Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. Чайчиан, Динамические системы, связанные с R -матрицей Креммера–Жерве, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 1, 101–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:24:09

© 1998 г. Е. В. Дамаскинский*, П. П. Кулиш†, М. Чайчиан‡

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С R -МАТРИЦЕЙ КРЕММЕРА–ЖЕРВЕ

Обобщенная R -матрица Креммера–Жерве, будучи твистом стандартной R -матрицы для $SL_q(3)$, зависит от двух дополнительных параметров. Обсуждаются свойства этой R -матрицы и построены две связанные с ней динамические системы: ковариантный относительно соответствующей квантовой группы q -осциллятор и интегрируемая спиновая цепочка с неэрмитовым гамильтонианом.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы с помощью квантового метода обратной задачи (КМОЗ) был изучен большой класс интегрируемых моделей квантовой теории поля, классической статистической механики и квантовой механики (системы с конечным числом степеней свободы) (см., например, [1–3]). Основным объектом при исследовании задач в рамках КМОЗ служит R -матрица, являющаяся решением уравнения Янга–Бакстера. Хотя известно огромное число решений этого уравнения, в частности, отвечающих всем простым (супер)алгебрам Ли [2, 4, 5], каждая новая R -матрица, даже если она связана тем или иным способом с ранее известной, порождает новый набор интегрируемых моделей. Простейшим приемом получения “новых” R -матриц на основе стандартных (как постоянных, так и зависящих от спектрального параметра) является процедура твиста [6, 7]. Например, с помощью твиста F , построенного из генераторов подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ [7], из стандартной $sl_q(n)$ - R -матрицы ($\omega = q - q^{-1}$, e_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, – стандартные матричные единицы)

$$R(q) = \sum_{i=1}^3 q e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{i \neq j} e_{ii} \otimes e_{jj} + \sum_{i < j} \omega e_{ij} \otimes e_{ji} \quad (1.1)$$

* Военный инженерный технический университет, Санкт-Петербург, Россия

† Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

‡ Хельсинкский институт физики, Университет Хельсинки, Хельсинки, Финляндия

можно получить многопараметрическую R -матрицу, соответствующую алгебре $gl(n)$ с $n(n-1)/2$ дополнительными параметрами на диагонали

$$R(q, \{p_{ij}\}) = F_{21} R(q) F_{12}^{-1}, \quad F \in \mathcal{U}(h) \otimes \mathcal{U}(h).$$

Поскольку в данной работе нас интересуют интегрируемые системы, связанные с конкретной R -матрицей, мы будем приводить формулы в фиксированных неприводимых представлениях, а не в универсальной алгебраической форме, принятой в теории квантовых групп [5, 8].

Недавно было показано, что R -матрица Кремера–Жерве $R_{CG}(q)$, построенная для квантовой теории Тоды [9], является твистом стандартной R -матрицы для случая $sl_q(3)$ [10, 11]. Есть основания полагать, что то же верно и для случая $sl_q(n)$, $n > 3$, однако в рамках данной работы мы ограничимся в основном исследованием алгебры $sl_q(3)$.

Любопытная особенность обобщенной R -матрицы $R(q, p, \nu)$ Кремера–Жерве (твист добавляет два дополнительных параметра к исходному решению [9] уравнения Янга–Бакстера) состоит в наличии двух новых ненулевых элементов по сравнению со стандартной $R(q)$:

$$\begin{aligned} R(q, p, \nu) = & R(q) + (p-1)(e_{11} \otimes e_{22} + e_{22} \otimes e_{33}) + \\ & + (p^{-1}-1)(e_{22} \otimes e_{11} + e_{33} \otimes e_{22}) + \left(\frac{p^2}{q} - 1\right)e_{11} \otimes e_{33} + \\ & + \left(\frac{q}{p^2} - 1\right)e_{33} \otimes e_{11} + q\nu \left(e_{32} \otimes e_{12} - \frac{p^2}{q^2}e_{12} \otimes e_{32}\right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, перестановочные соотношения “координат” квантового пространства $\mathbf{C}_q^3$, порождаемого (1.2), которые были получены уже в работе [9], более сложны по сравнению со случаем $sl_q(3)$: $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$, $1 \leq i < j \leq 3$. Они совпадают с деформированной алгеброй Гейзенберга (q -осциллятор)¹⁾ $\mathcal{A}_q$

$$x_2 x_1 = pq x_1 x_2, \quad x_2 x_3 = (pq)^{-1} x_3 x_2, \quad x_1 x_3 - p^{-2} x_3 x_1 = \nu x_2^2 \quad (1.3)$$

при отождествлении $x_1 = A$, $x_2 = K$, $x_3 = A^\dagger$.

¹⁾ Отметим, что изучение свойства ковариантности относительно квантовой группы для этой системы:

$$x_i \rightarrow \sum_j T_{ij} \otimes x_j,$$

и построение соответствующего R -матрице (1.2) дифференциального исчисления [12] обсуждались также в работе [13].

В алгебре $\mathcal{A}_q$ отсутствует квадратичный элемент (гамильтониан), инвариантный относительно действия квантовой группы $\mathcal{A}(R)$:

$$\varphi(x_i) = \sum_j T_{ij} \otimes x_j.$$

Это означает, что в результате действия получается гамильтониан более сложной структуры, действующий в тензорном произведении пространств представления для $\mathcal{A}(R)$ и $\mathcal{A}_q$. В настоящей работе проводится анализ физических следствий такого преобразования на примере конкретного гамильтониана в духе подхода, изложенного в работах [14, 15].

Свойства обобщенной R -матрицы Креммера–Жерве $R(q, p, \nu)$ и соответствующих ей квантовой группы $\mathcal{A}(R)$ и квантовой алгебры (алгебры Хопфа, дуальной к $\mathcal{A}(R)$) обсуждаются в разделе 2. Отметим, что квантовая группа $\mathcal{A}(R)$ и квантовая алгебра, соответствующие $R_{CG} = R(q, q^{1/3}, \nu)$, изучались в работе [16]. В следующем разделе рассматривается q -осцилляторная интерпретация квантового пространства $\mathbb{C}_q^3(R(q, p, \nu))$. Различным значениям параметров деформации (q) и твиста (p, ν) соответствует различный выбор генераторов q -осциллятора [17, 18]. Введены квантовые (деформированные) преобразования Боголюбова, применение которых ведет к увеличению числа степеней свободы. Гамильтониан интегрируемой спиновой цепочки обсуждается в разделе 4. Хотя в силу неравенства $(\mathcal{P}R_{CG})^\dagger \neq \mathcal{P}R_{CG}$ этот гамильтониан неэрмитов, его структура подобна структуре неэрмитовых гамильтонианов, используемых при описании некоторых кинетических процессов [19]. Отметим также ряд недавних работ [20–22], указывающих на активизацию интереса к различным приложениям твиста Дринфелда.

2. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОЙ R -МАТРИЦЫ КРЕММЕРА–ЖЕРВЕ

Хотя в теории квантовых групп обычно используются достаточно общие алгебраические объекты, такие как универсальная R -матрица $\mathcal{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – квазитреугольная алгебра Хопфа [5], и алгебраический элемент твиста $\mathcal{F} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ [6–7], мы сосредоточим свое внимание на конечномерных матрицах R и F , являющихся образами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{F}$ в соответствующих представлениях ρ и π квазитреугольной алгебры Хопфа $\mathcal{A}$:

$$R = (\rho \otimes \pi)\mathcal{R}, \quad F = (\rho \otimes \pi)\mathcal{F}. \quad (2.1)$$

Твистованная R -матрица $\mathcal{R}^{(\mathcal{F})}$ определяется преобразованием твиста [6–7]

$$\mathcal{R}^{(\mathcal{F})} = \mathcal{F}_{21} \mathcal{R} \mathcal{F}^{-1} \quad (2.2)$$

исходной R -матрицы $\mathcal{R}$, где $\mathcal{F} = \sum f_i \otimes g_i$, $\mathcal{F}_{21} = \mathcal{P}\mathcal{F}\mathcal{P} = \sum g_i \otimes f_i$, а $\mathcal{P}$ – оператор перестановки в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Твист удовлетворяет в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ соотношениям [6–7]

$$(\epsilon \otimes \text{id}) \mathcal{F} = (\text{id} \otimes \epsilon) \mathcal{F} = 1,$$

а в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ –

$$\mathcal{F}_{12} (\Delta \otimes \text{id}) (\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{23} (\text{id} \otimes \Delta) (\mathcal{F}).$$

Эти соотношения обеспечивают коассоциативность нового твистованного копроизведения $\Delta_t = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}$.

В фундаментальном представлении алгебры $sl(3)$ обобщенная R -матрица Крэммера–Жерве R_{CG} определяется стандартной R -матрицей $R(q)$ (1.1) и матрицей твиста F [11]:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q/p & 0 & p\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

зависящей от двух произвольных параметров p и ν :

$$R(q, p, \nu) = F_{21} R(q) F^{-1}. \quad (2.4)$$

Так как преобразование твиста R -матрицы, связанной с группой кос $\check{R} = \mathcal{P}R$:

$$\check{R}^{(F)} = \mathcal{P}R^{(F)} = \mathcal{P}F_{21}RF^{-1} = F\check{R}F^{-1}, \quad (2.5)$$

является преобразованием подобия исходной, то спектральные характеристики матриц $\check{R}$ и $\check{R}^{(F)}$ одинаковы. В частности, $\check{R}_{\text{CG}}$ также удовлетворяет условиям Гекке

$$\begin{aligned} \check{R}^2 &= I + \omega \check{R}, \\ \check{R} &= qP^{(+)} - q^{-1}P^{(-)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $P^{(\pm)}$ – проекторы рангов

$$\text{rank } P^{(+)} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{rank } P^{(-)} = \frac{n(n-1)}{2},$$

соответственно ($n = 3$ в рассматриваемом нами случае $sl(3)$).

Используя подход Решетихина–Тахтаджяна–Фаддеева (РТФ) [8], стандартные обозначения КМОЗ и конкретный вид R -матрицы, можно определить квантовую группу $\mathcal{A}(R)$ с матрицей генераторов $T = \{T_{ij}\}$, удовлетворяющей РТФ-соотношению

$$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12} \quad \text{или} \quad [\check{R}, T \otimes T] = 0. \quad (2.7)$$

Квантовая группа $\mathcal{A}(R)$, ассоциированная с исходной R -матрицей R_{CG} Кремера–Жерве, была определена и исследовалась уже в работах [9] и [16]. В частности, там был построен квантовый детерминант, оказавшийся центральным элементом алгебры. В случае обобщенной матрицы $R(q, p, \nu)$ (2.4) квантовый детерминант $\det_q T$ не является центральным. Он может быть построен с помощью техники слияния [2] путем проектирования $T^{\otimes 3} = T_1T_2T_3$ на одномерное пространство q -антисимметризатора:

$$P_{123}^{(-)} \simeq P_{12}^{(-)} \left(\left(q + \frac{1}{q} \right) P_{23}^{(-)} - I \right) P_{12}^{(-)}. \quad (2.8)$$

Уравнение Янга–Бакстера для R_{12} и определяющие соотношения (2.7) означают, что блоки $R_{ik,jl}$ с фиксированными i, j порождают представление алгебры $\mathcal{A}(R)$ генераторов T_{ij} в пространстве $\mathbb{C}^3$. Соответствующий квантовый детерминант $R(q, p, \nu)$ не пропорционален единичной 3×3 -матрице, хотя и диагонален:

$$\det_q R(q, p, \nu) = q \operatorname{diag} \left(\frac{q}{p^3}, 1, \frac{p^3}{q} \right). \quad (2.9)$$

Проецируя перестановочное соотношение $T_4 = I^{\otimes 3} \otimes T$ с $T^{\otimes 3} = T_1T_2T_3 = T \otimes T \otimes T \otimes I$:

$$\prod_{j=1}^3 R_{j4}(T^{\otimes 3} T_4) = (T_4 T^{\otimes 3}) \prod_{j=1}^3 R_{j4}, \quad (2.10)$$

и используя q -антисимметризатор $P_{123}^{(-)}$ (2.8), получаем в предположении обратимости квантового детерминанта $\det_q T$ компактную матричную форму перестановочных соотношений квантового детерминанта и генераторов T_{ij} :

$$(\det_q T) T (\det_q T)^{-1} = (\det_q R)^{-1} T (\det_q R), \quad (2.11)$$

где в правой части стоит обычное матричное произведение 3×3 -матрицы T и квантового детерминанта (2.9).

Для обсуждения кодействия квантовой группы $\mathcal{A}(R)$ на квантовом пространстве важно наличие $*$ -операции как на самой квантовой группе $\mathcal{A}(R)$, так и на соответствующем квантовом пространстве. Выбирая параметры деформации вещественными $q, p, \nu \in \mathbf{R}$ и действуя $*$ -операцией на определяющее РТФ-соотношение (2.7), получаем

$$R_{12}T_2^*T_1^* = T_1^*T_2^*R_{12}, \quad (2.12)$$

где $T^* = \{(T_{ij})^*\}$. После преобразования подобия с матрицами $\mathcal{P}$ и $C \otimes C$, где $C_{ij} = \delta_{i,4-j}$, соотношение (2.12) принимает исходный вид (2.7)

$$R_{12}\tilde{T}_1^*\tilde{T}_2^* = \tilde{T}_2^*\tilde{T}_1^*R_{12}, \quad \tilde{T}^* = CT^*C. \quad (2.13)$$

Следовательно, $*$ -операция на $\mathcal{A}(R_{CG})$ может быть определена следующим образом (ср. [13]):

$$T^* = CTC. \quad (2.14)$$

Эта форма $*$ -операции с матрицей $C_{ij} = \delta_{i,n+1-j}$ сохраняется и для квантовой группы $SL_q(n)$. Соответствующий квантовый детерминант R -матрицы также является диагональной $n \times n$ -матрицей:

$$\det_q R(q, p, \nu) \simeq \text{diag} \left(1, q^2 \left(\frac{p}{q} \right)^n, \dots, \left(q^2 \left(\frac{p}{q} \right)^n \right)^{n-1} \right). \quad (2.15)$$

Конкретная связь между параметрами q и p сказывается в возможности введения дальнейших ограничений на генераторы группы $\mathcal{A}(R_{CG})$ (см. следующий раздел).

Квазитреугольная алгебра Хопфа с $p = q^{1/3}$, дуальная к $\mathcal{A}(R_{CG})$, описана в [16]. Знание оператора твиста $\mathcal{F}$ позволяет представить элементы L -матриц $L^\pm$ в подходе РТФ [8] через генераторы стандартной алгебры $sl_q(3)$. Универсальная R -матрица и элемент твиста $\mathcal{F}$ построены в работе [23]. На этом мы завершим обсуждение общих свойств квантовой группы и квантовой алгебры, связанных с обобщенной R -матрицей Крэммера–Жерве $R(q, p, \nu)$.

3. КВАНТОВОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ $\mathcal{A}(R_{CG})$ КАК КОВАРИАНТНЫЙ ДЕФОРМИРОВАННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В рамках R -матричного формализма [8, 12] квантовое линейное пространство квантовой группы $\mathcal{A}(R_{CG})$ как ковариантная алгебра ($\mathcal{A}(R_{CG})$ -комодуль алгебра) порождается тремя элементами x_i , $i = 1, 2, 3$; $x_1 = A$, $x_2 = K$, $x_3 = A^\dagger$, удовлетворяющими следующим соотношениям для трехмерного вектора $X^t = (A, K, A^\dagger)$:

$$R(q, p, \nu)X_1X_2 = qX_2X_1 = q\mathcal{P}X_1X_2, \quad (3.1)$$

где $X_1 X_2 = X \otimes X$ и $X_2 X_1 = \mathcal{P} X_1 X_2$.

Применительно к генераторам определяющие соотношения имеют вид

$$KA = pqAK, \quad KA^\dagger = \frac{1}{pq}A^\dagger K, \quad AA^\dagger - p^{-2}A^\dagger A = \nu K^2. \quad (3.2)$$

Антиинволютивная $*$ -операция вводится соотношением $K^\dagger = K$, $(A^\dagger)^\dagger = A$. Она согласована с $*$ -операцией кодействия квантовой группы $\mathcal{A}(R_{CG})$:

$$X^* = C X, \quad T^* = C T C, \quad (T X)^* = C (T X). \quad (3.3)$$

Хотя в определяющих соотношениях (3.2) фигурируют три параметра q , p , ν , построенный $\mathcal{A}(R_{CG})$ -комодуль есть не что иное, как алгебра q -осциллятора $\mathcal{A}_q$. Используя для алгебры q -осциллятора генераторы a , $a^\dagger$, N с соотношениями (для удобства дальнейших отождествлений мы используем q^2 в качестве параметра деформации алгебры $\mathcal{A}_q$)

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad aa^\dagger - q^2 a^\dagger a = 1 \quad (3.4)$$

и осуществляя однопараметрическое преобразование [17, 18]

$$a(\lambda) = q^{-\lambda N} a, \quad a^\dagger(\lambda) = a^\dagger q^{-\lambda N}, \quad (3.5)$$

получаем

$$a(\lambda)a^\dagger(\lambda) - q^{2(1-\lambda)}a^\dagger(\lambda)a(\lambda) = q^{-2\lambda N}. \quad (3.6)$$

Следовательно, соотношения между параметрами в (3.2) и (3.4) имеют вид

$$A = a(\lambda), \quad A^\dagger = a^\dagger(\lambda), \quad K^2 = \nu^{-1}q^{-2\lambda N}, \quad p = q^{\lambda-1}. \quad (3.7)$$

Параметром деформации гармонического осциллятора является q , тогда как $p = q^{\lambda-1}$ характеризует выбор генераторов алгебры q -осциллятора. Отметим некоторые специальные значения этих параметров, представляющие особый интерес, часто, хотя и необоснованно, называемые разными деформациями гармонического осциллятора:

- 1) $p = 1/q$, K – центральный элемент, случай генераторов Арика–Куна;
- 2) $p = q^{-1/2}$, $\lambda = 1/2$, случай генераторов Макфарлейна–Биденхарна;
- 3) $p = q^{1/3}$, $\lambda = 4/3$, мы назовем этот выбор случаем генераторов Креммера–Жерве, поскольку квантовый детерминант из предыдущего раздела централен для $\mathcal{A}(R_{CG})$;
- 4) $q = 1$ (а p произволен из-за соответствующего предельного значения для λ), этот случай дает стандартный гармонический осциллятор с нестандартными генераторами.

По построению перестановочные соотношения (3.2) алгебры $\mathcal{A}_q$ ковариантны относительно линейного преобразования (кодействия) $X' = TX$ квантовой группы $\mathcal{A}(R_{CG})$:

$$\begin{aligned} A' &= T_{11}A + T_{12}K + T_{13}A^\dagger, \\ K' &= T_{21}A + T_{22}K + T_{23}A^\dagger, \\ (A^\dagger)' &= T_{31}A + T_{32}K + T_{33}A^\dagger. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Это преобразование является q -аналогом преобразования Боголюбова для канонических коммутационных соотношений. Однако в силу некоммутативности соответствующих коэффициентов физическое значение этих преобразований отлично от стандартного, если преобразование Боголюбова используется для приведения квадратичного гамильтониана к более простому каноническому виду. Преобразование (3.8) отличается также от преобразования генераторов q -осциллятора с коэффициентами, зависящими от оператора N [24].

Для иллюстрации этого различия в интерпретации рассмотрим простейший случай 4 стандартного гармонического осциллятора с нестандартными генераторами. Этот случай тривиального параметра деформации $q = 1$ сводится к чистому твисту $\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1}$, однако генераторы квантовой группы некоммутативны, и построить неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}(R_{CG})$ несложно. Для построения деформации (твиста) группы собственно преобразований Боголюбова следует приравнять к нулю два генератора алгебры $\mathcal{A}(R_{CG})$: $(T)_{2j} = 0$, $j = 1, 3$. Тогда квадратичные соотношения семи остальных генераторов могут быть реализованы парой вейлевских операторов $UV = pVU$ с унитарным оператором U и эрмитовым V . Всякое неприводимое представление редуцированной группы $\mathcal{A}(R_{CG})$ определяется этими генераторами и четырьмя вещественными параметрами стандартного преобразования Боголюбова.

Каждый гамильтониан $H(A^\dagger, A)$ (например, $H_0 = A^\dagger A$) при $\mathcal{A}(R_{CG})$ -кодействии отображается в оператор, действующий в тензорном произведении пространства гармонического осциллятора и пространства операторов Вейля U, V . Неприводимые представления полной квантовой группы $\mathcal{A}(R_{CG})$ построить намного труднее из-за некомпактности $*$ -алгебры (представления компактной квантовой группы $SU(n)$ получены в [25]).

Мы воспользовались этим примером, чтобы еще раз показать трудности, возникающие при физической интерпретации деформации кодействия групп [14, 15], если пытаться связать это кодействие со свойствами симметрии ковариантной системы. Это особенно существенно при деформации кинематических групп [26].

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ КМОЗ

Согласно КМОЗ [1, 2] по заданному решению уравнения Янга–Бакстера (R -матрице) можно построить целый ряд интегрируемых моделей. Важность соответствующих мо-

делей цепочек спинов связана с возможностью получения на их основе различных интегрируемых теоретико-полевых моделей в случае использования соответствующих предельных процедур [1]. В этой связи дополнительные параметры, добавляемые к R -матрице процедурой твиста F , весьма полезны. В работе [20] было указано, что твист R -матрицы

$$R(u) \rightarrow F_{21} R_{12}(u) F^{-1} \equiv R^{(F)}(u)$$

сохраняет свойство регулярности [2]: существование значения спектрального параметра $u = u_0$, где $R(u_0)$ пропорционально оператору перестановки $\mathcal{P}$. Очевидно, что из $R(u_0) \simeq \mathcal{P}$ следует

$$R^{(F)}(u_0) = F_{21} R_{12}(u_0) F^{-1} \simeq \mathcal{P}.$$

Это свойство регулярности существенно для построения локальных интегралов движения (см., например, [1–3]).

Условие Гекке (2.6) позволяет построить зависящее от спектрального параметра решение уравнения Янга–Бакстера посредством процедуры бакстеризации [27]:

$$\check{R}(u) = u\check{R} - \frac{1}{u}\check{R}^{-1} = (u - u^{-1})\check{R}_{\text{CG}} + \omega u^{-1}I. \quad (4.1)$$

Напомним, что $\check{R}(u)$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера, записанному в форме соотношения для генераторов группы кос $\check{R}_{12} \otimes \check{R}_{23} \otimes \check{R}_{12} = \check{R}_{23} \otimes \check{R}_{12} \otimes \check{R}_{23}$.

L -оператор интегрируемой спиновой цепочки совпадает с R -матрицей $R(u)$, а гамильтониан ($u_0 = \pm 1$) имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \sum_n h_{n,n+1}, \\ h_{1,2} &\simeq \mathcal{P} \frac{d}{du} R(u)|_{u=u_0} = 2\check{R}_{\text{CG}} + \text{const} \simeq \\ &\simeq \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q\nu & 0 & q/p^2 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & p^2/q & 0 & -p^2\nu/q & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^3 q e_{ii} \otimes e_{ii} + (p e_{21} \otimes e_{12} + p^{-1} e_{12} \otimes e_{21}) + \\ &\quad + q\nu \left(p e_{12} \otimes e_{32} - \left(\frac{p}{q} \right)^2 e_{32} \otimes e_{12} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{p^2}{q} e_{31} \otimes e_{13} + \frac{q}{p^2} e_{13} \otimes e_{31} \right) + \omega \sum_{a < b} e_{bb} \otimes e_{aa}. \end{aligned}$$

Поскольку преобразование твиста дает явное выражение новой R -матрицы через старую и элемент твиста $\mathcal{F}$, то возможно установить связь квантовых данных рассеяния (матрицы перехода) для исходной и деформированной интегрируемых моделей

$$T_t(u) = (\rho \otimes \pi)(\text{id} \otimes \Delta_t^{(N)})\mathcal{F}_{21}\mathcal{R}\mathcal{F}^{-1}, \quad (4.2)$$

где ρ и π – представления квантовой алгебры во вспомогательном и квантовом пространствах, соответственно [20]. Однако явное общее выражение для $T_t(u)$ довольно громоздко. Формула (4.2) содержит $(N - 1)$ итераций твистованного копроизведения $\Delta_t = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}$. Введем обозначения

$$(\text{id} \otimes \Delta)\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1,23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta^{(3)})\mathcal{F} = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\text{id} \otimes \Delta)\mathcal{F} = \mathcal{F}_{1,234} \text{ и т.д.}, \quad (4.3)$$

где индекс 1 соответствует вспомогательной квантовой алгебре (вспомогательное пространство с неприводимым представлением ρ). В этих обозначениях для итерации твистованного копроизведения Δ_t получаем

$$\begin{aligned} \Delta_t^{(3)} &= (\text{id} \otimes \Delta_t)\Delta_t = \mathcal{F}_{23}(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1})\mathcal{F}_{23}^{-1} = \\ &= \mathcal{F}_{23}\mathcal{F}_{1,23}\Delta^{(3)}\mathcal{F}_{1,23}^{-1}\mathcal{F}_{23}^{-1} = X_{123}\Delta^{(3)}(X_{123})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Следовательно, матрица перехода $T_t(u)$ твистованной (деформированной) спиновой цепочки в $(N - 1)$ узлах имеет вид

$$T_t(u) = (\rho \otimes \pi^{\otimes(N-1)}) X_{12\dots N} \left((\text{id} \otimes \Delta^{(N)})\mathcal{F}_{21}\mathcal{R}\mathcal{F}^{-1} \right) X_{12\dots N}^{-1}. \quad (4.5)$$

Хотя итерированное копроизведение является преобразованием подобия исходного (4.4), матрицы перехода связаны более сложным преобразованием, поскольку множители в (4.5) не являются взаимобратными. Алгебра Янга–Бакстера квантовых данных рассеяния $(T_t(u))_{ij}$ значительно сложнее по сравнению со случаем $SL(3)$ -спиновой цепочки [28] из-за дополнительных ненулевых элементов матрицы $R_{CG}(u)$, пропорциональных ν . Однако, как и в случае деформированной (твистованной) $XX\xi$ -спиновой цепочки [19, 20], спектр трансфер-матрицы $t(u) = \text{tr } T_t(u)$ совпадает со спектром цепочки $SL(3)$ -спинов с учетом измененных собственных значений диагональных элементов $T_t(u)$ на вакуумном векторе $(1, 0, 0)^t$. Уравнения Бете, определяющие два набора квазиимпульсов, имеют сходную структуру с очевидными изменениями, обусловленными параметром p [28]. Второй параметр ν входит в выражения для собственных и присоединенных векторов. Возникающий в перестановочных соотношениях операторов рождения и уничтожения $B_j(u) = T_{1j}(u)$, $j = 1, 2$, 4×4 -блок является R -матрицей асимметричной XXZ -модели. Эта R -матрица младшей размерности участвует во втором анзаце Бете для неоднородной XXZ -модели с квазиимпульсами первого набора в качестве параметров неоднородности. Таким образом, дополнительные диагональные параметры R -матрицы Крэммера–Жерве входят в уравнения Бете и в собственные значения трансфер-матрицы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преобразование твиста в теории квантовых групп сохраняет алгебраический сектор твистованной алгебры Хопфа. Следовательно, представления твистованной алгебры Хопфа те же, что и у нетвистованной. Однако изменение копроизведения приводит к существенной модификации структуры R -матрицы и соответствующих интегрируемых моделей, базирующихся на тензорных произведениях этих представлений. Обобщенная R -матрица Креммера–Жерве, будучи твистом стандартной, порождает более сложные интегрируемые системы. Две такие системы были рассмотрены в этой работе: 1) алгебра ковариантного q -осциллятора и 2) интегрируемая цепочка $sl(3)$ -спинов. Введены квантовые (деформированные) преобразования Боголюбова, применение которых ведет к увеличению числа степеней свободы. Мы надеемся, что дальнейшее изучение с учетом знания явного вида элемента твиста позволит вычислить большинство характеристик твистованных моделей по известным характеристикам соответствующих им нетвистованных моделей.

П. П. Кулиш признателен администрации и коллегам из Хельсинского института физики за гостеприимство и поддержку. Настоящая работа осуществлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-01152 – Е. В. Дамаскинский и № 96-01-00851 – П. П. Кулиш) и Академии наук Финляндии (грант № 37599 – М. Чайчиан).

Список литературы

- [1] *L. D. Faddeev*. Integrable models in $(1 + 1)$ -dimensional quantum field theory. In: 1982 Les Houches Lectures, Session XXXIX. Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics. Eds J.-B. Zuber and R. Stora. Amsterdam: Elsevier, 1984. P. 563; Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 1845; How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model. In: 1996 Les Houches Lectures. Amsterdam: Elsevier, 1996; hep-th/9605187.
- [2] *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin*. Quantum spectral transform method: recent developments. In: Integrable quantum field theories. Lect. Notes Phys, 1982. V. 151. P. 61.
- [3] *N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, V. E. Korepin*. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [4] Yang–Baxter Equation in Integrable Models. Ed. M. Jimbo. Singapore: World Scientific, 1989.
- [5] *V. G. Drinfeld*. Quantum groups. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM-1986). Amer. Math. Society. Providence. N. Y.: Berkley, 1987. V. 1. P. 798.
- [6] *В. Г. Дринфельд*. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 2. С. 30.
- [7] *N. Yu. Reshetikhin*. Lett. Math. Phys. 1990. V. 20. P. 331.
- [8] *Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 178.
- [9] *E. Cremmer, J.-L. Gervais*. Commun. Math. Phys. 1990. V. 134. P. 619.
- [10] *T. J. Hodges*. Nonstandard quantum groups associated to certain Belavin–Drinfeld triples. Contemp. Math. (to appear); q-alg/9609029; Intern. Math. Res. Notices. 1995. V. 10. P. 465; q-alg/9506018.

- [11] *A. D. Jacobs, J. F. Cornwell.* Twisting 2-cocycles for the construction of new non-standard quantum groups. q-alg/9702028.
- [12] *J. Wess, B. Zumino.* Nucl. Phys. B. (Proc. Suppl.) 1990. V. 18. P. 302.
- [13] *M. Irac-Astaud.* Rev. Math. Phys. 1996. V. 8. P. 1083; q-alg/9609008.
- [14] *П. П. Кулиш.* ТМФ. 1993. Т. 94. С. 193; *P. P. Kulish.* Quantum group covariant algebras. In: Proc. Inter. School of Physics "Enrico Fermi". Quantum Groups and their Applications in Physics. Varenna, Course 127. Eds L. Castellani and J. Wess. Amsterdam: IOS Press, 1995. P. 203.
- [15] *M. Chaichian, P. P. Kulish.* Quantum group covariant systems. In: From Field Theory to Quantum Groups. Eds B. Jancewics, J. Sobczyk. Singapore: World Scientific, 1996. P. 99; q-alg/9512017.
- [16] *J. Balog, L. Dąbrowski, L. Fehér.* Phys. Lett. B. V. 257. № 1/2. P. 74.
- [17] *P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky.* J. Phys. A. 1990. V. 23. № 9. P. L415.
- [18] *E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish.* Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. № 1. P. 153; q-alg/9610002.
- [19] *F. C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel, V. Rittenberg.* Ann. Phys. 1994. V. 230. P. 250.
- [20] *P. P. Kulish, A. A. Stolin.* Czech. J. Phys. 1997. V. 47. P. 123; q-alg/9708024.
- [21] *J.-M. Maillet, J. Sanchez de Santos.* Drinfeld twists and algebraic Bethe Ansatz. q-alg/9612012.
- [22] *G. Fiore.* Drinfeld twist and q -deforming maps for Lie group covariant Heisenberg algebras. q-alg/9708017.
- [23] *P. P. Kulish, A. I. Mudrov.* Universal Cremmer–Gervais R -matrix. Preprint POMI 98-2.
- [24] *A. T. Filippov, A. P. Isaev.* J. Phys. A. 1991. V. 24. P. L63.
- [25] *Ya. Soibelman.* Int. J. Mod. Phys. B. 1992. V. 7. Suppl.1b. P. 859.
- [26] *J. A. de Azcarraga, P. P. Kulish, F. Rodenas.* Phys. Lett. B. 1995. V. 351. P. 123.
- [27] *V. R. Jones.* Int. J. Mod. Phys. B. 1990. V. 4. P. 701.
- [28] *P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin.* J. Phys. A. 1983. V. 16. P. L591.

Поступила в редакцию 5.II.1998 г.