + 4\hbar, \cdot) &= \Psi(z, z + 2\hbar, \cdot, z + 4\hbar) = \\ &= \Psi(z, \cdot, z + 2\hbar, z + 4\hbar) = \Psi(\cdot, z, z + 2\hbar, z + 4\hbar) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы перейти к устойчивому базису, необходимо деформировать $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{Z}_0$, выбирая слой при общих значениях отображения моментов или, эквивалентно, деформируя замыкание нильпотентной орбиты $\{X^4 = 0\}$ в обычную орбиту

$$\left\{ \prod_{a=1}^4 (X - t_a) = 0, \quad \det(x - X) = \prod_{a=1}^4 (x - t_a)^{\lambda_a} \right\}$$

(мы обсуждали это ранее с А. Кнутсоном). При этом мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} A^2 B + B^2 - e_1 AB + e_2 B + e_4 &= 0, \\ B A^2 + B^2 - e_1 BA + e_2 B + e_4 &= 0, \\ A^3 + AB + BA - e_1(A^2 + B) + e_2 A - e_3 &= 0, \end{aligned}$$

где e_i суть элементарные симметричные многочлены от t_i . Деформация $\mathfrak{Z}_t$ величины $\mathfrak{Z}_0$ соответствует выбору A и B как верхнетреугольных (не строго верхнетреугольных) матриц, в которых диагональные элементы задают компоненты устойчивого базиса. В данном случае собственные значения матрицы A имеют вид $t_i + t_j$,

$1 \leq i < j \leq 4$, что отвечает весам алгебры $GL(4)$ на L_{ω_2} . Чтобы выбрать пространство весов, следует удерживать только компоненты максимальной размерности или наложить дополнительное ограничение на характеристический многочлен от переменных X , отмеченное выше.

Коэффициенты замены базиса получаются при применении плоского предела $t_i \rightarrow 0$: каждый предел $\mathfrak{Z}'_{0,\alpha}$ неприводимой компоненты $\mathfrak{Z}'_{t,\alpha}$ в наборе $\mathfrak{Z}_t$ представляет собой объединение компонент $\mathfrak{Z}_{0,\beta}$ с кратностью $|c_\alpha^\beta|$. Мы не будем здесь выписывать все c_α^β в явном виде, так как уже при размере матриц, равном 4, пространство $L_{\omega_2}^{\otimes 4}$ решений нулевого веса имеет размерность 90. Вместо этого приведем выражение только для одной компоненты, отвечающей $\alpha = (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\})$:

$$\mathfrak{Z}'_{t,\alpha} = \left\{ A, B: \begin{aligned} A_{i,i} &= \sum_{a \in \alpha_i} t_a, \quad B_{i,i} = - \prod_{a \in \alpha_i} t_a, \\ B_{2,3}A_{3,4} + (t_3 - t_2)B_{2,4} + t_3A_{2,3}A_{3,4} + t_3(t_3 - t_2)A_{2,4} &= 0, \\ A_{1,2}B_{2,3} + (t_2 - t_3)B_{1,3} + t_2A_{1,2}A_{2,3} + t_2(t_2 - t_3)A_{1,3} &= 0, \\ A_{1,2}B_{2,4} + B_{1,3}A_{3,4} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,4} + t_2A_{1,3}A_{3,4} + t_3A_{1,2}A_{2,4} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

В пределе $t_i \rightarrow 0$ для $\mathfrak{Z}'_{0,\alpha}$ получаем объединение взятых с кратностью единица компонент $Z_{0, \begin{smallmatrix} 12 \\ 12 \\ 34 \\ 34 \end{smallmatrix}}$ и $\mathfrak{Z}_{0, \begin{smallmatrix} 12 \\ 13 \\ 24 \\ 34 \end{smallmatrix}}$.

Благодарности. Автор выражает признательность А. Кнутсону за обсуждения и ценные замечания в ходе совместной работы, а также В. Горбунову, Д. Маулику, А. Окунькову и Н. Решетихину за многочисленные обсуждения. Компьютерные проверки результатов работы были проведены с применением программы Macaulay2 [22].

Список литературы

- [1] V. Ginzburg, M. Kapranov, E. Vasserot, *Elliptic algebras and equivariant elliptic cohomology*, [arXiv:q-alg/9505012](#).
- [2] V. Ginzburg, M. Kapranov, E. Vasserot, *Adv. Math.*, **214**:1 (2007), 40–77, [arXiv:math/0503224](#).
- [3] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, *J. Phys. A*, **38**:48 (2005), L815–L822, [arXiv:math-ph/0508059](#).
- [4] D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, [arXiv:1211.1287](#).
- [5] R. Rimányi, V. Tarasov, A. Varchenko, P. Zinn-Justin, *J. Geom. Phys.*, **62**:11 (2012), 2188–2207, [arXiv:1110.2187](#).
- [6] H. Nakajima, *Duke Math. J.*, **76**:2 (1994), 365–416.
- [7] H. Nakajima, *Duke Math. J.*, **91**:3 (1998), 515–560.
- [8] H. Nakajima, *J. Amer. Math. Soc.*, **14**:1 (2001), 145–238, [arXiv:math/9912158](#).
- [9] H. Nakajima, *Invent. Math.*, **146**:2 (2001), 399–449, [arXiv:math/0103008](#).
- [10] V. Ginzburg, “Lectures on Nakajima’s quiver varieties”, *Geometric Methods in Representation Theory. I* (Grenoble, France, June 16–July 4, 2008), Séminaires et Congrès, **24**, ed. M. Brion, Société Mathématique de France, Paris, 2012, 145–219, [arXiv:0905.0686](#).
- [11] I. Mirković, M. Vybornov, *Quiver varieties and Beilinson–Drinfeld Grassmannians of type A*, [arXiv:0712.4160](#).

- [12] N. Spaltenstein, *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*, Lecture Notes in Mathematics, **946**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [13] S. Khoroshkin, “Central extension of the Yangian double”, *Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants* (Franco-Belge, Reims, June 1995), Séminaires et Congrès, **2**, ed. J. Alev, G. Cauchon, Société Mathématique de France, Paris, 1997, 119–135, arXiv: q-alg/9602031.
- [14] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak, *Phys. Lett. A*, **222**:6 (1996), 381–392, arXiv: q-alg/9602030.
- [15] S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak, *Lett. Math. Phys.*, **41**:1 (1997), 31–47, arXiv: q-alg/9605039.
- [16] A. Nakayashiki, *Commun. Math. Phys.*, **212**:1 (2000), 29–61, arXiv: math/9902139.
- [17] V. Tarasov, A. Varchenko, *Invent. Math.*, **128**:3 (1997), 501–588.
- [18] I. Frenkel, N. Reshetikhin, *Commun. Math. Phys.*, **146**:1 (1992), 1–60.
- [19] M. Idzumi, T. Tokihiro, K. Iohara, M. Jimbo, T. Miwa, T. Nakashima, *Internat. J. Modern Phys. A*, **8**:8 (1993), 1479–1511, arXiv: hep-th/9208066.
- [20] A. Ponsaing, P. Zinn-Justin, *Type $\hat{C}$ brauer loop schemes and loop model with boundaries*, arXiv: 1410.0262.
- [21] I. Cherednik, *Commun. Math. Phys.*, **150**:1 (1992), 109–136.
- [22] D. Grayson, M. Stillman, “Macaulay2”, A software system for research in algebraic geometry, <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>.