Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Наканиши, Обобщенные квантовые кластерные алгебры и функции квантового дилогарифма старших степеней, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 3, 460–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 08:23:01

© 2015 г.

Т. Наканиши*

ОБОБЩЕННЫЕ КВАНТОВЫЕ КЛАСТЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИИ КВАНТОВОГО ДИЛОГАРИФМА СТАРШИХ СТЕПЕНЕЙ

Понятие квантования коэффициентов стандартных кластерных алгебр переносится на обобщенные кластерные алгебры, введенные Чеховым и Шапиро. Аналогично стандартному случаю эта конструкция тесно связана с определенными обобщениями стандартной функции квантового дилогарифма, названными функциями квантового дилогарифма старших степеней. В качестве приложения выводятся тождества, которым удовлетворяют эти обобщенные функции квантового дилогарифма, связанные с Y -зерном, имеющим период произвольной длины.

Ключевые слова: кластерная алгебра, функция квантового дилогарифма.

DOI: 10.4213/tmf8897

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные кластерные алгебры были введены Чеховым и Шапиро [1]. Они естественным образом обобщают (стандартные) кластерные алгебры Фомина и Зелевинского [2]. Основным отличительным свойством обобщенных кластерных алгебр является присутствие многочленов в обменных соотношениях для кластерных переменных и коэффициентов вместо биномов, присутствующих в соотношениях в стандартном случае. Оказалось, что обобщенные кластерные алгебры естественным образом возникают в пуассоновой динамике [3], теории Тейхмюллера [1], теории представлений [4], точном анализе методом ВКБ [5] и т.д. В работах [1], [6] было показано, что в сущности все важные свойства стандартных кластерных алгебр естественным образом переносятся на обобщенные кластерные алгебры.

В настоящей работе показано, что понятие *квантовой кластерной алгебры* также естественным образом переносится на случай обобщенных кластерных алгебр. Более точно, имеются две формулировки квантовых кластерных алгебр, в одной из которых квантуются кластерные переменные (см. работу [7]), а в другой – коэффициенты (см. работы [8], [9]). Известно, что эти две формулировки тесно связаны

*Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Nagoya, Japan.
E-mail: nakanisi@math.nagoya-u.ac.jp

друг с другом. В настоящей работе рассмотрен последний вариант квантования. Как было показано в работах [8], [9], в обычном случае квантование коэффициентов тесно связано с функцией квантового дилогарифма, введенной Фаддеевым [10], [11]. Схожим образом в обобщенном случае это квантование тесно связано с определенными обобщениями функции квантового дилогарифма, которые мы называем функциями *квантового дилогарифма старших степеней*. В качестве приложения выведены тождества для этих функций, связанные с квантовым Y -зерном с произвольным периодом, которые также аналогичны тождествам, возникающим в стандартном случае.

Основной вывод настоящей работы состоит в том, что все фундаментальные (возможно, вообще все) отличительные свойства квантовых кластерных алгебр переносятся на случай обобщенных кластерных алгебр.

2. ФУНКЦИИ КВАНТОВОГО ДИЛОГАРИФМА СТАРШИХ СТЕПЕНЕЙ

Сначала напомним некоторые основные свойства функций дилогарифма, q -дилогарифма и квантового дилогарифма.

Дилогарифмическая функция $\text{Li}_2(x)$ задается соотношением

$$\text{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Пусть q – формальная переменная. Функция q -дилогарифма определена следующим образом:

$$\mathcal{L}_{2,q}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(q^n - q^{-n})} = \frac{1}{q - q^{-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n[n]_q}, \quad (2.1)$$

где $[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ – стандартное q -число. Степенной ряд (2.1) сходится при $|x| < 1$ и $|q| < 1$ и имеет следующее асимптотическое поведение при $q \rightarrow 1 - 0$:

$$\mathcal{L}_{2,q}(x) \sim \frac{\text{Li}_2(x)}{q^2 - 1} \sim \frac{\text{Li}_2(x)}{\ln q^2}. \quad (2.2)$$

Это следует из второго равенства в (2.1) и того факта, что $\lim_{q \rightarrow 1} [n]_q = n$.

Следуя работам [10], [11] (с точностью до нормировок), введем функцию *квантового дилогарифма* $\Psi_q(x)$, заданную в виде формального степенного ряда по переменной x с коэффициентами из $\mathbb{C}(q)$:

$$\Psi_q(x) = \prod_{m=0}^{\infty} (1 + q^{2m+1}x)^{-1}.$$

В частности, квантовый дилогарифм $\Psi_q(x)$ следует отличать от q -дилогарифма $\mathcal{L}_{2,q}(x)$. Формальный степенной ряд $\Psi_q(x)$ характеризуется следующим рекурсивным соотношением с начальным условием:

$$\Psi_q(0) = 1, \quad \Psi_q(q^{\pm 2}x) = (1 + qx)^{\pm 1} \Psi_q(x), \quad (2.3)$$

где два соотношения, отвечающие знакам плюс и минус в последнем равенстве, эквивалентны. Слегка обескураживающее обстоятельство состоит в том, что квантовый дилогарифм оказывается экспонентой от q -дилогарифма, а именно

$$\Psi_q(x) = e^{-\mathcal{L}_{2,q}(-x)}. \quad (2.4)$$

Это свойство легко выводится из соотношений рекурсии (2.3).

Альтернативный способ состоит в задании дилогарифмической функции $\text{Li}_2(x)$ с помощью интеграла:

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x \ln(1-y) \frac{dy}{y} = - \int_0^{-x} \ln(1+y) \frac{dy}{y}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \ln \Psi_q(x) &= - \sum_{m=0}^{\infty} \ln(1 + q^{2m+1}x) = \\ &= - \frac{1}{1-q^2} \sum_{m=0}^{\infty} \ln(1 + q^{2m+1}x) \frac{q^{2m+1}x - q^{2m+3}x}{q^{2m+1}x} \sim \\ &\sim - \frac{1}{1-q^2} \int_0^x \ln(1+y) \frac{dy}{y} = \frac{1}{1-q^2} \text{Li}_2(-x), \quad q \rightarrow 1-0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Это полностью соответствует формулам (2.2) и (2.4).

Обобщим теперь функцию квантового дилогарифма $\Psi_q(x)$ на функции старших степеней. Для произвольного поля F обозначим через $F(q)$ поле рациональных функций от переменной q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть F – некоторое поле, d – положительное целое число, а $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{d-1})$ – набор из $d-1$ элементов поля F . При $d=1$ будем считать, что $\mathbf{z}$ – пустое множество. Положим $z_0 = z_d = 1$. Теперь определим формальный степенной ряд $\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x)$ от x с коэффициентами из $F(q)$:

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^d z_s q^{s(2m+1)} x^s \right)^{-1}. \quad (2.6)$$

При $d=1$ этот ряд представляет собой просто функцию квантового дилогарифма, $\Psi_{1,(),q}(x) = \Psi_q(x)$. Будем называть функцию $\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x)$ *квантовым дилогарифмом степени d с коэффициентами $\mathbf{z}$* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Формальный степенной ряд $\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x)$ задается следующим рекурсионным соотношением с начальным условием:

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(0) = 1, \quad (2.7)$$

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(q^{\pm 2}x) = \left(\sum_{s=0}^d z_s q^{\pm s} x^s \right)^{\pm 1} \Psi_{d,\mathbf{z},q}(x), \quad (2.8)$$

где два соотношения, отвечающие знакам плюс и минус в (2.8), эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Например, имеем

$$\begin{aligned}\Psi_{d,\mathbf{z},q}(q^2x) &= \prod_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^d z_s q^{s(2m+1)} q^{2s} x^s \right)^{-1} = \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^d z_s q^{s(2m+1)} x^s \right)^{-1} = \left(\sum_{s=0}^d z_s q^s x^s \right) \Psi_{d,\mathbf{z},q}(x).\end{aligned}$$

Остальные свойства доказываются тривиально.

Для произвольного целого a введем *функцию знака*

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} +, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -, & a < 0. \end{cases}$$

Здесь и далее знаки $\pm$ отождествляются с числами ± 1 .

В дальнейшем окажется полезным такое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *При произвольном целом a выполняется следующее равенство:*

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(q^{2a}x) = \left(\prod_{m=1}^{|a|} \left(\sum_{s=0}^d z_s q^{\operatorname{sgn}(a)(2m-1)s} x^s \right)^{\operatorname{sgn}(a)} \right) \Psi_{d,\mathbf{z},q}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно получить из (2.8) индукцией по a .

В некоторых случаях квантовые дилогарифмы старших степеней представляются как произведение обычных квантовых дилогарифмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Предположим, что при некоторых $w_1, \dots, w_d \in F$ имеет место следующее равенство:*

$$\sum_{s=0}^d z_s x^s = \prod_{s=1}^d (1 - w_s x). \quad (2.9)$$

Тогда справедлива формула факторизации

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x) = \prod_{s=1}^d \Psi_q(-w_s x). \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно непосредственно проследить факторизацию в (2.10), поскольку

$$\Psi_{d,\mathbf{z},q}(x) = \prod_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^d z_s q^{s(2m+1)} x^s \right)^{-1} = \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{s=1}^d (1 - w_s q^{2m+1} x)^{-1}.$$

Иначе говоря, при условии, что верно равенство (2.9), правая часть соотношения (2.10) удовлетворяет условиям (2.7) и (2.8). В силу предложения 2.2 получаем (2.10).

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим специальный случай, когда $F = \mathbb{C}$, а все коэффициенты $\mathbf{z}$ тривиальны, т. е. $\mathbf{z} = \mathbf{1} := (1, \dots, 1)$. В этом случае имеет место факторизация

$$\sum_{s=0}^d x^s = \prod_{s=1}^d (1 - \omega^s x), \quad (2.11)$$

где $\omega = e^{2\pi i/(d+1)}$. Отсюда в силу предложения 2.3 имеем

$$\Psi_{d,1,q}(x) = \prod_{s=1}^d \Psi_q(-\omega^s x). \quad (2.12)$$

С другой стороны, справедлива другая формула факторизации

$$\Psi_{d,1,q}(x) = \Psi_{q^{d+1}}(-x^{d+1})\Psi_q(-x)^{-1}. \quad (2.13)$$

Она возникает из альтернативного выражения для $\Psi_{d,1,q}(x)$:

$$\Psi_{d,1,q}(x) = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 - q^{2m+1}x}{1 - (q^{2m+1}x)^{d+1}}. \quad (2.14)$$

Тем самым в силу соотношений (2.2) и (2.4) получаем следующее асимптотическое поведение в пределе $q \rightarrow 1 - 0$:

$$\ln \Psi_{d,1,q}(x) \sim \frac{1}{1 - q^2} \sum_{s=1}^d \text{Li}_2(\omega^s x) \sim \frac{1}{1 - q^2} \left(\frac{1}{d+1} \text{Li}_2(x^{d+1}) - \text{Li}_2(x) \right).$$

На самом деле эти два выражения совпадают в силу хорошо известного соотношения для дилогарифмической функции $\text{Li}_2(x)$ (см. монографию [12], формула (1.14)):

$$\frac{1}{d+1} \text{Li}_2(x^{d+1}) = \sum_{s=0}^d \text{Li}_2(\omega^s x). \quad (2.15)$$

В качестве стороннего замечания отметим, что вследствие соотношения (2.4) из выражений (2.12) и (2.13) вытекает равенство

$$\mathcal{L}_{2,q^{d+1}}(x^{d+1}) = \sum_{s=0}^d \mathcal{L}_{2,q}(\omega^s x), \quad (2.16)$$

которое можно рассматривать как q -аналог соотношения (2.15). Формулу (2.16) можно также получить непосредственно из (2.1) и равенства

$$\sum_{s=0}^d \omega^{sn} = \begin{cases} d+1, & n \equiv 0 \pmod{d+1}, \\ 0, & n \not\equiv 0 \pmod{d+1}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим случай, когда $F = \mathbb{C}$, а коэффициенты $\mathbf{z}$ произвольны. Введем функцию *дилогарифма степени d с коэффициентами $\mathbf{z}$* с помощью интегрального представления:

$$\text{Li}_{2;d,\mathbf{z}}(x) = - \int_0^{-x} \ln \left(\sum_{s=0}^d z_s y^s \right) \frac{dy}{y}.$$

Тогда из вычислений, аналогичных (2.5), получим следующее асимптотическое соотношение:

$$\begin{aligned} \ln \Psi_{d, \mathbf{z}, q}(x) &= -\frac{1}{1-q^2} \sum_{m=0}^{\infty} \ln \left(\sum_{s=0}^d z_s (q^{2m+1} x)^s \right) \frac{q^{2m+1} x - q^{2m+3} x}{q^{2m+1} x} \sim \\ &\sim \frac{1}{1-q^2} \operatorname{Li}_{2; d, \mathbf{z}}(-x), \quad q \rightarrow 1-0. \end{aligned}$$

3. ОБОБЩЕННЫЕ МУТАЦИИ КВАНТОВЫХ Y -ЗЕРЕН

В этом разделе, следуя идеям работ [8], [9], введем квантовую версию обобщенных мутаций для обобщенных кластерных алгебр. Рассмотрение будет проведено на основе обобщенных кластерных алгебр из работы [6].

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – кососимметризуемая целочисленная матрица. Обозначим через $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ набор из n положительных чисел. При заданных B и $\mathbf{d}$ выберем произвольным образом набор из n положительных целых чисел $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ такой, что

$$r_i d_i b_{ij} = -r_j d_j b_{ji}. \quad (3.1)$$

Такой (неединственный) набор $\mathbf{r}$ существует благодаря кососимметризуемости матрицы B . Пусть по-прежнему q – формальная переменная; пусть $Y = (Y_i)_{i=1}^n$ есть набор из n некоммутирующих формальных переменных с коммутационными соотношениями

$$Y_i Y_j = q^{2r_j d_j b_{ji}} Y_j Y_i. \quad (3.2)$$

Эти соотношения непротиворечивы опять-таки в силу свойства кососимметризуемости в (3.1). Такую пару (B, Y) будем называть *квантовым Y -зерном*.

С использованием обозначений $q_i := q^{r_i d_i}$, $i = 1, \dots, n$, соотношения (3.2) можно также переписать в виде

$$Y_i Y_j = q_j^{2b_{ji}} Y_j Y_i = q_i^{-2b_{ij}} Y_j Y_i. \quad (3.3)$$

Пусть F – произвольное поле. Для вышеупомянутых $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ можно произвольным образом выбрать совокупность $\mathbf{z} = (z_{i,s})_{i=1, \dots, n; s=1, \dots, d_i-1}$ элементов поля F , удовлетворяющую *условию возвратности* [6]

$$z_{i,s} = z_{i, d_i - s}$$

(хотя применение символа $\mathbf{z}$ здесь несколько смешивается с его применением в определении 2.1, это оказывается довольно удобным приемом). Положим $z_{i,0} = z_{i,d_i} = 1$. Кроме того, введем обозначение $\mathbf{z}_i = (z_{i,s})_{s=1, \dots, d_i-1}$ для $i = 1, \dots, n$. В этих обозначениях можно представить связанный с таким преобразованием квантовый дилогарифм $\Psi_{d_i, \mathbf{z}_i, q_i}(x)$ степени d_i при каждом $i = 1, \dots, n$. Ниже предполагается, что любой элемент поля F коммутирует с переменными Y_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для квантового Y -зерна (B, Y) определим $(\mathbf{d}, \mathbf{z})$ -мутацию (обобщенную мутацию) $(B', Y') = \mu_k(B, Y)$ зерна (B, Y) в направлении k соотношениями

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & i = k \text{ или } j = k, \\ b_{ij} + d_k([-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik} [b_{kj}]_+), & i, j \neq k, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$Y'_i = \begin{cases} Y_k^{-1}, & i = k, \\ q_i^{b_{ik}d_k[\varepsilon b_{ki}]_+} Y_i Y_k^{d_k[\varepsilon b_{ki}]_+} \times \\ \times \prod_{m=1}^{|b_{ki}|} \left(\sum_{s=0}^{d_k} z_{k,s} q_k^{-\varepsilon \operatorname{sgn}(b_{ki})(2m-1)s} Y_k^{\varepsilon s} \right)^{-\operatorname{sgn}(b_{ki})}, & i \neq k, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\varepsilon = \pm$ и

$$[a]_+ = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases}$$

На самом деле правая часть соотношения (3.5) не зависит от знака ε (см. первое утверждение леммы 3.1 ниже). Будем называть наборы $\mathbf{d}$ и $\mathbf{z}$ соответственно *степенями мутации* и *замороженными коэффициентами* в соответствии с работой [6].

Если формально положить $q = 1$, то (3.5) сведется к соотношению

$$Y'_i = \begin{cases} Y_k^{-1}, & i = k, \\ Y_i Y_k^{d_k[\varepsilon b_{ki}]_+} \left(\sum_{s=0}^{d_k} z_{k,s} Y_k^{\varepsilon s} \right)^{-b_{ki}}, & i \neq k, \end{cases} \quad (3.6)$$

представляющему собой обобщенную мутацию коэффициентов (y -переменных) из обобщенных кластерных алгебр, введенных в работе [6]. С другой стороны, положив $d_k = 1$, мы можем свести это преобразование к обычной мутации квантовых Y -зерен, предложенной Фоком и Гончаровым [8], [9].

Легко проверить выполнение следующих свойств.

ЛЕММА 3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Правая часть соотношения (3.5) не зависит от знака ε .*
2. *Для матрицы B' выполнено условие*

$$r_i d_i b'_{ij} = -r_j d_j b'_{ji}.$$

3. *($\mathbf{d}, \mathbf{z}$)-Мутация инволютивна, т. е. $\mu_k(\mu_k(B, Y)) = (B, Y)$.*

В оставшейся части этого раздела мы покажем, что формула (3.5) задает “хорошее” квантование классического соотношения (3.6) в духе работ [8], [9].

Для начала рассмотрим действие

$$\operatorname{Ad}(\Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon))^\varepsilon(Y_i) := \Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon)^\varepsilon Y_i \Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon)^{-\varepsilon},$$

которое назовем *присоединенным действием* квантового дилогарифма $\Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon)$ на квантовых Y -переменных.

Следующая формула оказывается ключевой при установлении связи между обобщенными мутациями квантовых Y -зерен и функциями квантового дилогарифма старших степеней.

ЛЕММА 3.2. *Имеет место следующее равенство:*

$$\operatorname{Ad}(\Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon))^\varepsilon(Y_i) = Y_i \prod_{m=1}^{|b_{ki}|} \left(\sum_{s=0}^{d_k} z_{k,s} q_k^{-\varepsilon \operatorname{sgn}(b_{ki})(2m-1)s} Y_k^{\varepsilon s} \right)^{-\operatorname{sgn}(b_{ki})}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Например, в случае $\varepsilon = +$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k) Y_i \Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k)^{-1} &= Y_i \Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(q_k^{-2b_{ki}} Y_k) \Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k)^{-1} = \\ &= Y_i \prod_{m=1}^{|b_{ki}|} \left(\sum_{s=0}^{d_k} z_{k,s} q_k^{-\operatorname{sgn}(b_{ki})(2m-1)s} Y_k^s \right)^{-\operatorname{sgn}(b_{ki})}, \end{aligned}$$

где в первом и втором равенствах были соответственно использованы соотношение (3.2) и предложение 2.2. Случай $\varepsilon = -$ можно разобрать аналогично.

Правая часть соотношения (3.7), если исключить множитель Y_i , оказывается частью уравнения (3.5), и в работах [8], [9] при $d_k = 1$ она была названа “составляющей автоморфизма” соотношения (3.5).

Рассмотрим далее “мономиальную часть” соотношения (3.5). Положим

$$Z_i^{(\varepsilon)} := \begin{cases} Y_k^{-1}, & i = k, \\ q_i^{b_{ik} d_k [\varepsilon b_{ki}] +} Y_i Y_k^{d_k [\varepsilon b_{ki}] +}, & i \neq k. \end{cases} \quad (3.8)$$

Из леммы 3.2 получаем, что $(\mathbf{d}, \mathbf{z})$ -мутацию (3.5) можно представить как композицию:

$$Y'_i = \operatorname{Ad}(\Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon))^\varepsilon (Z_i^{(\varepsilon)}). \quad (3.9)$$

ЛЕММА 3.3. *Выполняются следующие коммутационные соотношения:*

$$Z_i^{(\varepsilon)} Z_j^{(\varepsilon)} = q^{2r_j d_j b'_{ji}} Z_j^{(\varepsilon)} Z_i^{(\varepsilon)}, \quad (3.10)$$

где b'_{ij} задается формулой (3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается перебором вариантов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *При $(\mathbf{d}, \mathbf{z})$ -мутации в (3.5) выполнены следующие коммутационные соотношения:*

$$Y'_i Y'_j = q^{2r_j d_j b'_{ji}} Y'_j Y'_i. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.3 и формулы (3.9) имеем

$$\begin{aligned} Y'_i Y'_j &= \operatorname{Ad}(\Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon))^\varepsilon (Z_i^{(\varepsilon)} Z_j^{(\varepsilon)}) = \\ &= \operatorname{Ad}(\Psi_{d_k, \mathbf{z}_k, q_k}(Y_k^\varepsilon))^\varepsilon (q^{2r_j d_j b'_{ji}} Z_j^{(\varepsilon)} Z_i^{(\varepsilon)}) = q^{2r_j d_j b'_{ji}} Y'_j Y'_i. \end{aligned}$$

Леммы 3.2, 3.3 и предложение 3.1 задают естественное обобщение фундаментальных свойств мутаций квантовых Y -зерен из работ [8], [9].

4. ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДИЛОГАРИФМА СТАРШИХ СТЕПЕНЕЙ

Приведем приложение обобщенных мутаций квантовых Y -зерен к тождествам для функций квантового дилогарифма старших степеней. Так как эти соотношения аналогичны соотношениям для обычного квантового дилогарифма, исследованным в работах [13], [14], в настоящей работе ограничимся минимальным описанием. Читатель может обратиться к работе [14] (см. раздел 3) за деталями.

Рассмотрим последовательность $(\mathbf{d}, \mathbf{z})$ -мутаций квантовых Y -зерен

$$(B(1), Y(1)) \xleftrightarrow{\mu_{k_1}} (B(2), Y(2)) \xleftrightarrow{\mu_{k_2}} \dots \xleftrightarrow{\mu_{k_L}} (B(L+1), Y(L+1)) \quad (4.1)$$

и предположим, что эта последовательность является периодической,

$$b_{\sigma(i)\sigma(j)}(L+1) = b_{ij}(1), \quad Y_{\sigma(i)}(L+1) = Y_i(1), \quad (4.2)$$

для некоторой перестановки σ индексов $1, \dots, n$. Тогда найдется связанная с ней последовательность (неквантованных) $(\mathbf{d}, \mathbf{z})$ -мутаций Y -зерен (неквантовой) обобщенной кластерной алгебры

$$(B(1), y(1)) \xleftrightarrow{\mu_{k_1}} (B(2), y(2)) \xleftrightarrow{\mu_{k_2}} \dots \xleftrightarrow{\mu_{k_L}} (B(L+1), y(L+1)), \quad (4.3)$$

и эта последовательность имеет тот же самый период:

$$y_{\sigma(i)}(L+1) = y_i(1). \quad (4.4)$$

Предположим также, что выполнено *свойство когерентности знака* для последовательности (4.3) (см., например, работу [6]). Пусть ε_t и c_t ($t = 1, \dots, L$) суть *тропический знак* и *c-вектор* [6] последовательности $y_{k_t}(t)$. Обозначим исходное зерно $(B(1), Y(1))$ через (B, Y) . Пусть $\mathbb{T}(B)$ – *квантовый тор*, порожденный некоммутирующими переменными Y^α (где $\alpha \in \mathbb{Z}^n$), и выполнены соотношения

$$q^{\langle \alpha, \beta \rangle} Y^\alpha Y^\beta = Y^{\alpha + \beta}, \quad \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i d_i b_{ij} \beta_j.$$

Отождествим $Y_i = Y^{e_i}$, где e_i – i -й единичный вектор.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть для последовательности (4.3) справедливо предположение о периодичности (4.2) и выполнено свойство когерентности знака. Тогда имеют место следующие тождества для функций квантового дилогарифма старших степеней, связанные с последовательностью (4.1).

1. Тождества квантового дилогарифма в тропической форме записи (ср. с теоремой 3.5 в работе [14]):

$$\Psi_{d_{k_1}, \mathbf{z}_{k_1}, q_{k_1}}(Y^{\varepsilon_1 c_1})^{\varepsilon_1} \dots \Psi_{d_{k_L}, \mathbf{z}_{k_L}, q_{k_L}}(Y^{\varepsilon_L c_L})^{\varepsilon_L} = 1, \quad (4.5)$$

где $Y^{\varepsilon_t c_t} \in \mathbb{T}(B)$.

2. Тождества квантового дилогарифма в универсальной форме записи (ср. со следствием 3.7 в работе [14]):

$$\Psi_{d_{k_L}, \mathbf{z}_{k_L}, q_{k_L}}(Y_{k_L}(L))^{\varepsilon_L} \dots \Psi_{d_{k_1}, \mathbf{z}_{k_1}, q_{k_1}}(Y_{k_1}(1))^{\varepsilon_1} = 1. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО мы опустим, так как оно полностью аналогично доказательствам теоремы 3.5 и следствия 3.7 в работе [14].

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим простейший нетривиальный пример обобщенной кластерной алгебры:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = (2, 1), \quad \mathbf{z} = (z_{1,1}).$$

Этот пример исследовался в работе [6] для некантового случая. Предположим теперь, что $\mathbf{r} = (1, 2)$. Тогда $q_1 = q_2 = q^2$, а коммутационное соотношение для $Y = (Y_1, Y_2)$ принимает вид $Y_1 Y_2 = q^4 Y_2 Y_1$.

Положим $(B(1), Y(1)) := (B, Y)$ и рассмотрим следующую последовательность мутаций:

$$\begin{aligned} (B(1), Y(1)) &\xleftarrow{\mu_1} (B(2), Y(2)) \xleftarrow{\mu_2} (B(3), Y(3)) \xleftarrow{\mu_1} (B(4), Y(4)) \xleftarrow{\mu_2} \\ &\xleftarrow{\mu_2} (B(5), Y(5)) \xleftarrow{\mu_1} (B(6), Y(6)) \xleftarrow{\mu_2} (B(7), Y(7)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тогда $B(t) = (-1)^{t+1} B$, а квантовые Y -переменные мутируют следующим образом (положим для простоты $z = z_{1,1}$):

$$\begin{aligned} Y_1(1) &= Y_1, \\ Y_2(1) &= Y_2, \\ Y_1(2) &= Y_1^{-1}, \\ Y_2(2) &= Y_2(1 + zq^2 Y_1 + q^4 Y_1^2), \\ Y_1(3) &= Y_1^{-1}(1 + q^2 Y_2 + zY_1 Y_2 + q^{-2} Y_1^2 Y_2), \\ Y_2(3) &= Y_2^{-1}(1 + zq^{-2} Y_1 + q^{-4} Y_1^2)^{-1}, \\ Y_1(4) &= Y_1(1 + q^{-2} Y_2 + zq^{-4} Y_1 Y_2 + q^{-6} Y_1^2 Y_2)^{-1}, \\ Y_2(4) &= q^{-4} Y_1^{-2} Y_2^{-1}(1 + q^2 Y_2 + q^6 Y_2 + q^8 Y_2^2 + \\ &\quad + zY_1 Y_2 + zq^2 Y_1 Y_2^2 + q^{-4} Y_1^2 Y_2^2), \\ Y_1(5) &= q^{-2} Y_1^{-1} Y_2^{-1}(1 + q^2 Y_2), \\ Y_2(5) &= q^{-4} Y_1^2 Y_2(1 + q^{-6} Y_2 + q^{-2} Y_2 + q^{-8} Y_2^2 + \\ &\quad + zq^{-4} Y_1 Y_2 + zq^{-10} Y_1 Y_2^2 + q^{-10} Y_1^2 Y_2^2)^{-1}, \\ Y_1(6) &= q^{-2} Y_1 Y_2(1 + q^{-2} Y_2), \\ Y_2(6) &= Y_2^{-1}, \\ Y_1(7) &= Y_1, \\ Y_2(7) &= Y_2 \end{aligned}$$

(при $q = 1$ мы воспроизведем результат из таблицы 1 в работе [6] для некантового случая). Среди этих равенств наиболее длинным оказывается вычисление переменной $Y_2(4)$.

Теперь ясно видна периодичность последовательности (4.7) с $\sigma = \text{id}$. Также получим следующие данные для тропических знаков и c -векторов из работы [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= +, & \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 &= -, \\ c_1 &= (1, 0), & c_2 &= (0, 1), & c_3 &= (-1, 0), \\ c_4 &= (-2, -1), & c_5 &= (-1, -1), & c_6 &= (0, -1), \end{aligned}$$

что также можно вывести из приведенного выше результата, положив $q = 1$. После подстановки этих данных тождество (4.5) принимает вид

$$\Psi_{2,(z),q^2}(Y_1)\Psi_{q^2}(Y_2)\Psi_{2,(z),q^2}(Y_1)^{-1} \times \\ \times \Psi_{q^2}(q^{-4}Y_1^2Y_2)^{-1}\Psi_{2,(z),q^2}(q^{-2}Y_1Y_2)^{-1}\Psi_{q^2}(Y_2)^{-1} = 1,$$

а тождество (4.6) переходит в соотношение

$$\Psi_{q^2}(Y_2)^{-1}\Psi_{2,(z),q^2}((1+q^2Y_2)^{-1}q^2Y_2Y_1)^{-1} \times \\ \times \Psi_{q^2}((1+q^2Y_2+q^6Y_2+q^8Y_2^2+zY_1Y_2+zq^2Y_1Y_2^2+q^{-4}Y_1^2Y_2^2)^{-1}q^4Y_2Y_1^2)^{-1} \times \\ \times \Psi_{2,(z),q^2}((1+q^2Y_2+zY_1Y_2+q^{-2}Y_1^2Y_2)^{-1}Y_1)^{-1} \times \\ \times \Psi_{q^2}(Y_2(1+zq^2Y_1+q^4Y_1^2))\Psi_{2,(z),q^2}(Y_1) = 1.$$

В общем случае наша гипотеза состоит в том, что если некантовая последовательность (4.3) обладает периодичностью (4.4), то соответствующая квантовая последовательность (4.1) будет также иметь тот же период (4.2). (Обратное утверждение выполняется тривиально, как уже было показано.) Это утверждение было доказано в случае обычных кластерных алгебр в работе [14] (см. предложение 3.4) для кососимметричной матрицы $B = B(1)$.

Список литературы

- [1] L. Chekhov, M. Shapiro, *Int. Math. Res. Notices*, **2014**:10 (2014), 2746–2772, arXiv: 1111.3963.
- [2] S. Fomin, A. Zelevinsky, *Invent. Math.*, **154**:1 (2003), 63–121, arXiv: math/0208229.
- [3] M. Gekhtman, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Moscow Math. J.*, **3**:3 (2003), 899–934, arXiv: math/0208033.
- [4] A. Gleitz, *Quantum affine algebras at roots of unity and generalized cluster algebras*, arXiv: 1410.2446.
- [5] K. Iwaki, T. Nakanishi, *Exact WKB analysis and cluster algebras II: simple poles, orbifold points, and generalized cluster algebras*, arXiv: 1409.4641.
- [6] T. Nakanishi, *Pacific J. Math.*, **277**:1 (2015), 201–218, arXiv: 1409.5967.
- [7] A. Berenstein, A. Zelevinsky, *Adv. Math.*, **195**:2 (2005), 405–455, arXiv: math/0404446.
- [8] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, **42**:6 (2009), 865–930, arXiv: math/0311245.
- [9] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Invent. Math.*, **175**:2 (2009), 223–286, arXiv: math/0702397.
- [10] L. D. Faddeev, A. Yu. Volkov, *Phys. Lett.*, **315**:3–4 (1993), 311–318, arXiv: hep-th/9307048.
- [11] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Modern Phys. Lett. A*, **9**:5 (1994), 427–434, arXiv: hep-th/9310070.
- [12] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [13] B. Keller, “On cluster theory and quantum dilogarithm identities”, *Representations of Algebras and Related Topics* (Tokyo, Japan, August 6–15, 2010), EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society, eds. A. Skowroński, K. Yamagata, Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, 85–116, arXiv: 1102.4148.
- [14] R. M. Kashaev, T. Nakanishi, *SIGMA*, **7** (2011), 102, 29 pp., arXiv: 1104.4630.