Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Боро, Расширенная топологическая рекурсия, *ТМФ*,
2015, том 185, номер 3, 423–437

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8896>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:08:18

© 2015 г.

Г. Боро*

РАСШИРЕННАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РЕКУРСИЯ

Описан формализм и свойства расширенной топологической рекурсии, которая позволяет получить общее решение набора абстрактных петлевых уравнений. Эта процедура расширяет известный метод топологической рекурсии за счет добавления дополнительных членов (блобов) в начальные условия для каждого мультидифференциала $\omega_{g,n}$. Данный формализм применен к топологической рекурсии формальной эрмитовой матричной модели (блобы при этом необходимы для описания произвольного взаимодействия). Сформулированы некоторые нерешенные задачи.

Ключевые слова: топологическая рекурсия, петлевые уравнения, число пересечения, матричные модели.

DOI: 10.4213/tmf8896

Настоящая статья представляет собой короткую предварительную версию расширенной электронной публикации [1].

1. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

В перечислительной геометрии поверхностей возникают различные функциональные уравнения: условия Вирасоро (в матричных моделях и теории чисел пересечения над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$), уравнения Тутте (в перечислении отображений), уравнения разрезания и склейки (в перечислении накрытий) и т. д. Эти уравнения имеют весьма схожую природу, основанную на рекурсивных построениях ориентируемых поверхностей. В работе [2] абстрактные петлевые уравнения были введены для того, чтобы попытаться записать универсальный набор уравнений, к которым можно свести указанные выше функциональные уравнения, возможно, после применения некоторых технических приемов, специфических для каждого типа уравнений.

1.1. Абстрактные петлевые уравнения. Обозначим через U_i , $i \in I$, конечный набор открытых множеств, каждое из которых представляет собой комплексное

Участие автора в конференции “Комбинаторика пространств модулей, кластерные алгебры и топологическая рекурсия” было поддержано грантом PARCECO и грантом Max-Planck Gesellschaft.

*Max Planck Institut für Mathematik, Bonn, Germany. E-mail: gborot@mpim-bonn.mpg.de

Рис. 1. Разветвленное накрытие $x: U_i \rightarrow V_i$ в окрестности точки ветвления α_i

многообразие размерности один с выделенной точкой $\alpha_i \in U_i$. В качестве многообразий U_i можно взять произвольно малые окрестности точек α_i , так как нашей скрытой целью является рассмотрение зародышей функций и дифференциальных форм в точках α_i . Будем предполагать, что множество U_i включается в набор вместе со своим накрытием $\{x: U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbb{C}\}$, имеющим точку ветвления в точке α_i . Также предполагается, что все точки ветвления простые, т. е. α_i – простые нули дифференциала dx , хотя теорию можно переформулировать, включив разветвления старших порядков, следуя работам [3], [4]. Тогда имеет место отображение $\iota: U_i \rightarrow U_i$, т. е. голоморфное отображение такое, что $x(\iota(z)) = x(z)$, но $\iota \neq \text{id}$ (см. рис. 1). Переменная x на самом деле определена на множестве U , представляющем собой несвязное объединение множеств U_i ; через $A = \{\alpha_i, i \in I\}$ будем обозначать набор его точек ветвления. Пусть $\Omega^1(U; A)$ – пространство мероморфных форм на U с полюсами только в точках множества A , а $H^1(U)$ – пространство голоморфных форм.

Рассмотрим семейство мультидифференциалов $(\omega_{g,n})$, занумерованных индексами $g \geq 0$ и $n \geq 1$, таких, что выполнены следующие условия: $\omega_{0,1}(z)$ есть голоморфная 1-форма от переменной $z \in U$, имеющая в точности двойной ноль в точке $z \in A$; $\omega_{0,2}(z_1, z_2)$ – мероморфный бидифференциал на множестве переменных $(z_1, z_2) \in U \times U$ с полюсом второго порядка при $z_1 = z_2$, с ведущим коэффициентом, равным единице, и с нулевыми вычетами:

$$\omega_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{\delta_{i,j} dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} + O(1), \quad (z_1, z_2) \in U_i \times U_j.$$

Наконец, при $2g - 2 + n > 0$ величины $\omega_{g,n} \in \text{Sym}^n(\Omega^1(U; A))$. По построению $\omega_{g,n} = 0$ при $g < 0$.

Будем называть абстрактными петлевыми уравнениями следующий набор условий, индексируемых парами (g, n) :

- Линейное петлевое уравнение: функция

$$\omega_{g,n}(z, z_2, \dots, z_n) + \omega_{g,n}(\iota(z), z_2, \dots, z_n)$$

имеет ноль при $z \rightarrow A$.

- Уравнение второго порядка: функция

$$\omega_{g-1,n+1}(z, \iota(z), z_I) + \sum_{\substack{J \subseteq I, \\ 0 \leq h \leq g}} \omega_{h,1+|J|}(z, z_J) \omega_{g-h,n-|J|}(\iota(z), z_{I \setminus J})$$

имеет ноль при $z \rightarrow A$.

1.2. Топологическая рекурсия. Общее решение абстрактных петлевых уравнений можно описать следующим образом. Зададим ядро рекурсии

$$K(z, z_0) = \frac{\int_{\iota(z)}^z \omega_{0,2}(\cdot, z_0)}{2[\omega_{0,1}(z) - \omega_{0,1}(\iota(z))]} \quad (1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $2g - 2 + n > 0$ найдутся $\phi_{g,n} \in H^1(U) \otimes \text{Sym}^{n-1}(\Omega^1(U; A))$ такие, что

$$\begin{aligned} \omega_{g,n}(z_0, z_I) &= \phi_{g,n}(z_0, z_I) + \\ &+ \sum_i \text{Res}_{z \rightarrow \alpha_i} K(z_0, z) \left[\omega_{g-1,n+1}(z, \iota(z), z_I) + \sum_{\substack{J \subseteq I, \\ 0 \leq h \leq g}}^* \omega_{h,1+|J|}(z, z_J) \omega_{g-h,n-|J|}(\iota(z), z_{I \setminus J}) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где символ $\sum^*$ обозначает исключение членов, содержащих $\omega_{0,1} \omega_{g,n}$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. В совокупности петлевые уравнения предполагают, что $\omega_{g,n}(z_0, z_I)$ минус сумма вычетов в правой части уравнений (2) представляет собой голоморфную 1-форму относительно $z_0 \in U$ [2].

В ранней версии настоящей работы высказывалось предположение, что можно доказать симметричность величин $\phi_{g,n}$ по всем их аргументам. Впоследствии оказалось, что это утверждение ошибочно, а правильная полная структура величин $\phi_{g,n}$ задается в работе [1]: существует последовательность $\varphi_{g,n} \in \text{Sym}^n H^1(U)$, нумеруемая параметрами $g \geq 0$ и $n \geq 1$, такая, что $\phi_{g,n}$ можно выразить в терминах $\varphi_{g',n'}$ с $2g' - 2 + n' \leq 2g - 2 + n$ и $\omega_{g',n'}$ с $2g' - 2 + n' < 2g - 2 + n$. На данном этапе ограничимся просто описанием процесса, отсылая читателя к работе [1] за явными формулами.

Подводя итог, отметим, что, как только заданы $\omega_{0,1} = \varphi_{0,1}$ и $\omega_{0,2} = \varphi_{0,2}$, имеет место взаимно однозначное соответствие между решениями абстрактных петлевых уравнений и $\bigoplus_{2g-2+n>0} \text{Sym}^n H^1(U)$. Будем называть *расширенной топологической рекурсией* отображение из этих “начальных данных” ($\varphi_{g,n}$) в решение ($\omega_{g,n}$). Мы имеем соотношение рекурсии по параметру $2g - 2 + n > 0$, который представляет собой взятую со знаком минус эйлерову характеристику римановой поверхности рода g с n граничными компонентами.

В различных примерах это замечание приобретает геометрический смысл. При $\varphi_{g,n} \equiv 0$, что также соответствует $\phi_{g,n} \equiv 0$, это определение оказывается стандартной топологической рекурсией, введенной в работе [5]. При подходящем выборе начальных данных $(\omega_{0,1}, \omega_{0,2})$ коэффициенты разложения величин $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ по подходящему базису дифференциальных форм оказываются равны индексам пересечения (“объемам” пространств модулей) для поверхностей рода g с n граничными компонентами: мы получаем объемы Вейля–Петерсона пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ [6], числа пересечения ψ и κ классов на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ [7], [8], открытые инварианты Громова–Виттена на торических трехмерных многообразиях Калаби–Яу [9], [10], стационарные инварианты Громова–Виттена проективной прямой $\mathbb{P}^1$, простые числа Гурвица [11]–[13] и т.д.; список, по-видимому, будет расширяться и расширяться. В докладах Дунина–Барковского, Эйнарда, Казаряна и Зографа, Норбери были описаны некоторые из новых результатов.

Как объясняется ниже, односледовые и двухследовые эрмитовы матричные модели (как формально заданные, так и сходящиеся) образуют еще один класс моделей, в котором появление обычной топологической рекурсии хорошо понято с технической точки зрения [14], [15]. В работе [16] было показано, что при изучении эрмитовых моделей более общего вида необходимо введение блобов. Также было обнаружено, что блобы и непертурбативные эффекты в матричных моделях имеют похожую природу, требующую дальнейших исследований. Эти два аспекта иллюстрируются в разделе 4.

Мы верим, что расширенная топологическая рекурсия является универсальной структурой, лежащей в основе квазиклассического обобщения топологических конформных теорий поля, и наоборот, что возможно построение топологических конформных теорий поля в рамках метода топологической рекурсии.

1.3. Диаграммное представление. Короткая запись в виде диаграммы лучше, чем длинные уравнения.

Можно представить $\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ (блов $\phi_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$) в виде серой вершины (соответственно черной вершины), декорированной g абстрактными “ручками”, с n внешними линиями, нумерованными точками $z_1, \dots, z_n \in U$. Формулу (2) можно представить в графическом виде следующим образом:

Трехвалентная вершина без параметров описывает действие оператора рекурсии.

Если раскрыть соотношения рекурсии в отсутствии блобов, то $\omega_{g,n}$ рассчитывается как сумма по трехвалентным, циклически упорядоченным графам рода g с n помеченными внешними линиями [5]. В присутствии блобов, кроме трехвалентных вершин, допускаются новые k -валентные вершины, несущие “род” h ; эти новые вершины входят с весами $\phi_{h,k}(z_1, \dots, z_k)$, если ребра, инцидентные этим вершинам, несут индексы $z_1, \dots, z_k$. Тем самым $\omega_{g,n}$ представляет собой сумму по графам с n внешними линиями, имеющим род g' , равный g минус сумма родов новых вершин.

2. ЭРМИТОВЫ МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

2.1. Модели с однократным следом. Эрмитова матричная модель (с одной операцией взятия следа) представляет собой меру на пространстве эрмитовых матриц размера $N \times N$:

$$dM \exp(N \operatorname{Tr} T_{0,1}(M)).$$

Здесь мы рассмотрим n -точечные корреляционные функции

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \operatorname{Tr} \frac{1}{x_1 - M} \dots \operatorname{Tr} \frac{1}{x_n - M} \right\rangle. \quad (3)$$

Имеются два способа определить эту модель. Если T_1^0 – функция, выбранная таким образом, что матричный интеграл сходится, то $W_n(x_1, \dots, x_n)$ суть функции от $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, и можно исследовать их асимптотическое разложение во всех порядках при $N \rightarrow \infty$. Асимптотический анализ при этом оказывается довольно тонкой задачей, строгие методы исследования которой вошли в повестку дня совсем недавно; основные результаты собраны в п. 2.5.

Чтобы отделить функциональный анализ от алгебры, определим также формальные матричные модели: выберем

$$T_1^0(x) = -\frac{x^2}{2} + \sum_{j \geq 3} t_j \frac{x^j}{j},$$

где t_j – формальные параметры, и тогда можно ввести

$$W_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[[t_3, t_4, \dots]] [[x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]].$$

В основополагающей работе [17] было показано, что $W_n(x_1, \dots, x_n)$ – производящие ряды связных дискретных поверхностей, получаемых склейками набора многоугольников (т. е. двумерных клеток с топологией диска) вдоль своих ребер; среди этих многоугольников имеются n отмеченных. Каждая неотмеченная грань периметра k учитывается с весом t_k , а i -я отмеченная грань входит с весом $x_i^{-(\ell_i+1)}$, если ее периметр равен ℓ_i . Если полная поверхность имеет род g , то ее полный вес равен множителю N^{2-2g-n} , деленному на число автоморфизмов поверхности. Таким образом, в контексте формальных матричных моделей из комбинаторики непосредственно следует разложение в формальный ряд топологической природы:

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{g \geq 0} N^{2-2g-n} W_{g,n}(x_1, \dots, x_n). \quad (4)$$

Из формулы Эйлера прямо следует, что для заданного монома по временам t только конечное число родов g дает вклад в сумму, так что правая часть оказывается корректно определенной.

Здесь уместен короткий экскурс в историю вопроса. Односледовая эрмитова матричная модель была всесторонне исследована в случае, когда в качестве отправной точки выбрано соотношение (4). Метод моментов, изобретенный в работе [18], позволил вычислить $W_{g,n}$ путем рекурсии по $2g - 2 + n$. Этот метод был впоследствии переформулирован в терминах топологической рекурсии в работе [19] как попытка придать рекурсионным соотношениям более канонический, внутренне геометрический вид.

2.2. Многоследовая модель. Рассмотрим более общий класс моделей, содержащих члены с двойными следами,

$$dM \exp(N \operatorname{Tr} T_{0,1}(M) + \operatorname{Tr} T_{0,2}(M \otimes \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes M)), \quad (5)$$

и еще более общие, произвольные многоследовые взаимодействия:

$$dM \exp \left(\sum_{k \geq 1} \sum_{h \geq 0} \frac{N^{2-2h-k}}{k!} \operatorname{Tr} T_{h,k}(M_1^{(k)}, \dots, M_k^{(k)}) \right), \quad (6)$$

где $M_i^{(k)}$ – тензорное произведение $k-1$ единичных матриц и одной матрицы M , стоящей на i -м месте. Это индуцирует распределение собственных значений $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ матрицы M , имеющее вид

$$\prod_{i=1}^N d\lambda_i \prod_{1 \leq i < j \leq N} |\lambda_i - \lambda_j|^2 \exp \left(\sum_{k \geq 1} \sum_{h \geq 0} \frac{N^{2-2h-k}}{k!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N} T_{h,k}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}) \right). \quad (7)$$

В рамках формального подхода положим

$$T_{h,k}(x_1, \dots, x_k) = -\delta_{k,1} \delta_{h,0} \frac{x_1^2}{2} + \sum_{m_1, \dots, m_k \geq 1} \frac{t_{h;m_1, \dots, m_k}}{m_1 \dots m_k} x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}.$$

Тогда прямым обобщением метода работы [17] получим, что $W_{g,n}(x_1, \dots, x_n)$ суть производящие ряды связных дискретных поверхностей рода g с n отмеченными и пронумерованными гранями, которые получаются склейками двумерных клеток произвольной топологии: двумерная клетка, являющаяся топологической поверхностью рода h с k границами в виде многоугольников с периметрами $m_1, \dots, m_k$, входит с весом $t_{h;m_1, \dots, m_k}$. Зависимость меры (6) от N означает, что дискретные поверхности по-прежнему входят с весами N^χ , отвечающими их эйлеровым характеристикам $\chi = 2 - 2g - n$. Утверждение, лежащее в основе всех результатов, связывающих матричные модели и (расширенную) топологическую рекурсию, которое представлено ниже, состоит в том, что уравнения Швингера–Дайсона (т.е. соотношения между корреляционными функциями, получающиеся интегрированием по частям) можно переписать в рамках $1/N$ -разложения в виде абстрактных петлевых уравнений.

2.3. Примеры. При наличии сходимости наиболее интересный класс примеров относится к двухследовой модели, т.е. к случаю $T_{h,k} = 0$ для $2h - 2 + k > 0$, но с ненулевым парным взаимодействием $T_{0,2}$. Приведем некоторый неполный список моделей.

А. Замена определителя Вандермонда его (q, t) -деформированной версией, которую можно определить для произвольной допустимой пары корневых систем и которая возникает в теории полиномов Макдональда [20]. Для A -серии имеем

$$\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \longrightarrow \prod_{i < j} \frac{(e^{u_i - u_j}, q)_\infty (e^{-(u_i - u_j)}, q)_\infty}{(te^{u_i - u_j}, q)_\infty (te^{-(u_i - u_j)}, q)_\infty}.$$

В. Матричные модели в геометриях, отличных от $\mathbb{C}$. Определитель Вандермонда в сущности имеет вид $e^{\sum_{i < j} 2G(\lambda_i, \lambda_j)}$ где G – функция Грина комплексной плоскости. Ее обобщение состоит в замене на $-\ln E(\lambda_i, \lambda_j)$, где переменные λ_i заданы на кривой на римановой поверхности, а E – примарная форма. Эта замена имеет место, например, в интегральных выражениях Доценко–Фатеева для конформных блоков.

В обоих указанных случаях локальное поведение при $\lambda_i \rightarrow \lambda_j$ то же самое, что и для обычного определителя Вандермонда, так что оба случая **А** и **В** можно записать в виде (7) с $T_{0,2} \neq 0$.

Продолжим список моделей.

Д. Статистическая сумма теории Черна–Саймонса на $\mathbb{S}_3/G$, где G – конечная подгруппа изометрий. Эта подгруппа укладывается в ADE-классификацию и может быть параметризована своими символами Шлефли $(a_1, \dots, a_m)$. Например, группа E_8 представляет собой группу симметрий группы икосаэдра (порядка 120), ее символ имеет вид $(2, 3, 5)$, а пространство $\mathbb{S}_3/G$ гомологично сфере Пуанкаре. Для калибровочной группы $SU(N)$ статистическая сумма включает гауссов потенциал и член взаимодействия [21], [22]:

$$T_{0,2}(x, y) = \sum_{i=1}^m \psi\left(\frac{x-y}{a_i}\right), \quad \psi(x) = \ln \operatorname{sh} \frac{x}{2}. \quad (8)$$

Анализ этой модели с точки зрения топологической рекурсии был проведен в [23], [24].

Д. Матричная модель $O(n)$ [25]. В этой модели имеется произвольный полиномиальный потенциал $T_{0,1}$ и парное взаимодействие

$$T_{0,2}(x, y) = -\frac{n}{2} \ln(x + y).$$

Собственные значения ограничены на полупрямую $\mathbb{R}_+$, и с помощью тонкой настройки коэффициентов многочлена $T_{0,1}$ можно добиться того, чтобы спектральная мера приближалась к нулю и давала непрерывное семейство локальных распределений собственных значений в нуле, параметризованное параметром $n \in [-2, 2]$.

Имеются два примера, связанных с общей многоследовой моделью.

Е. Все модели из статистической физики (петлевая $O(n)$ -модель, модель Поттса, модель Изинга и т. д.) на случайной двумерной решетке могут быть записаны как многоследовые модели.

Е. Статистическая сумма $SU(N)$ -модели Черна–Саймонса на сфере M с рациональными гомологиями. Эта модель также называется интегралом Орхуса на M и строится из интеграла Концевича. В этом случае для калибровочной группы $SU(N)$ при заданной M существует последовательность $t_{h;m_1, \dots, m_k}$ [26], но ее вычисление весьма затруднительно¹⁾. Цветные инварианты ХОМФЛИ линков в M можно вывести из интеграла Концевича как статистические средние определенных наблюдаемых, вычисленные с мерой (6).

2.4. Применения топологической рекурсии. Представленные ниже результаты основаны на анализе уравнений Швингера–Дайсона, т. е. соотношений между корреляционными функциями, которые получаются интегрированиями по частям в интеграле. Дискретные поверхности можно разложить, если стереть отмеченное ребро на их первой отмеченной грани. Это обеспечивает биекцию между множествами дискретных поверхностей с различными топологиями (называемую соотношениями Тутте), которая приводит к функциональным соотношениям на величины $W_{g,n}$, совпадающим с уравнениями Швингера–Дайсона.

¹⁾Тем самым, хотя в принципе расширенная топологическая рекурсия может быть применена в данном случае (см. рис. 3 ниже), ее не удастся приспособить для явного вычисления инвариантов узлов, кроме случаев самых простых M типа факторпространств сферы $\mathbb{S}_3$, описывающихся соотношением (8). Тем не менее было бы интересно узнать, имеет ли отображение факторизации r_2 какой-либо смысл в теории интеграла Концевича.

Рис. 2. Конформное отображение комплексной плоскости со щелью во внешность единичного круга: $x(z) = \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{2} + \frac{\gamma_+ - \gamma_-}{4} \left(z + \frac{1}{z}\right)$. Отображение соответствия имеет вид $\iota(z) = 1/z$.

На некоторое время ограничимся обсуждением только формальной матричной модели. Формальный ряд по переменным $t_{h;m_1, \dots, m_k}$ задается совокупностью своих значений в случаях, когда только конечное число этих параметров отлично от нуля. Можно показать, что формальный ряд имеет ненулевой радиус сходимости, так что всегда можно присвоить конечному числу параметров $t_{h;m_1, \dots, m_k}$ заданные и достаточно малые ненулевые значения. До того как перейти к вычислению $W_{g,n}$, необходимо исследовать их основные свойства аналитичности [16].

1. Ряд $W_{g,n}(x_1, \dots, x_n)$ – разложение Лорана при $x_i \rightarrow \infty$ функции, голоморфной в области $\mathbb{C} \setminus [\gamma_-, \gamma_+]$, которую мы тоже обозначим через $W_{g,n}$.

2. После конформного отображения из $\mathbb{C} \setminus [\gamma_-, \gamma_+]$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ (см. рис. 2) функция $\mathcal{W}_n^g(z_1, \dots, z_n) = W_{g,n}(x(z_1), \dots, x(z_n))$ записывается аналитически как мероморфная функция переменных z_i в некоторой кольцевой окрестности единичной окружности с полюсами в точках $z_i = \pm 1$ (образы точки $x = \gamma_{\pm}$ в z -плоскости).

Обозначив через $U_{\pm}$ две ι -инвариантные окрестности точек $z = \pm 1$, получим набор данных из раздела 1.

Свойства аналитичности 1 и 2 следуют из уравнений Тутте или из уравнений Швингера–Дайсона, и тогда из этих соотношений также вытекает, что величины

$$\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \mathcal{W}_{g,n}(z_1, \dots, z_n) dx(z_1) \dots dx(z_n) + \delta_{n,2} \delta_{g,0} \frac{dx(z_1) dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \quad (9)$$

удовлетворяют абстрактным петлевым уравнениям. Кроме того, мы нашли, что существует единственное решение петлевого уравнения, имеющее вид степенного ряда по весам $t_{h;m_1, \dots, m_k}$. Вследствие этого существует величина $\phi_{g,n}$, для которой расширенная топологическая рекурсия позволяет вычислить $\omega_{g,n}$ [16]. Можно это перефразировать как существование факторизации, основанной на расширенной топологической рекурсии отображения (см. рис. 3), которое связывает формальную матричную модель с ее корреляционными функциями.

2.5. Асимптотические результаты. В общем случае природа асимптотического разложения в сходящейся матричной модели существенно зависит от топологии спектральной кривой. Для упрощения конструкции предположим, что только конечное число времен $T_{h,k}(x_1, \dots, x_k)$ в выражении (7) отлично от нуля и что эти величины суть вещественно-аналитические функции на $\mathbb{R}^k$, достаточно быстро (полиномиальным образом) стремящиеся к $-\infty$ при $x_i \rightarrow \infty$. Тогда можно проверить,

Рис. 3. Отображение r_1 существует, но его трудно вычислить в многоследовой модели, в то время, как отображение r_2 имеет явный вид (см. приложение): величины $\phi_{g,n}$ можно вычислить в терминах параметров $\omega_{g',n'}$ при $2g' - 2 + n < 2g - 2 + n$ и $t_{m_1, \dots, m_k}^h$ для $h \leq g$. Для двухследовой модели (т. е. если $t_{m_1, \dots, m_k}^h = 0$ при $k \geq 3$), блобы отсутствуют: $\phi_n^g = 0$, если $2g - 2 + n > 0$, что и было найдено в работе [2].

что $N^{-1} W_1(x)$ имеет предельные точки при $N \rightarrow \infty$. Предположим, что существует единственная предельная точка. т. е. существует $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} W_1(x) = W_{0,1}(x)$. На практике это имеет место автоматически в односледовой модели и может быть доказано на основе некоторых предположений о выпуклости ядра взаимодействия $T_{0,2}(x_1, x_2)$ в двухследовой модели.

Затем можно показать, что $W_{0,1}(x)$ есть голоморфная функция от x во всей комплексной плоскости, кроме конечного числа s отрезков. Обозначим их объединение через Γ . Распределение при больших N выделенного собственного значения имеет плотность с носителем на Γ вида

$$\rho(x) = \frac{W_{0,1}(x - i0) - W_{0,1}(x + i0)}{2i\pi}. \quad (10)$$

Имеется представление, что у модели отсутствует критическое поведение. Грубо говоря, это означает, что число s отрезков в множестве Γ не меняется при малых возмущениях времен $T_{h,k}$, что и будет предполагаться в дальнейшем.

В случае, когда Γ состоит из единственного отрезка, на самом деле справедливо асимптотическое разложение топологического типа (4), и коэффициенты разложения совпадают с коэффициентами формальной матричной модели. Существование асимптотического разложения было строго доказано в работе [27] для односледовой модели и в работе [28] для многоследовой модели.

Имеет место следующее утверждение [27], [28].

ТЕОРЕМА 1. При $s = 1$ справедливо асимптотическое разложение

$$W_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \sum_{g \geq 0} N^{2-2g-n} W_{g,n}(x_1, \dots, x_n). \quad (11)$$

В случае, когда Γ состоит из $c \geq 2$ отрезков, асимптотическое поведение имеет осциллирующий характер. Этот результат был получен эвристически в работах [29], [30], доказан строго в работе [31] для односледовой модели и распространен на случай многоследовой модели в работе [28]. Результаты последней работы и будут использованы для детального описания всех объектов, встречающихся в асимптотическом разложении.

Для $c \geq 1$ введем следующие обозначения:

- $\epsilon^* \in [0, 1]^{c-1}$ – вектор парциальных масс плотности (10) на $c - 1$ отрезках;
- T – некоторая положительно определенная симметричная матрица размера $(c - 1) \times (c - 1)$;
- $du = (du_h(z))_{1 \leq h \leq c-1}$ – некоторый базис голоморфных форм, дуальный отрезку спектральной кривой, и $(\ell_h)_{1 \leq h \leq c-1}$ – базис дуальных линейных форм;
- для каждой пары $\mu, w \in \mathbb{C}^{c-1}$ введем тета-функцию Зигеля

$$\Theta_\mu(w|T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{c-1}} \exp \{ -T(m + \mu)(m + \mu) + w(m + \mu) \} \quad (12)$$

и обозначим через ∇_h ее производную по переменной w_h (для $1 \leq h \leq c - 1$).

ТЕОРЕМА 2. *Асимптотическое разложение дифференциальных форм*

$$W_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \delta_{n,1} N W_{0,1}(x) dx + \delta_{n,2} \frac{dx_1 dx_2}{(x_1 - x_2)^2}$$

задается суммой по связным графам, состоящим из l -валентных узлов ($l \geq 1$), представленных прямоугольниками, и k -валентными черными вершинами, несущими целочисленный индекс h (род), причем $2h - 2 + k > 0$. Графы имеют n внешних концов, занумерованных от 1 до n , и все ребра соединяют узлы с черными вершинами (см. пример на рис. 4). Вес графа получается путем:

- 1) присвоения внешним линиям внешних переменных $z_1, \dots, z_n$;
- 2) присвоения ребрам переменных интегрирований z'_e ;
- 3) присвоения локального веса $N^{2-2g+n} \omega_{h,k}(\{z'_e\})$ каждой k -валентной черной вершине рода h , где $\{z'_e\}$ – набор реберных переменных, инцидентных этой вершине; этот набор данных вычисляется с помощью расширенной топологической рекурсии с начальными данными $\omega_{0,1}$ и двухточечной функцией $\omega_{0,2}$, нормированной на нулевые периоды на отрезках, а блобы выражаются из данных $\omega_{0,1}$ и $\omega_{0,2}$ так же, как и в формальной матричной модели;
- 4) присвоения каждому узлу с l инцидентными внешними концами с индексами $\{i_1, \dots, i_l\}$ и k другими инцидентными ребрами локального веса

$$\sum_{h_1, \dots, h_{l+k}=1}^{c-1} (\nabla_{h_1} \cdots \nabla_{h_{l+k}} \Theta_{-\epsilon^*})(0|T) \bigotimes_{j=1}^l du_{h_j}(z_{i_j}) \bigotimes_{j'=1}^k \ell_{h'_{l+j'}};$$

- 5) перемножения всех локальных весов и для каждого ребра e , несущего переменную z_e , действия линейной формы (приходящей из узла) на дифференциальную форму от переменной z_e (приходящую из черной вершины).

Эти графы весьма близки к тем, которые получаются из расширенной топологической рекурсии. Было бы интересно (что до сих пор не сделано) представить вклады производных тета-функций в виде блоков. Трудность состоит в том, что тета-вершины не обладают топологической градуировкой.

Рис. 4. Пример графа, возникающего в порядке $O(N^{-9})$ разложения корреляционной функции W_6 .

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Большинство свойств топологической рекурсии из работы [5] остаются справедливыми в расширенной топологической рекурсии. Доказательство приведено в работе [1]. Здесь же мы вкратце опишем эти свойства.

3.1. Симметричность. В определении (2) первая переменная z_0 выделена по сравнению с остальными переменными $z_2, \dots, z_n$. Структура функции $\phi_{g,n}$, которая детально описана в работе [1], приводит к тому, что величины $\omega_{g,n}$ также оказываются симметричными.

3.2. Вариационные формулы. Удобно положить

$$\varphi_{0,1}(z) = \omega_{0,1}(z), \quad \varphi_{0,2}(z_1, z_2) = \omega_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{\delta_{i,j} dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}, \quad (13)$$

так что эти функции можно описывать в тех же терминах, что и бобы. При заданных h, k рассмотрим инфинитезимальную вариацию симметричных начальных данных $\varphi_{h,k} \rightarrow \varphi_{h,k} + t_{h,k} \kappa_{h,k}$ при $\kappa_{h,k} \in \text{Sym}^n(H^1(U))$ и при $t_{h,k} \rightarrow 0$. Очевидно, при $2g - 2 + n \leq 2h - 2 + k$ мы имеем

$$\partial \omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)|_{t_{h,k}=0} = \delta_{g,h} \delta_{k,n} \kappa_{h,k}(z_1, \dots, z_n). \quad (14)$$

Для мультидифференциалов, возникающих впоследствии в топологической рекурсии, т.е. на уровне $2g - 2 + n > 2h - 2 + k$, получим вариационную формулу

$$\partial \omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n)|_{t_{h,k}=0} = \int_{\kappa_{h,k}^*} \left(\sum_{\substack{K \vdash \{1, \dots, k\}, \\ J \vdash \{1, \dots, n\}: \\ [J]=[K]}} \sum_{\substack{g_1, \dots, g_{[J]} \geq 0: \\ 2-2g-n=S}} \prod_{i=1}^{[J]} \omega_{g_i, |J_i|+|K_i|}(z_{J_i}, \zeta_{K_i}) \right), \quad (15)$$

в которой второе суммирование под интегралом идет по $g_1, \dots, g_{[J]} \geq 0$ таким, что $2g - n = S = \sum_i (2 - 2g_i - n_i) + (2 - 2h - k)$, а сам интеграл есть k -линейная форма на пространстве мероморфных дифференциалов с интегрированием по переменным $\zeta_1, \dots, \zeta_k$. Напомним обозначения: $\zeta_{K_i} = (\zeta_l)_{l \in K_i}$ и $z_{J_i} = (z_j)_{j \in J_i}$; для

множества I символ $J \vdash I$ обозначает, что J представляет собой разбиение множества I на $[J]$ непустых подмножеств.

Выпишем “уравнения специальной геометрии” для деформаций формы $\omega_{0,1}$ и уравнения для деформаций $\varphi_{0,2}$ из работы [5]:

$$\begin{aligned}\partial\omega_{g,n}(z_I)|_{t_{0,1}=0} &= \int_{\kappa_{0,1}^*} \omega_{g,n+1}(z_I, \zeta), \\ \partial\omega_{g,n}(z_I)|_{t_{0,2}=0} &= \frac{1}{2} \int_{\kappa_{0,2}^*} \left(\omega_{g-1,n+2}(z_I, \zeta_1, \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{J \subseteq I, \\ 0 \leq h \leq g}} \omega_{h,|J|+1}(z_J, \zeta_1) \omega_{g-h,n-|J|+1}(z_{I \setminus J}, \zeta_2) \right).\end{aligned}$$

Эти вариационные уравнения можно применить для определения $F_g = \omega_{g,0}$ как такого функционала от начальных данных и бловов, что уравнение (15) выполняется при $n = 0$. Замкнутую формулу для F_g можно найти в работе [1].

3.3. Числа пересечения. Для произвольных начальных данных и бловов величины $\omega_{g,n}$ оказываются заданными в явном виде производящими рядами чисел пересечения тавтологических классов над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Это свойство было доказано в работах [7], [8] для обычной топологической рекурсии, и его можно переформулировать в терминах формализма Гивенталья, если заметить, что статистическую сумму, построенную из $\omega_{g,n}$, можно получить с помощью действия экспоненты от квадратичного дифференциального оператора на $Z_0 = \prod_i Z_{i,\text{WK}}$, где каждая $Z_{i,\text{WK}}$ есть копия статистической суммы Виттена–Концевича, задающей числа пересечения для ψ -классов [32], по одной такой копии на каждую точку ветвления. Это утверждение можно обобщить на случай расширенной топологической рекурсии [1], рассмотрев действие экспоненты от формального ряда мультилинейных дифференциальных операторов на Z_0 , коэффициенты разложения которого будут вычисляться из функций $(\varphi_{g,n})$.

3.4. Глобальные преобразования и симплектическая инвариантность. Предположим теперь, что имеет место глобальная геометрия. В простейшем случае это означает, что имеется компактная риманова поверхность Σ , области U_i суть ее открытые подмножества. В этом контексте бловы должны принадлежать конечномерному векторному пространству $\text{Sym}^n(H^1(\Sigma))$, имеющему размерность $\text{genus}(\Sigma)$ для $n = 1$. Будем также предполагать, что накрывающее отображение $x: \Sigma \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ является мероморфной функцией. Тогда можно определить вторую мероморфную функцию $y = \omega_{0,1}/dx$. Рассмотрим глобальные преобразования начальных данных для которых $(x, y) \rightarrow (x', y')$ – бирациональное преобразование с постоянным якобианом λ , а $\omega_{0,2}$ и бловы сохраняют исходный вид. Они порождаются следующими преобразованиями:

- $(x, y) \rightarrow (x, y + R(x))$, где R – рациональная функция от x , это преобразование сохраняет множество $(\omega_{g,n})$ при $2g - 2 + n > 0$;
- $(x, y) \rightarrow (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$, это преобразование умножает $\omega_{g,n}$ на постоянный множитель $(\lambda_1 \lambda_2)^{2-2g-n}$;
- $(x, y) \rightarrow (-y, x)$, это преобразование преобразует $\omega_{g,n}$ крайне нетривиальным образом.

В самом деле, $\omega_{g,n}$, получающиеся из $\omega_{0,1} = y dx$, вычисляются как суммы вычетов в нулях дифференциала dx , а $\hat{\omega}_{g,n}$, получающиеся из $\hat{\omega}_{0,1} = -x dy$, вычисляются как суммы вычетов в нулях дифференциала dy . Важным результатом теории оказывается существование мероморфных функций $f_{g,n}$ от n переменных, таких что

$$\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) - \hat{\omega}_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = d_{z_1} \cdots d_{z_n} f_{g,n}(z_1, \dots, z_n). \quad (16)$$

Преобразования с постоянным якобианом $\lambda = 1$ называются *симплектическими*, поскольку они сохраняют симплектическую форму $\Omega = dx \wedge dy$ на $\mathbb{C}^2$. Форму $\omega_{0,1}$ при этом можно рассматривать как ограничение первообразной от Ω на поверхность Σ , а утверждение о симплектической инвариантности означает, что для произвольных g, n когомологический класс формы $\omega_{g,n}$ не зависит от частного выбора первообразной. Отсюда также следует, что правильно нормированные величины $F_g = \omega_{g,0}$ оказываются инвариантами. В обычной топологической рекурсии свойство симплектической инвариантности было доказано в работе [33], это доказательство было улучшено для величин F_g в статье [34]. Представляется возможным обобщить это доказательство на случай расширенной топологической рекурсии.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расширенная топологическая рекурсия представляется подходящим инструментом для понимания общих свойств структуры топологической рекурсии. Она содержит в себе все ранее найденные решения петлевых уравнений.

Во многих приложениях блобы оказываются лишними, и представляется возможным использовать обычную топологическую рекурсию из работы [5]: это происходит, когда “несингулярная часть” величин $\omega_{g,n}$ имеет одну и ту же нормировку при всех n и g , например, на одном и том же симплектическом базисе гомологий глобальной спектральной кривой Σ . Так, в теории Громова–Виттена торических трехмерных многообразий Калаби–Яу $\mathfrak{X}$ торическая симметрия допускает применение техники локализации: подсчет поверхностей сводится к подсчету устойчивых отображений, левоинвариантных относительно торического действия. Тем самым все устойчивые компоненты поверхностей должны отображаться в точки многообразия $\mathfrak{X}$, и только неустойчивые компоненты (диски и цилиндры) дают нетривиальный вклад и определяют начальные данные $\omega_{0,1}$ и $\omega_{0,2}$, из которых все инварианты Громова–Виттена строятся с помощью топологической рекурсии [9], [10].

В п. 2.2 было показано, что в комбинаторных задачах подсчета дискретных поверхностей с элементарными 2-клетками произвольной топологии (и в частности, с клетками устойчивых топологий) необходимо привлекать блобы. Хотя теория Громова–Виттена априори представляет больший интерес, чем подсчет дискретных поверхностей, на основе этого наблюдения можно ожидать, что топологическая рекурсия с ненулевыми блобами имеет отношение к теории Громова–Виттена для неторических многообразий Калаби–Яу, в которых устойчивые компоненты, как ожидается, дают нетривиальные вклады.

Блобы определяют некоторый способ параметризации общего решения петлевых уравнений, но эта параметризация может оказаться не самой естественной с точки зрения приложений. Такой пример задается многоследовой матричной моделью или подсчетом дискретных поверхностей в п. 2.2, где крайне нелинейное отображение факторизации r_2 определяет замену переменных из потенциалов взаимодействия матричной модели на производящие ряды $t_{h;\ell_1, \dots, \ell_k}$ элементарных 2-клеток. Такое

же явление может иметь место в потенциально новых применениях к неторической теории Громова–Виттена, и остается увидеть, можно ли построить замену переменных между келеровскими параметрами и блобами в достаточно явном виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем явное рекуррентное соотношение для блобов, необходимое при отображении факторизации на рис. 3:

$$\phi_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \oint \omega_{0,2}(z_1, z) \mathcal{V}_{g,n}(z; z_2, \dots, z_n).$$

Здесь

$$\mathcal{V}_{g,n}(z; z_I) = \sum_{\substack{k \geq 2, \\ h \geq 0}} \sum_K \oint \frac{T_{h,k}(x(z); x(z'_2), \dots, x(z'_k))}{(k-1)!} \prod_{i=1}^{[K]} \omega_{f_i, |K_i|+|J_i|}(z'_{K_i}, z_{J_i}),$$

где второе суммирование идет по таким разбиениям K набора и таким $\{1, \dots, k\}$ и $f_1, \dots, f_{[K]} \geq 0$, что $K \vdash \{2, \dots, k\}$, $h + \sum_i f_i + k = g + |K|$ и $J_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} J_{[K]} = I$, а через $[K]$ обозначено число компонент разбиения; контурный интеграл берется вокруг разрезом ветвлений (в обсуждаемом случае z -плоскости этот интегрирование ведется по внешней стороне единичного круга).

Благодарности. Автор признателен организаторам конференции “Комбинаторика пространств модулей, кластерные алгебры и топологическая рекурсия” за проведение этого замечательного события.

Список литературы

- [1] G. Borot, S. Shadrin, *Blobbed topological recursion: properties and applications*, [arXiv: 1502.00981](#).
- [2] G. Borot, B. Eynard, N. Orantin, *Commun. Number Theory Phys.*, **9**:1 (2015), 51–187, [arXiv: 1303.5808](#).
- [3] V. Bouchard, J. Hutchinson, P. Loliencar, M. Meiers, M. Rupert, *Ann. Henri Poincaré*, **15**:1 (2014), 143–169, [arXiv: 1208.6035](#).
- [4] V. Bouchard, B. Eynard, *JHEP*, **02** (2013), 143, 34 pp., [arXiv: 1211.2302](#).
- [5] B. Eynard, N. Orantin, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 347–452, [arXiv: math-ph/0702045](#).
- [6] B. Eynard, N. Orantin, *Weil–Petersson volume of moduli spaces, Mirzakhani’s recursion and matrix models*, [arXiv: 0705.3600](#).
- [7] B. Eynard, *Ann. Henri Poincaré*, **12**:8 (2011), 1431–1447, [arXiv: 0706.4403](#).
- [8] B. Eynard, *Commun. Number Theory Phys.*, **8**:3 (2014), 541–588, [arXiv: 1110.2949](#).
- [9] V. Bouchard, A. Klemm, M. Mariño, S. Pasquetti, *Commun. Math. Phys.*, **287**:1 (2009), 117–178, [arXiv: 0709.1453](#).
- [10] B. Eynard, N. Orantin, *Commun. Math. Phys.*, **337**:2 (2015), 483–567, [arXiv: 1205.1103](#).
- [11] V. Bouchard, M. Mariño, “Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry”, *From Hodge Theory to Integrability and tQFT: tt*-geometry*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **78**, eds. R. Donagi, K. Wendland, AMS, Providence, RI, 2008, 263–283, [arXiv: 0709.1458](#).

- [12] B. Eynard, M. Mulase, B. Safnuk, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **47**:2 (2011), 629–670, arXiv: 0907.5224.
- [13] P. Dunin-Barkowski, M. Kazarian, N. Orantin, S. Shadrin, L. Spitz, *Adv. Math.*, **279** (2015), 67–103, arXiv: 1307.4729.
- [14] J. Ambjørn, L. O. Chekhov, C. Kristjansen, Yu. Makeenko, *Nucl. Phys. B*, **404**:1–2 (1993), 127–172, arXiv: hep-th/9302014.
- [15] B. Eynard, N. Orantin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:29 (2009), 293001, 117 pp., arXiv: 0811.3531.
- [16] G. Borot, *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, **1**:2 (2014), 225–264, arXiv: 1307.4957.
- [17] É. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J. B. Zuber, *Commun. Math. Phys.*, **59**:1 (1978), 35–51.
- [18] J. Ambjørn, L. O. Chekhov, Yu. Makeenko, *Phys. Lett. B*, **282**:3–4 (1992), 341–348, arXiv: hep-th/9203009.
- [19] B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp., arXiv: hep-th/0407261.
- [20] I. G. Macdonald, *Sém. Lothar. Combin.*, **45** (2000), B45a, 40 pp.
- [21] M. Mariño, *Commun. Math. Phys.*, **253**:1 (2004), 25–49, arXiv: hep-th/0207096.
- [22] M. Blau, G. Thompson, *JHEP*, **9** (2013), 033, 25 pp., arXiv: 1306.3381.
- [23] G. Borot, B. Eynard, A. Weiße, “Root systems, spectral curves, and analysis of a Chern–Simons matrix model for Seifert fibered spaces”, *Selecta Math.*, 2016 (to appear); arXiv: 1407.4500.
- [24] A. Brini, B. Eynard, M. Mariño, *Ann. Henri Poincaré*, **13**:8 (2012), 1873–1910, arXiv: 1105.2012.
- [25] I. K. Kostov, *Modern Phys. Lett. A*, **4**:3 (1989), 217–226.
- [26] S. Garoufalidis, M. Mariño, *On Chern–Simons matrix models*, arXiv: math/0601390.
- [27] S. Albeverio, L. Pastur, M. Shcherbina, *Commun. Math. Phys.*, **224**:1 (2001), 271–305.
- [28] G. Borot, A. Guionnet, K. Kozłowski, *Int. Math. Res. Notices*, **2015**:20 (2015), 10451–10524, arXiv: 1312.6664.
- [29] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**:38 (2000), 6739–6768, arXiv: cond-mat/0003324.
- [30] B. Eynard, *JHEP*, **03** (2009), 003, 20 pp., arXiv: 0802.1788.
- [31] G. Borot, A. Guionnet, *Asymptotic expansion of beta matrix models in the multi-cut regime*, arXiv: 1303.1045.
- [32] M. Kontsevich, *Commun. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23.
- [33] B. Eynard, N. Orantin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:1 (2008), 015203, 28 pp., arXiv: 0705.0958.
- [34] B. Eynard, N. Orantin, *About the x - y symmetry of the F_g algebraic invariants*, arXiv: 1311.4993.