Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Гудкова, И. Т. Хабибуллин, Уравнение Кадомцева–Петвиашвили на полуплоскости, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 2, 230–240

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf89>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:27:11

© 2004 г.

Е. В. Гудкова*, И. Т. Хабибуллин[†]

УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Исследуется граничная задача для уравнения Кадомцева–Петвиашвили на полуплоскости $y > 0$ с однородным краевым условием вдоль границы. Показано, что задача эффективно решается методом одевания. Представлены явные частные решения граничной задачи.

Ключевые слова: интегрируемость, краевые условия, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, пара Лакса, уравнение Марченко, солитон.

Многие реальные физические явления моделируются в виде начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений. Поскольку солитонные уравнения имеют широкую область приложений, то начально-краевые задачи для них вызывают большой интерес. Аналитические методы исследования, такие как метод обратной задачи рассеяния, конечнозонное интегрирование и другие, хорошо зарекомендовали себя при поиске явных частных решений солитонных уравнений и при решении задачи Коши. В последнее десятилетие были предприняты попытки приспособить этот арсенал методов к граничным задачам (см., например, работу [1] и ссылки в ней). Однако к настоящему времени, несмотря на большое число публикаций, проблема адаптации метода обратной задачи рассеяния (нелинейного варианта метода Фурье) к начально-краевым задачам далека от полного решения. Из результатов работы [2] следует, что начально-краевая задача с произвольно заданными граничными условиями не является интегрируемой. Поэтому стали актуальны следующие две задачи: полное описание тех классов краевых условий, которые сохраняют основные атрибуты интегрируемости, и проблема обобщения на соответствующие краевые задачи традиционных аналитических методов солитонной теории.

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) имеет многочисленные приложения в физике [3], [4], в частности оно описывает распространение квазиодномерных волн в нелинейной среде со слабой дисперсией. В то же время это уравнение является наиболее интересным примером нелинейного интегрируемого эволюционного уравнения с двумя

*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

[†]Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: ihabib@imat.rb.ru

пространственными переменными. Уравнение КП эффективно решается методом обратной задачи рассеяния и допускает богатый набор явных частных решений. Кроме стандартного метода одевания Захарова–Шабата [5] к уравнению КП применимы альтернативные подходы, основанные на нелокальной задаче Римана и $\bar{\partial}$ -проблеме [6], [7]. Однако следует подчеркнуть, что несмотря на обилие подходов даже задача Коши для уравнения КП решена не полностью (см., например, [8]), не говоря уже о других традиционных типах граничных задач. В настоящей работе исследуется уравнение КП на полуплоскости $y > 0$ с однородным краевым условием вида $u_x + \alpha w|_{y=0} = 0$. Краевое условие имеет сугубо математическое происхождение, связанное с дифференциальными редукциями пары Лакса (см. [9]), что позволяет адаптировать к краевой задаче метод обратной задачи рассеяния и, как показано ниже, эффективно описать класс решений уравнения КП, удовлетворяющих этому условию. Замечательный факт состоит в том, что рассматриваемое краевое условие выполняется тогда и только тогда, когда ядро уравнения Марченко удовлетворяет некоторому простому дифференциальному соотношению (см. теорему в разделе 3).

1. КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ, СОВМЕСТИМОЕ С ПАРОЙ ЛАКСА

Как было показано в нашей предыдущей работе [9], уравнение КП

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} - 6uu_x &= -3\alpha^2 w_y, \\ w_x &= u_y, \end{aligned} \quad (1)$$

рассматриваемое на полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $y > 0$ (или на полуплоскости $y < 0$) с краевым условием вида

$$u_x + \alpha w|_{y=0} = 0, \quad (2)$$

наложенным вдоль границы $y = 0$, совместимо с такими характерными признаками интегрируемости, как высшие симметрии и преобразование Беклунда. Параметр α в уравнении КП принимает одно из двух значений: 1 или i . Если $\alpha = i$, то соответствующее уравнение называется уравнением КП1, а если $\alpha = 1$, то – КП2. Цель настоящей работы заключается в отыскании решений уравнения (1), удовлетворяющих краевому условию (2). В работе [9] было показано, что краевое условие (2) в определенном смысле совместимо с парой Лакса уравнения КП. Напомним, что последняя задается в виде следующей системы линейных уравнений (см. [10], [5]):

$$\phi_{xx} = \alpha\phi_y + u\phi, \quad (3)$$

$$\phi_t = -4\phi_{xxx} + 6u\phi_x + 3(u_x + \alpha w)\phi. \quad (4)$$

Поясним, что понимается под совместимостью краевого условия с парой Лакса. Заметим, что не только система уравнений (3), (4), но также система сопряженных уравнений (имеется в виду формальное вещественное сопряжение) задает пару Лакса для уравнения (1):

$$\tilde{\phi}_{xx} = -\alpha\tilde{\phi}_y + u\tilde{\phi}, \quad (5)$$

$$\tilde{\phi}_t = -4\tilde{\phi}_{xxx} + 6u\tilde{\phi}_x + 3(u_x - \alpha w)\tilde{\phi}. \quad (6)$$

Мы называем краевое условие совместимым с парой Лакса, если при наложении этого краевого условия в некоторой точке (пусть, для определенности, в точке $y = 0$) уравнения (4) и (6) приобретают дополнительные условия связи. Точнее говоря, существует линейный дифференциальный оператор $M = a_n D_x^n + a_{n-1} D_x^{n-1} + \dots + a_0$ такой, что дифференциальная подстановка $\tilde{\phi} = M\phi$ переводит при $y = 0$ уравнение (4) в уравнение (6). Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА. *Решение $u = u(x, y, t)$ уравнения (1) удовлетворяет краевому условию (2) тогда и только тогда, когда для любого решения $\phi = \phi(x, y, t)$ уравнения (4) функция $\tilde{\phi} = D_x \phi$ удовлетворяет уравнению (6) при $y = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя по x соотношение (4), находим

$$\phi_{xt} = -4\phi_{xxxx} + 6u\phi_{xx} + 3(3u_x + \alpha w)\phi_x + 3(u_x + \alpha w)_x \phi. \quad (7)$$

Предположим теперь, что краевое условие (2) выполняется, тогда очевидно, что уравнение (7) принимает вид $\phi_{xt} = -4\phi_{xxxx} + 6u\phi_{xx} + 3(u_x - \alpha w)\phi_x$ и, следовательно, сводится при помощи подстановки $\tilde{\phi} = \phi_x$ к уравнению (6). Докажем обратное утверждение. Пусть в результате подстановки $\tilde{\phi} = \phi_x$ произвольное решение ϕ переходит в решение уравнения (6), т.е. имеет место равенство

$$\phi_{xt} = -4\phi_{xxxx} + 6u\phi_{xx} + 3(u_x - \alpha w)\phi_x. \quad (8)$$

Вычитая уравнение (8) из уравнения (7), получим

$$0 = 2(u_x + \alpha w)\phi_x + (u_x + \alpha w)_x \phi.$$

Отсюда следует, что $u_x + \alpha w = 0$. Действительно, в противном случае мы имели бы равенство $\phi = C/\sqrt{u_x + \alpha w}$, противоречащее предположению о произвольности решения ϕ . Лемма доказана. Она играет ключевую роль в дальнейшем, при изучении задачи (1), (2).

2. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ОДЕВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КП

В литературе известны различные методы построения решений уравнения КП (см., например, [7], [8]). Мы воспользуемся методом одевания Захарова–Шабата. Напомним кратко суть этого метода (подробное изложение можно найти в монографии [4]). Пусть u_0 – некоторое затравочное решение уравнения КП. Для простоты возьмем $u_0 \equiv 0$. Пусть $\phi_0 = \phi_0(x, y, t)$ – некоторое решение ассоциированной системы уравнений (3), (4) с коэффициентом $u = u_0 = 0$ (затравочная собственная функция). Будем искать новое решение u уравнения КП. Найдем сначала решение $\phi = \phi(x, y, t)$ ассоциированной системы, соответствующей новому потенциалу u . Для этого воспользуемся следующим интегральным оператором с ядром Вольтерра $K = K(x, z, y, t)$:

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x, y, t) + \int_{-\infty}^x K(x, z', y, t) \phi_0(z', y, t) dz' = (1 + \hat{K})\phi_0. \quad (9)$$

Ядро K удовлетворяет уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K(x, z, y, t) + F(x, z, y, t) + \int_{-\infty}^x K(x, z', y, t) F(z', z, y, t) dz' = 0. \quad (10)$$

Ядро уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко F , в свою очередь, является решением следующей системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + 4 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Искомое решение нелинейного уравнения u выражается явно через ядро K по правилу

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, y, t). \quad (12)$$

3. РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА–ЛЕВИТАНА–МАРЧЕНКО И ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Если в схеме метода одевания, изложенного выше, заменить пару Лакса (3), (4) сопряженной парой Лакса (5), (6), то система линейных уравнений (11) заменится следующей системой:

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} - \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + 4 \left(\frac{\partial^3 \tilde{F}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \tilde{F}}{\partial z^3} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

а ядро $\tilde{K}$ оператора преобразования, переводящего затравочную собственную функцию $\tilde{\phi}_0$ в собственную функцию $\tilde{\phi}$ нового ассоциированного уравнения

$$\tilde{\phi}(x, y, t) = \tilde{\phi}_0(x, y, t) + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, z', y, t) \tilde{\phi}_0(z', y, t) dz', \quad (14)$$

будет удовлетворять аналогичному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко

$$\tilde{K}(x, z, y, t) + \tilde{F}(x, z, y, t) + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, z', y, t) \tilde{F}(z', z, y, t) dz' = 0. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА. Пусть ядра $F(x, z, y, t)$ и $\tilde{F}(x, z, y, t)$ уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко (10) и (15), соответственно, построенные по парам Лакса (3), (4) и (5), (6), определяют одно и то же решение $u = u(x, y, t)$ уравнения КП и пусть затравочное решение u_0 удовлетворяет краевому условию (2). Пусть, кроме того, ядра связаны условием инволюции

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, z, 0, t) = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial z}(x, z, 0, t). \quad (16)$$

Тогда решение $u = u(x, y, t)$ удовлетворяет краевому условию (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что при выполнении условия инволюции (16) ядра $K(x, z, y, t)$ и $\tilde{K}(x, z, y, t)$ операторов преобразования связаны аналогичным условием инволюции

$$\frac{\partial K}{\partial x}(x, z, 0, t) = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial z}(x, z, 0, t). \quad (17)$$

Действительно, дифференцируя по z равенство (15) и затем полагая $y = 0$, получаем

$$\tilde{K}_z(x, z, 0, t) + \tilde{F}_z(x, z, 0, t) + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, z', 0, t) \tilde{F}_z(z', z, 0, t) dz' = 0.$$

Проинтегрируем последнее выражение по частям, предварительно заменив в нем $\tilde{F}_z$ на $-F_x$ в силу уравнения (16). В результате получим

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_z(x, z, 0, t) - F_x(x, z, 0, t) - \tilde{K}(x, x, 0, t)F(x, z, 0, t) + \\ & + \int_{-\infty}^x \tilde{K}_{z'}(x, z', 0, t)F(z', z, 0, t) dz' = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Проверим непосредственной подстановкой, что замена (17) обращает уравнение (18) в верное равенство. Отметим, что имеет место равенство $\tilde{K}(x, x, y, t) = K(x, x, y, t)$, поскольку

$$u(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x, x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\tilde{K}(x, x, y, t).$$

Перепишем теперь левую часть равенства (18) в виде

$$\begin{aligned} & -K_x(x, z, 0, t) - F_x(x, z, 0, t) - K(x, x, 0, t)F(x, z, 0, t) - \\ & - \int_{-\infty}^x K_x(x, z', 0, t)F(z', z, 0, t) dz' = -\frac{\partial}{\partial x} \left[K(x, z, 0, t) + F(x, z, 0, t) + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^x K(x, z', 0, t)F(z', z, 0, t) dz' \right] = J. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю в силу уравнения (10), следовательно, величина J равна нулю, т.е. условие (17) выполняется.

Допустим, что функции $\phi_0 = \phi_0(x, y, t)$ и $\tilde{\phi}_0 = \tilde{\phi}_0(x, y, t)$ являются затравочными собственными функциями, т.е. решениями “неодетых” систем уравнений

$$\phi_{0xx} = \alpha\phi_{0y} + u_0\phi_0, \quad \phi_{0t} = -4\phi_{0xxx} + 6u_0\phi_{0x} + 3(u_{0x} + \alpha w_0)\phi_0$$

и

$$\tilde{\phi}_{0xx} = -\alpha\tilde{\phi}_{0y} + u_0\tilde{\phi}_0, \quad \tilde{\phi}_{0t} = -4\tilde{\phi}_{0xxx} + 6u_0\tilde{\phi}_{0x} + 3(u_{0x} - \alpha w_0)\tilde{\phi}_0,$$

соответственно, связанными друг с другом при $y = 0$ соотношением $\tilde{\phi}_0 = D_x\phi_0$. Тогда при $y = 0$ новые собственные функции

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x, y, t) + \int_{-\infty}^x K(x, z', y, t)\phi_0(z', y, t) dz' = (1 + \hat{K})\phi_0$$

и

$$\tilde{\phi}(x, y, t) = \tilde{\phi}_0(x, y, t) + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, z', y, t) \tilde{\phi}_0(z', y, t) dz'$$

связаны аналогичным соотношением

$$\tilde{\phi} = D_x \phi. \quad (19)$$

Докажем последнее утверждение. Преобразуем правую часть формулы (19) к виду

$$D_x \phi(x, 0, t) = D_x \phi_0(x, 0, t) + K(x, x, 0, t) \phi_0(x, 0, t) + \int_{-\infty}^x K_x(x, z', 0, t) \phi_0(z', 0, t) dz',$$

преобразуем также ее левую часть:

$$\tilde{\phi}(x, 0, t) = D_x \phi_0(x, 0, t) + \int_{-\infty}^x \tilde{K}(x, z', y, t) D_{z'} \phi_0(z', 0, t) dz'.$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле, а затем делая замену согласно (17), находим

$$\tilde{\phi}(x, 0, t) = D_x \phi_0(x, 0, t) + K(x, x, 0, t) \phi_0(x, 0, t) + \int_{-\infty}^x K_x(x, z', 0, t) \phi_0(z', 0, t) dz'.$$

Сравнение полученных результатов доказывает формулу (19), тем самым мы убеждаемся в том, что краевое условие (2) выполняется. Теорема доказана.

4. ЯВНЫЕ ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КП2

Рассмотрим более подробно уравнение КП2, полагая во всех формулах $\alpha = 1$. Пусть уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко имеет вырожденное ядро вида

$$F(x, z, y, t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp((q_n^2 - p_n^2)y - 4(q_n^3 + p_n^3)t + q_n z + p_n x). \quad (20)$$

В качестве затравочного решения возьмем нулевое решение. Пусть $u(x, y, t)$ обозначает новое решение уравнения КП2. Найдем ядро $\tilde{F}$ уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко, соответствующего сопряженной паре Лакса с тем же потенциалом $u(x, y, t)$. Для отыскания $\tilde{F}(x, z, y, t)$ при известной $F(x, z, y, t)$ достаточно в выражении для F поменять местами переменные x и z . Действительно, сравнение уравнений (11) с уравнениями (13) убеждает, что $\tilde{F}(x, z, y, t) = F(z, x, y, t)$. Поэтому имеем

$$\tilde{F}(x, z, y, t) = \sum_{n=1}^N c_n \exp((q_n^2 - p_n^2)y - 4(q_n^3 + p_n^3)t + q_n x + p_n z).$$

Допустим далее, что ядра F и $\tilde{F}$ связаны дополнительным условием инволюции (16), которое может быть представлено в виде

$$\sum_{n=1}^N c_n p_n \exp\{q_n z + p_n x - 4(q_n^3 + p_n^3)t\} = - \sum_{n=1}^N c_n p_n \exp\{q_n x + p_n z - 4(q_n^3 + p_n^3)t\}.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$p_n = q_{N-n}, \quad c_n p_n = -c_{N-n} q_n. \quad (21)$$

Таким образом, при выполнении условий инволюции (21) решение уравнения КП, даваемое формулой

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A, \quad (22)$$

где A – матрица с элементами вида

$$A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{c_n}{p_n + q_m} \exp((q_n^2 - p_n^2)y - 4(q_n^3 + p_n^3)t + (p_n + q_m)x), \quad (23)$$

удовлетворяет краевому условию (2), которое в случае уравнения КП2 имеет вид $u_x + w|_{y=0} = 0$. Краевое условие станет более наглядным, если его продифференцировать по x : $u_{xx} + u_y|_{y=0} = 0$.

Ниже мы приводим три примера частных решений, иллюстрируя их рисунками. На рисунках по вертикальной оси откладывается переменная u (кроме рис. 3), а оси x и y направлены соответственно слева направо и от читателя к плоскости чертежа.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим более подробно решение (22) для $N = 2$. В этом случае определитель легко может быть переписан в виде

$$\det A = 1 + 2\epsilon \operatorname{sh}^2(ry - \ln \epsilon)X + \epsilon^2 \operatorname{sh}^2(\ln \epsilon)X^2,$$

где $r = q^2 - p^2$, $\epsilon = \sqrt{p/q}$, $X = ce^{-4(p^3+q^3)t+(p+q)x}/(p+q)$, $p = p_1 = q_2$, $q = p_2 = q_1$, $c_1 = c$, $c_2 = -cp/q$. Решение u , задаваемое формулой (22), содержит три произвольных вещественных положительных параметра c , p , q . Однако при таком выборе параметров нарушается условие регулярности (см. [4], с. 295), так как константа c_2 принимает отрицательное значение и поэтому решение u имеет полюсы, которые располагаются в нулях определителя матрицы A . Для описания линии сингулярностей найдем условия существования положительного решения X следующего квадратного уравнения:

$$\epsilon^2 \operatorname{sh}^2(\ln \epsilon)X^2 - 2\epsilon \operatorname{sh}^2(ry + \ln \epsilon)X + 1 = 0. \quad (24)$$

Очевидно, что положительное решение будет существовать лишь в том случае, когда дискриминант и второй коэффициент неотрицательны:

- 1) $\operatorname{sh}^2(ry + \ln \epsilon) - \operatorname{sh}^2(\ln \epsilon) \geq 0$;
- 2) $\operatorname{sh}(ry + \ln \epsilon) \geq 0$.

Для фиксированного значения времени t уравнение (24) определяет кривую на плоскости (x, y) , состоящую из сингулярных точек решения u . Рассмотрим отдельно случаи $r > 0$ и $r < 0$.

А. Пусть $r = q^2 - p^2 > 0$, тогда $\epsilon < 1$, $\ln \epsilon = \delta < 0$, и из неравенств выше следует, что $y \geq y_0$, где $y_0 = (\ln q - \ln p)/(q^2 - p^2)$. Это означает, что кривая расположена правее линии $y = y_0 > 0$. Кривая напоминает параболу с ветвями, расположенными вдоль положительного направления оси x , с вершиной в точке (x_0, y_0) , где

$$x_0 = \frac{4(p^3 + q^3)t + \ln(p + q) - \ln(c\epsilon \operatorname{sh} |\delta|)}{p + q}.$$

Отметим, что в точке (x_0, y_0) меняется характер сингулярности, так как в этой точке определитель матрицы A имеет двукратный нуль, в то время как в остальных точках кривой определитель имеет простые нули. Фактически решение u определено на всей плоскости (x, y) , причем очевидно, что оно регулярно при $y < y_0$.

Рис. 1. Решение, локализованное в полуплоскости $y < 0$.

Б. Если $r < 0$, то $\epsilon > 1$, $\ln \epsilon = \delta > 0$. Из этих неравенств следует, что $y \leq 0$. Так что в этом случае все сингулярные точки расположены в левой полуплоскости $y < 0$, ветви “параболы” направлены в отрицательную сторону. Вершина имеет координаты $(x_0, 0)$, и поэтому она лежит на прямой $y = 0$, где заданы краевые условия (2). Ось “параболы” совпадает с прямой $x = x_0$. На рис. 1 показан график решения, соответствующего следующему выбору параметров: $c_1 = -c_2 q_1/p_1$, $c_2 = 1$, $p_1 = q_2$, $p_2 = q_1$, $q_1 = 0.1$, $q_2 = 0.6$, $t = 4$.

Рис. 2. Солитоноподобное сингулярное решение при $N = 4$. Рис. 3. Краевое условие вдоль прямой $y = 0$ (график функции $u_y + u_x x$).

Рис. 4. Солитоноподобное сингулярное решение при $N = 6$.

Отметим, что в обоих случаях, рассмотренных в примере 1, расстояние между линией сингулярностей и границей $y = 0$ не изменяется со временем. Таким образом, краевое условие (2) можно интерпретировать как “запирающее” условие, не пропускающее локализованное решение через границу $y = 0$.

ПРИМЕР 2. Полагая $N = 4$ в формуле (20) и выбирая параметры так, чтобы выполнялись условия инволюции (21), находим с помощью (22) более сложное решение граничной задачи. Рис. 2 соответствует такому решению при следующем выборе параметров: $p_1 = q_4$, $p_2 = q_3$, $p_3 = q_2$, $p_4 = q_1$, $c_1 = -c_4 q_1 / p_1$, $c_2 = -c_3 q_2 / p_2$, $c_3 = 1.1$, $c_4 = 1$, $q_1 = 0.1$, $q_2 = 0.2$, $q_3 = 0.6$, $q_4 = 0.8$, $t = 0.4$.

На рис. 3 представлен график функции $u_y + u_{xx}$. Он наглядно подтверждает, что краевое условие соблюдается.

ПРИМЕР 3. На рис. 4 изображено решение уравнения КП2 на полуплоскости $y < 0$ с краевым условием (2), полученное из той же формулы (22), где $N = 6$. Здесь $p_1 = q_6$, $p_2 = q_5$, $p_3 = q_4$, $p_4 = q_3$, $p_5 = q_2$, $p_6 = q_1$, $c_1 = -c_6 q_1 / p_1$, $c_2 = -c_5 q_2 / p_2$, $c_3 = -c_4 q_3 / p_3$, $c_4 = 1.2$, $c_5 = 1.1$, $c_6 = 1$, $q_1 = 0.1$, $q_2 = 0.2$, $q_3 = 0.3$, $q_4 = 0.4$, $q_5 = 0.5$, $q_6 = 0.6$, $t = 0.01$. Из рисунка видно, что локализованное решение располагается в полуплоскости $y < 0$. Можно показать, что при изменении времени t на всем интервале $(-\infty, +\infty)$ оно перемещается по полуплоскости $y < 0$, не пересекая ее границу.

Граничная задача в полосе $0 < y < 1$ для уравнения КП рассмотрена в работе [11].

Благодарности. Авторы благодарят В. Ю. Новокшенова за полезные обсуждения и за помощь, оказанную при построении и оформлении графиков. Работа была поддержана грантами РФФИ № 01-01-00931, 02-01-00144, грантом Министерства образования РФ Е02-1.0-77, грантом поддержки ведущих научных школ № 1716.2003.1.

Список литературы

- [1] *P. G. Grinevich, P. M. Santini.* The initial boundary value problems on the segment for the nonlinear Schrödinger equation; the algebro-geometric approach. I. nlin.SI/0307026.
- [2] *А. Дегасперис, С. В. Манаков, П. М. Сантини.* ТМФ. 2002. Т. 133. № 2. С. 184–201.
- [3] *Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили.* ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 753–756.
- [4] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [5] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 43–53.
- [6] *S. V. Manakov.* Physica D. 1981. V. 3. P. 420–427.
- [7] *M. J. Ablowitz, D. Bar Yaacov, A. S. Fokas.* Stud. Appl. Math. 1983. V. 69. P. 135–143.
- [8] *A. K. Pogrebkov.* КПИ: new results and open problems. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. Proc. of the Workshop (Gallipoli, Lecce, Italy, 27 June–6 July, 2002). Eds. M. J. Ablowitz et al. Singapore: World Scientific, 2003. P. 108–117.
- [9] *И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова.* Функц. анализ и его прилож. 2004. (в печати).
- [10] *В. С. Дрюма.* Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. № 12. С. 753–755.
- [11] *I. T. Habibullin.* Multidimensional integrable boundary problems. nlin.SI/0401028.

Поступила в редакцию 20.XI.2003 г.