Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андрианов, О. О. Новиков, Чэнь Лань, Квантовая космология материи нескольких скалярных полей: некоторые точные решения, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 380–391

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8900>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 02:23:43

© 2015 г. А. А. Андрианов*, О. О. Новиков*, Чэнь Лань*

КВАНТОВАЯ КОСМОЛОГИЯ МАТЕРИИ НЕСКОЛЬКИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ: НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассматривается гравитация, взаимодействующая со скалярными полями материи и квантованная в подходе суперпространства, в котором волновой функционал описывается уравнениями Уилера–Девитта. В предположении о преимуществе однородной и изотропной геометрии исследован ведущий вклад в волновой функционал в приближении минисуперпространства с метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера и скалярными полями, зависящими от параметра времени. Построена модель нескольких скалярных полей с экспоненциальными потенциалами и кинетическими членами, включающими специальное смешивание, такое что в конечном итоге можно разделить переменные в уравнении Уилера–Девитта и найти его точные решения в терминах специальных функций. Детально исследовано полуклассическое приближение и выбраны граничные условия, позволяющие отобрать физические решения для классических космологий.

Ключевые слова: квантовая космология, уравнение Уилера–Девитта, минисуперпространство, экспоненциальный потенциал.

DOI: 10.4213/tmf8900

1. ВВЕДЕНИЕ

В космологии важную роль играют точные решения уравнений Эйнштейна при наличии материи. Для описания вселенной последние десятилетия стало популярно использовать релятивистские модели со скалярной материей, которые пригодны для описания инфляционного расширения на начальных этапах эволюции [1] и для описания космического ускорения [2] на более поздних этапах (модели квинтэссенции темной энергии [3]). Вместе с тем набор известных точно решаемых космологических моделей со скалярной материей невелик. Одна из таких моделей – это плоская вселенная Фридмана, заполненная скалярным полем с экспоненциальным потенциалом. Для одного скалярного поля различные решения были изучены в работах [4]–[12]. Недавно было построено общее решение уравнений Эйнштейна для этой модели [13]–[26].

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: sashaandrianov@gmail.com, oonovikov@gmail.com

Мы упомянули классические решения для эволюции геометрии вселенной. Однако, чтобы понять в деталях сингулярности метрики в момент Большого взрыва, нужно знать квантовые свойства гравитации, взаимодействующей с квантовыми полями материи. Несомненно, любое точное решение для квантовой вселенной неопределимо даже в ограниченном смысле – с квантованными несколькими степенями свободы. Чтобы обеспечить однозначный переход к классической динамике, обычно используется квантование Арновитта–Дезера–Мизнера в суперпространстве, практическая сущность которого дается уравнениями Уилера–Девитта (УД) (см. [27] и приведенные там ссылки), отражающими связи, обусловленные симметрией относительно диффеоморфизмов. Эти функциональные уравнения весьма сложны в решении. Однако можно предположить, что для в среднем плоских вселенных ведущие квантовые эффекты определяются флуктуациями гравитации и материи, однородными и изотропными в трехмерном пространстве, в то время как неоднородности и анизотропии могут быть успешно проанализированы в приближении малых квантовых флуктуаций. В этом случае мы приходим к редукции в минисуперпространство, в котором гравитация и поля материи зависят только от времени. Такая модель по сути представляет собой квантовую механику с конечным числом степеней свободы.

В настоящей работе мы как раз и предполагаем преимущество однородной изотропной геометрии и исследуем ведущий вклад в волновой функционал в приближении минисуперпространства с метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ), с вспомогательным полем (функцией хода), которое обеспечивает инвариантность относительно перепараметризации времени, и со скалярными полями, зависящими от времени. Мы строим модель с несколькими скалярными полями и с кинетическими членами, которые включают их смешивание. Это смешивание подобрано таким образом, что в конечном итоге можно разделить переменные в уравнении УДВ и найти его точные решения в терминах специальных функций. В разделе 2 мы исследуем классические уравнения Эйнштейна–Фридмана, решаем их и тем самым создаем основу для дальнейшего согласованного квантования уравнения УД (раздел 3) в приближении минисуперпространства. Точные квантовые решения уравнения получены в разделе 4, где также введены граничные условия для отбора физических квантовых решений, которые приводят к разумным классическим космологиям. Полуклассическое (ВКБ) приближение детально рассмотрено в разделе 5. Дальнейшие планы и перспективы в изучении этого класса моделей кратко обсуждаются в разделе 6.

2. МОДЕЛЬ НЕСКОЛЬКИХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Рассмотрим следующую модель с несколькими скалярными полями, минимально взаимодействующими с гравитацией:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa^2} R + \sum_{a,b} \frac{1}{2} M_{ab} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_b - \sum_a V_a e^{\lambda_a \phi_a} \right), \quad (1)$$

где индексы a и b пробегают значения от 1 до n . Ограничим рассмотрение минисуперпространством, соответствующим метрике ФРУ и пространственно-однородным полям,

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - e^{2\rho(t)} d\vec{x}^2, \quad \phi_a = \phi_a(t). \quad (2)$$

Действие для такого минисуперпространства принимает вид

$$S = \int dt e^{3\rho} \left(-\frac{3}{\kappa^2} \frac{\dot{\rho}^2}{N} + \sum_{a,b} M_{ab} \frac{\dot{\phi}_a \dot{\phi}_b}{2N} - N \sum_a V_a e^{\lambda_a \phi_a} \right). \quad (3)$$

Классические решения удобно искать в гамильтоновой формулировке. Канонические импульсы равны

$$p_\rho = -\frac{6}{\kappa^2} e^{3\rho} \frac{\dot{\rho}}{N}, \quad p_a = e^{3\rho} \sum_b M_{ab} \frac{\dot{\phi}_b}{N}, \quad p_N = 0. \quad (4)$$

Как и всегда в теории гравитации, функция Гамильтона является связью с множителем Лагранжа N ,

$$H = N e^{-3\rho} \left[-\frac{\kappa^2}{12} p_\rho^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,b} (M^{-1})_{ab} p_a p_b + \sum_a V_a e^{6\rho + \lambda_a \phi_a} \right]. \quad (5)$$

Чтобы устранить зависимость от разных степеней свободы в экспоненте, следует произвести следующее каноническое преобразование:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \rho, p_\rho \\ \phi_a, p_a \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{c} \rho, \omega \\ \chi_a, \pi_a \end{array} \right), \\ \omega &= p_\rho - \sum_a \frac{6}{\lambda_a} p_a, \quad \chi_a = \lambda_a \phi_a + 6\rho, \quad \pi_a = \frac{1}{\lambda_a} p_a, \end{aligned} \quad (6)$$

после чего функция Гамильтона принимает вид

$$H = N e^{-3\rho} \left[-\frac{\kappa^2}{12} \omega^2 - \kappa^2 \omega \sum_a \pi_a + \sum_{a,b} \left(\frac{\lambda_a \lambda_b}{2} (M^{-1})_{ab} - 3\kappa^2 \right) \pi_a \pi_b + \sum_a V_a e^{\chi_a} \right]. \quad (7)$$

Заметим, что новый канонический импульс ω сохраняется на поверхности связей, т. е.

$$\{\omega, H\} = -3H \approx 0. \quad (8)$$

Вообще говоря, данная модель не является точно решаемой в случае нескольких полей. Допустим, что матрица кинетического члена имеет особую форму:

$$(M^{-1})_{ab} = \frac{D_a \delta_{ab} + 6\kappa^2}{\lambda_a \lambda_b}, \quad (9)$$

такую что кинетическая энергия полей χ_a оказывается диагонализированной,

$$H = N e^{-3\rho} \left[-\frac{\kappa^2}{12} \omega^2 - \kappa^2 \omega \sum_a \pi_a + \frac{1}{2} \sum_a D_a \pi_a^2 + \sum_a V_a e^{\chi_a} \right]. \quad (10)$$

Как будет показано ниже, это позволяет разделить переменные как в классическом, так и в квантовом случае.

Классические решения могут быть легко найдены решением гамильтоновых уравнений движения. Выберем калибровку

$$N = e^{3\rho}.$$

Уравнения движения на поверхности связей принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_a &= \{\chi_a, H\} \simeq -\kappa^2 \omega + D_a \pi_a, & \dot{\pi}_a &= \{\pi_a, H\} \simeq -V_a e^{\chi_a}, \\ \dot{\rho} &= \{\rho, H\} \simeq -\frac{\kappa^2}{6} \omega - \kappa^2 \sum_a \pi_a, & \dot{\omega} &= \{\chi_a, H\} \simeq 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Дифференцируя первое уравнение по времени, получаем

$$\ddot{\chi}_a = -D_a V_a e^{\chi_a}, \quad (12)$$

откуда находим следующее решение:

$$e^{\chi_a} = \frac{2P_a^2}{D_a V_a} \frac{1}{\text{ch}^2(P_a t - Q_a)}, \quad (13)$$

где P_a, Q_a – константы интегрирования. Подставив этот результат в другие уравнения, получаем полное решение:

$$\begin{aligned}\pi_a &= -\frac{2P_a}{D_a} \text{th}(P_a t - Q_a) + \frac{\kappa^2}{D_a} \omega, & \rho &= \rho_0 + \sum_a \rho_a, \\ \rho_a &= -\frac{4P_a^2}{D_a} \omega t + \frac{\kappa^2}{D_a} \ln \text{ch}^2(P_a t - Q_a), \\ P_a^2 &= \frac{\kappa^2 \omega^2}{24} (6\kappa^2 + D_a n^{-1} + C_a D_a), & \sum_a C_a &= 0,\end{aligned}\quad (14)$$

где некоторые из констант интегрирования оказываются зафиксированы за счет уравнения связи $H = 0$.

Обратим внимание на то, что вещественность решений требует выполнения условия

$$\frac{P_a^2}{D_a V_a} > 0, \quad (15)$$

и это условие ограничивает разрешенные в классической динамике значения C_a . Для $D_a V_a < 0$ из него следует $P_a^2 = -\tilde{P}_a^2 < 0$,

$$\begin{aligned}e^{\chi_a} &= \frac{2\tilde{P}_a^2}{|D_a V_a|} \frac{1}{\cos^2(\tilde{P}_a t - \tilde{Q}_a)}, \\ \rho_a &= \frac{4\tilde{P}_a^2}{D_a} \omega t + \frac{\kappa^2}{D_a} \ln \cos^2(\tilde{P}_a t - \tilde{Q}_a).\end{aligned}\quad (16)$$

При $\tilde{P}_a t - \tilde{Q}_a = \pm\pi/2$ косинус обращается в нуль и как χ_a , так и ρ устремляются в бесконечность. Таким образом, в этом случае решение рассматривается на конечном интервале t . Заметим также, что в то время как в случае $P_a^2 > 0, D_a V_a > 0$ область возможных в классической динамике значений χ_a ограничена сверху, для $P_a^2 < 0, D_a V_a < 0$ она ограничена снизу.

Случай $D_a V_a < 0$ может соответствовать фантомным полям (квинтомам [28]) или отрицательным потенциалам, не ограниченным снизу. Вопрос стабильности космологий для таких систем выходит за рамки данной работы и будет оставлен для

дальнейшего анализа. Однако необходимо заметить, что согласно (9) достаточно малое отрицательное значение D_a может соответствовать положительно-определенной матрице кинетического члена M_{ab} .

В рамках модели с одним полем рассмотрим другую переменную времени, аналогичную рассмотренной в работе [25],

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{P}{DV} e^{\chi/2}. \quad (17)$$

В случае $P^2 > 0$, $DV > 0$ мы получаем

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \operatorname{arctg} \operatorname{th} \frac{Pt - Q}{2}, & e^{\chi_a} &= \frac{2P_a^2}{D_a V_a} \frac{1}{\cos 2(\tau - \tau_0)}, \\ \rho_a &= -\frac{4P_a}{D_a} \omega (Q + 2 \operatorname{arctg} \operatorname{th}(\tau - \tau_0)) + \frac{\kappa^2}{D_a} \ln \cos 2(\tau - \tau_0). \end{aligned} \quad (18)$$

Обратим внимание на то, что исходная временная переменная t соответствует только конечному интервалу τ . Однако на концах этого интервала метрика становится сингулярной, $e^{2\rho} = 0$, а за его пределами и вовсе комплексной.

В случае $P^2 < 0$, $DV < 0$

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \operatorname{arctg} \operatorname{th} \frac{\tilde{P}t - \tilde{Q}}{2}, & e^{\chi_a} &= \frac{2\tilde{P}_a^2}{|D_a V_a|} \frac{1}{\operatorname{ch} 2(\tau - \tau_0)}, \\ \rho_a &= \frac{4\tilde{P}_a}{D_a} \omega (\tilde{Q} + 2 \operatorname{arctg} \operatorname{th}(\tau - \tau_0)) + \frac{\kappa^2}{D_a} \ln \operatorname{ch} 2(\tau - \tau_0), \end{aligned} \quad (19)$$

т. е. ограниченный интервал t в этом случае соответствует всей вещественной оси τ .

Для изучения космологической эволюции удобнее всего использовать космическое время, для которого функция хода равна единице,

$$ds^2 = dt_{\text{cosm}}^2 - e^{2\rho} d\vec{x}^2, \quad t_{\text{cosm}} = \int_{t_0}^t N dt. \quad (20)$$

Рассмотрим случай, когда для всех полей верно $D_a > 0$, $V_a > 0$ и считается, что все поля проходят точку поворота примерно в одно и то же время, т. е. все $Q_a \simeq 0$. При больших значениях $|t|$ метрический фактор ρ ведет себя как линейная функция,

$$\rho \sim \rho_0 - \left[\frac{\kappa^2}{6} + \sum_a \frac{\kappa^4}{D_a} \right] \omega^3 t + \left[\sum_a \frac{\kappa^3}{2\sqrt{6}D_a} \sqrt{6\kappa^2 + D_a n^{-1} + C_a D_a} \right] \omega |t|. \quad (21)$$

Пусть $\omega < 0$. Тогда космическое время, прошедшее от Большого взрыва, при $t \rightarrow -\infty$ до точки поворота в $t = 0$ конечно. С другой стороны, космическое время от точки поворота до Большого сжатия при $t \rightarrow +\infty$ конечно, только если

$$\omega^2 < \sum_a \left[\frac{\kappa\sqrt{6}}{2D_a} \sqrt{6\kappa^2 + D_a n^{-1} + C_a D_a} \right] \left(1 + \sum_a \frac{6\kappa^2}{D_a} \right)^{-1}. \quad (22)$$

Чтобы получить решение с $\omega > 0$, достаточно обратить время $t \mapsto -t$ в решении для отрицательного значения ω .

Если же для хотя бы одного из полей $D_a < 0$ и $V_a > 0$ функция хода N ведет себя в окрестности $\tilde{P}_a t_{\pm} - \tilde{Q}_a = \pm\pi/2$ как $(t - t_{\pm})^{-6\kappa^2/|D_a|}$. Следовательно, эти особые точки, в которых происходит неограниченное расширение – Большой разрыв, достижимы за конечное космическое время, только если $|D_a| > 6\kappa^2$.

3. УРАВНЕНИЕ УД

Уравнение УД для рассматриваемого минисуперпространства получается каноническим квантованием для функции Гамильтона (5):

$$N e^{-3\rho} \left[\hbar^2 \frac{\kappa^2}{12} \partial_{\rho}^2 - \hbar^2 \frac{1}{2} \sum_{a,b} (M^{-1})_{ab} \partial_a \partial_b + \sum_a V_a e^{6\rho + \lambda_a \phi_a} \right] \Psi(\rho, \{\phi_a\}) = 0. \quad (23)$$

Множитель $N e^{-3\rho}$ не будет играть роли при поиске решений, а потому будет опущен.

Каноническое преобразование (6) в квантовом случае сводится просто к преобразованию координат и соответствующему преобразованию частных производных, после чего уравнение принимает вид

$$\left[\hbar^2 \frac{\kappa^2}{12} \partial_{\rho}^2 + \hbar^2 \kappa^2 \partial_{\rho} \sum_a \partial_a - \hbar^2 \sum_{a,b} \left(\frac{\lambda_a \lambda_b}{2} (M^{-1})_{ab} - 3\kappa^2 \right) \partial_a \partial_b + \sum_a V_a e^{\chi_a} \right] \Psi(\rho, \{\chi_a\}) = 0. \quad (24)$$

Поскольку в потенциале теперь не фигурирует ρ , удобно произвести преобразование Фурье,

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, \{\chi_a\}) &= \int d\omega e^{i\omega\rho/\hbar} \Psi(\omega, \{\chi_a\}), \\ \left[-\frac{\kappa^2}{12} \omega^2 + i\hbar\kappa^2 \omega \sum_a \partial_a - \hbar^2 \sum_{a,b} \left(\frac{\lambda_a \lambda_b}{2} (M^{-1})_{ab} - 3\kappa^2 \right) \partial_a \partial_b + \sum_a V_a e^{\chi_a} \right] \Psi(\omega, \{\chi_a\}) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

В случае особой формы матрицы кинетического члена

$$(M^{-1})_{ab} = \frac{D_a \delta_{ab} + 6\kappa^2}{\lambda_a \lambda_b} \quad (26)$$

смешанные члены сокращаются и частные решения уравнения могут быть найдены разделением переменных,

$$\Psi(\omega, \{\chi_a\}) = \prod_a \Psi_a(\omega, \chi_a), \quad (27)$$

где Ψ_a зависят только от одной координаты χ_a .

Соответствующие уравнения принимают вид

$$\left[-\frac{\kappa^2}{12} \omega^2 (n^{-1} + C_a) + i\hbar\kappa^2 \omega \partial_a - \hbar^2 \frac{D_a}{2} \partial_a^2 + V_a e^{\chi_a} \right] \Psi_a(\omega, \chi_a) = 0, \quad (28)$$

где C_a – произвольные константы, подчиняющиеся условию $\sum_a C_a = 0$.

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ УД

Рассмотрим теперь точные решения уравнений (28). После замены

$$\Psi = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a\right] f, \quad z = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2V_a}{D_a}} e^{\chi_a/2} \quad (29)$$

мы получаем модифицированное уравнение Бесселя

$$[z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + \nu_a^2 - z^2] f(\omega, z) = 0, \quad (30)$$

$$\nu_a = \frac{4P_a}{\hbar D_a}, \quad P_a^2 = \frac{\kappa^2 \omega^2}{24} (6\kappa^2 + D_a n^{-1} + C_a D_a),$$

причем P_a выражается так же, как в классическом решении (13), (14).

Таким образом, мы получаем точное решение

$$\Psi_a(\omega, \chi_a) = A_\omega^{(+)} \Psi_a^{(+)}(\omega, \chi_a) + A_\omega^{(-)} \Psi_a^{(+)}(\omega, \chi_a), \quad (31)$$

$$\Psi_a^{(+)} = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a\right] K_{i\nu_a} \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2V_a}{D_a}} e^{\chi_a/2} \right), \quad (32)$$

$$\Psi_a^{(-)} = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a\right] L_{i\nu_a} \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2V_a}{D_a}} e^{\chi_a/2} \right), \quad (33)$$

где L_ν выражается через модифицированные функции Бесселя как

$$L_\nu(z) = \frac{\pi i}{2 \sin(\mu \pi)} (I_\nu(z) + I_{-\nu}(z)). \quad (34)$$

Рассмотрим случай $P_a^2 > 0$, $D_a V_a > 0$. Рассмотрим предел $\chi_a \rightarrow -\infty$ ($z \rightarrow +0$), который также соответствует $\rho \rightarrow -\infty$ при фиксированном ϕ_a . Используя асимптотику модифицированных функций Бесселя с чисто мнимым порядком вблизи нуля [29], получаем, что оба частных решения ведут себя как плоские волны:

$$\begin{aligned} \Psi_a^{(+)} &\sim -\sqrt{\frac{\pi}{\nu_a \operatorname{sh} \nu_a \pi}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a\right] \left[\sin\left(\frac{\nu_a \chi_a}{2} - \delta_a\right) + O(e^{\chi_a}) \right], \\ \Psi_a^{(-)} &\sim \sqrt{\frac{\pi}{\nu_a \operatorname{sh} \nu_a \pi}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a\right] \left[\cos\left(\frac{\nu_a \chi_a}{2} - \delta_a\right) + O(e^{\chi_a}) \right], \\ \delta_a &= \nu_a \ln \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2V_a}{D_a}} + \arg[\Gamma(1 + i\nu)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Рассмотрим теперь предел $\chi_a \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow +\infty$), который также соответствует $\rho \rightarrow +\infty$ при фиксированном ϕ_a . Используя ведущую асимптотику функций Бесселя $I_{i\nu}(z)$ и $K_{i\nu}(z)$ на больших значениях аргумента $|z| \rightarrow \infty$ (согласно 8.451 в [30]), мы получаем

$$\Psi_a^{(\pm)} \sim \frac{\pi^{\pm 1/2} \sqrt{\hbar}}{2} \left(\frac{V_a}{2D_a} \right)^{1/4} e^{-\chi_a/4} \exp\left[\mp \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2V_a}{D_a}} e^{\chi_a/2}\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a\right]. \quad (36)$$

Отбор решений может производиться исходя из необходимости квадратичной интегрируемости по ρ от $-\infty$ до $+\infty$ для обеспечения эрмитовости оператора π_ρ и согласованности схем квантования Дирака или БРСТ/БФВ¹⁾ [31]. Поскольку это условие должно выполняться независимо от значений $\{\phi_a\}$, оно сводится к убыванию решения при больших значениях каждого из χ_a . Таким образом, для $P_a^2 > 0$, $D_a V_a > 0$ получаем

$$\Psi(\rho, \{\chi_a\}) = \int d\omega A(\omega) e^{i\omega\rho/\hbar} \prod_a \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a \right] K_{i\nu_a} \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2V_a}{D_a}} e^{\chi_a/2} \right). \quad (37)$$

Рассмотрим теперь случай $P_a^2 = -\tilde{P}_a^2$, $V_a D_a < 0$. Тогда решение удобнее переписать в виде

$$\Psi_a(\omega, \chi_a) = \tilde{A}_\omega^{(+)} \tilde{\Psi}_a^{(+)}(\omega, \chi_a) + \tilde{A}_\omega^{(-)} \tilde{\Psi}_a^{(+)}(\omega, \chi_a), \quad (38)$$

$$\Psi_a^{(\pm)} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a \right] J_{\pm \tilde{\nu}_a} \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{\left| \frac{2V_a}{D_a} \right|} e^{\chi_a/2} \right), \quad (39)$$

где $\tilde{\nu}_a = |\nu_a|$. Теперь предел

$$\chi_a \rightarrow +\infty \quad \left(y_a = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\left| \frac{2V_a}{D_a} \right|} e^{\chi_a/2} \rightarrow +\infty \right)$$

соответствует осцилляциям,

$$\begin{aligned} \Psi_a^{(\pm)} \sim \sqrt{\frac{\hbar}{\pi}} \left(\frac{V_a}{2D_a} \right)^{1/4} e^{-\chi_a/4} \left[\cos \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{\left| \frac{2V_a}{D_a} \right|} e^{\chi_a/2} \mp \frac{\pi}{2} \tilde{\nu}_a - \frac{\pi}{4} \right) - \right. \\ \left. - \sin \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{\left| \frac{2V_a}{D_a} \right|} e^{\chi_a/2} \mp \frac{\pi}{2} \tilde{\nu}_a - \frac{\pi}{4} \right) + O(e^{-\chi_a}) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

в то время как в пределе $\chi_a \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow +0$), используя асимптотику функции Бесселя из 8.440 в [30], получаем

$$\tilde{\Psi}_a^{(\pm)} \sim \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a \right] \left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{\left| \frac{2V_a}{D_a} \right|} \right)^{\pm \tilde{\nu}_a} e^{\pm \nu_a \chi_a/2}. \quad (41)$$

Квадратичная интегрируемость по ρ требует выбора убывающего решения, т. е.

$$\Psi(\rho, \{\chi_a\}) = \int d\omega A(\omega) e^{i\omega\rho/\hbar} \prod_a \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{\kappa^2 \omega}{D_a} \chi_a \right] J_{\tilde{\nu}_a} \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{\left| \frac{2V_a}{D_a} \right|} e^{\chi_a/2} \right). \quad (42)$$

Заметим, что в обоих случаях выбор производился на основании анализа поведения решения в подбарьерной области, запрещенной в классической динамике.

¹⁾Схема Беки–Руэ–Стора–Тютин/Баталина–Фрадкина–Вилковского.

5. АСИМПТОТИКА ВКБ

Рассмотрим асимптотику ВКБ уравнения УД (24)

$$\Psi(\rho, \{\chi_a\}) = \psi(\rho, \{\chi_a\}) e^{iS(\rho, \{\chi_a\})/\hbar}. \quad (43)$$

Уравнение Гамильтона–Якоби принимает вид,

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa^2}{12}(\partial_\rho S)^2 - \kappa^2(\partial_\rho S) \sum_a (\partial_a S) + \\ & + \sum_{a,b} \left(\frac{\lambda_a \lambda_b}{2} (M^{-1})_{ab} - 3\kappa^2 \right) (\partial_a S)(\partial_b S) + \sum_a V_a e^{\chi_a} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Как и для классического и квантового уравнений, сокращение смешанных членов допускает разделение переменных,

$$S(\rho, \{\chi_a\}) = \omega\rho + \sum_a S(\omega, \chi_a), \quad (45)$$

которое соответствует преобразованию Фурье и разделению переменных в квантовом уравнении,

$$\Psi(\rho, \{\chi_a\}) = e^{i\omega\rho/\hbar} \prod_a \Psi_a(\chi_a) \sim e^{i\omega\rho/\hbar} \prod_a \psi_a(\chi_a) e^{iS_a(\chi_a)/\hbar}. \quad (46)$$

Поскольку ω сохраняется в классическом случае, именно такие квазиклассические решения должны соответствовать корректному классическому пределу.

Уравнение Гамильтона–Якоби на S_a

$$-\frac{\kappa^2}{12}\omega^2(n^{-1} + C_a) - \kappa^2\omega(\partial_a S_a) + \frac{D_a}{2}(\partial_a S_a)^2 + V_a e^{\chi_a} = 0 \quad (47)$$

имеет точное решение

$$S_a = \frac{\kappa^2}{D_a}\omega(\chi_a - \chi_a^{(0)}) + \epsilon_a \frac{4P_a}{D_a} \left(\sqrt{1 - \frac{V_a D_a}{2P_a^2} e^{\chi_a}} - \operatorname{arcth} \sqrt{1 - \frac{V_a D_a}{2P_a^2} e^{\chi_a}} \right), \quad (48)$$

где $\epsilon_a = \pm 1$ и $P_a^2 = (\kappa^2\omega^2/24)(6\kappa^2 + D_a n^{-1} + C_a D_a)$, а константа выбрана так, чтобы решение обращалось в нуль в точке поворота $e^{\chi_a^{(0)}} = 2P_a^2/V_a D_a$.

Рассматривая действие (48) как классическое действие Гамильтона–Якоби, можно получить классические траектории путем дифференцирования по параметрам ω и C_a . Тогда из требований

$$\frac{\partial S}{\partial \omega} = \text{const}, \quad \frac{\partial S}{\partial C_a} \Big|_{\sum_a C_a = 0} = \text{const} \quad (49)$$

должны следовать уравнения на траектории. Подставляя решения (13), (14) и дифференцируя по времени, получаем

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{P_a}{12}\right)^2 (1 - \operatorname{sgn}(P_a t - Q_a)) = 0, \\ & -4\epsilon_a \operatorname{sgn}(P_a t - Q_a) + 4\epsilon_1 \operatorname{sgn}(P_1 t - Q_1) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Таким образом, знак ϵ_a выбирается в зависимости от направления движения к точке поворота.

Ведущий порядок предэкспоненциального множителя ψ_a имеет вид

$$\psi_a = \left(1 - \frac{V_a D_a}{2P_a^2} e^{\chi_a}\right)^{-1/4} + O(\hbar). \quad (51)$$

В точке поворота приближение ВКБ перестает работать, однако мы можем спить решения в разрешенной и запрещенной в классической динамике областях, используя приближение потенциала линейной функцией $V e^{\chi_a} \sim V_a \chi_a$ и, соответственно, приближение решения функцией Эйри [32]. Для случая $P_a^2/D_a V_a > 0$ и убывающего при $\chi_a \rightarrow +\infty$ решения это дает

$$\begin{aligned} \Psi_a^{\chi_a < \chi_a^{(0)}} &\sim \frac{2B}{F^{1/4}} \exp\left[i \frac{\kappa^2}{\hbar D_a} \omega(\chi_a - \chi_a^{(0)})\right] \sin\left[\frac{4P_a}{\hbar D_a} \left(\sqrt{F} - \operatorname{arctg} \sqrt{F} + \frac{\pi}{4}\right)\right], \\ \Psi_a^{\chi_a > \chi_a^{(0)}} &\sim \frac{B}{(-F)^{1/4}} \exp\left[i \frac{\kappa^2}{\hbar D_a} \omega(\chi_a - \chi_a^{(0)})\right] \exp\left[-\frac{4P_a}{\hbar D_a} (\sqrt{-F} - \operatorname{arctg} \sqrt{-F})\right], \end{aligned} \quad (52)$$

где B – произвольная константа,

$$F = 1 - \frac{V_a D_a}{2P_a^2} e^{\chi_a}. \quad (53)$$

Сравнив эти результаты с асимптотиками для больших значений порядка функции Бесселя [33], мы заключаем, что полученная асимптотика совпадает с корректной асимптотикой $\Psi^{(+)}$ в (32) при

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar \pi D_a}{2P_a}} \exp\left(i \frac{\kappa^2}{\hbar D_a} \omega \chi_a^{(0)} - \frac{2\pi P_a}{\hbar D_a}\right). \quad (54)$$

В случае же $P_a^2/D_a V_a < 0$ необходимо выбрать решение, убывающее при $\chi_a \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \Psi_a^{\chi_a > \chi_a^{(0)}} &\sim \frac{2B}{(-F)^{1/4}} \exp\left[i \frac{\kappa^2}{\hbar D_a} \omega(\chi_a - \chi_a^{(0)})\right] \times \\ &\times \sin\left[\frac{4\tilde{P}_a}{\hbar D_a} \left(\sqrt{-F} - \operatorname{arctg} \sqrt{-F} + \frac{\pi}{4}\right)\right], \end{aligned} \quad (55)$$

$$\Psi_a^{\chi_a < \chi_a^{(0)}} \sim \frac{B}{F^{1/4}} \exp\left[i \frac{\kappa^2}{\hbar D_a} \omega(\chi_a - \chi_a^{(0)})\right] \exp\left(\frac{4\tilde{P}_a}{\hbar D_a} (\sqrt{F} - \operatorname{arctg} \sqrt{F})\right).$$

Следующее значение B соответствует асимптотике $\Psi^{(+)}$ в (39) (здесь использована формула 8.452 из [30]):

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar D_a}{2\pi \tilde{P}_a}} \exp\left[i \frac{\kappa^2}{\hbar D_a} \omega \chi_a^{(0)}\right]. \quad (56)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ: ПЕРСПЕКТИВЫ

Мы предложили модель нескольких скалярных полей, взаимодействующих с гравитацией, допускающую точные классические решения вследствие разделения переменных в специальной калибровке (при специальном выборе временной переменной). Аналитические решения в этой модели найдены также после ее квантования в подходе Арновитта–Дезера–Мизнера для уравнения УД.

Исследовано квазиклассическое соответствие решений для последующего определения физического времени. В работе рассмотрен ограниченный класс взаимодействий скалярных полей как с положительными кинетическими членами и потенциалами, так и с отрицательными, но таких, которые обеспечивают вещественные классические траектории. Хотя и найдены все классические решения, вопрос стабильности космологий для частично фантомных систем (квинтомов [28]) и для отрицательных потенциалов, не ограниченных снизу, оставлен для дальнейшего анализа.

В перспективе мы надеемся также изучить точные решения для PT -симметричных комплексных потенциалов [34] и сравнить космологические траектории в этих потенциалах с траекториями в системах фантомных скалярных полей (квинтомов [28]).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-02-00127) и Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] A. A. Starobinsky, “Stochastic de Sitter (inflationary stage in the early universe)”, *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, Lecture Notes in Physics, **246**, eds. H. J. de Vega, N. Sánchez, Springer, Berlin, 1986, 107–126; A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Contemporary Concepts in Physics, **5**, CRC Press, Boca Raton, 1990, [arXiv: hep-th/0503203](#).
- [2] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis et al. [Supernova Search Team Collab.], *Astron. J.*, **116**:3 (1998), 1009–1038, [arXiv: astro-ph/9805201](#); S. Perlmutter G. Aldering, G. Goldhaber et al. [Supernova Cosmology Project Collab.], *Astrophys. J.*, **517**:2 (1999), 565–586, [arXiv: astro-ph/9812133](#).
- [3] V. Sahni, A. A. Starobinsky, *Internat. J. Modern Phys. D*, **9**:4 (2000), 373–444, [arXiv: astro-ph/9904398](#); **15**:12 (2006), 2105–2132, [arXiv: astro-ph/0610026](#); T. Padmanabhan, *Phys. Rept.*, **380**:5–6 (2003), 235–320, [arXiv: hep-th/0212290](#); P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Modern Phys.*, **75**:2 (2003), 559–606, [arXiv: astro-ph/0207347](#); E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, *Internat. J. Modern Phys. D*, **15**:11 (2006), 1753–1936, [arXiv: hep-th/0603057](#).
- [4] F. Lucchin, S. Matarrese, *Phys. Rev. D*, **32**:6 (1985), 1316–1322.
- [5] J. J. Halliwell, *Phys. Lett. B*, **185**:3–4 (1987), 341–344.
- [6] J. D. Barrow, *Phys. Lett. B*, **187**:1–2 (1987), 12–16.
- [7] A. B. Burd, J. D. Barrow, *Nucl. Phys. B*, **308**:4 (1988), 929–945.
- [8] R. de Ritis, G. Marmo, G. Platania, C. Rubano, P. Scudellaro, C. Stornaiolo, *Phys. Rev. D*, **42**:4 (1990), 1091–1097.
- [9] V. Muller, H. J. Schmidt, A. A. Starobinsky, *Class. Quant. Grav.*, **7**:7 (1990), 1163–1168.
- [10] G. F. R. Ellis, M. S. Madsen, *Class. Quant. Grav.*, **8**:4 (1991), 667–676.
- [11] A. R. Liddle, R. J. Scherrer, *Phys. Rev. D*, **59**:2 (1999), 023509, 7 pp., [arXiv: astro-ph/9809272](#).

- [12] V. Gorini, A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *Phys. Rev. D*, **69**:12 (2004), 123512, 16 pp., arXiv: hep-th/0311111.
- [13] J. M. Aguirregabiria, L. P. Chimento, *Class. Quant. Grav.*, **13**:12 (1996), 3197–3209.
- [14] L. P. Chimento, *Class. Quant. Grav.*, **15**:4 (1998), 965–974.
- [15] C. Rubano, P. Scudellaro, *Gen. Rel. Grav.*, **34**:2, 307–328, arXiv: astro-ph/0103335.
- [16] C. Rubano, J. D. Barrow, *Phys. Rev. D*, **64**:12 (2001), 127301, 3 pp., arXiv: gr-qc/0105037.
- [17] P. K. Townsend, “Cosmic acceleration and M-theory”, *XIVth International Congress on Mathematical Physics* (Lisbon, Portugal, 28 July–2 August 2003), ed. J.-C. Zambrini, World Sci., Singapore, 655–662, arXiv: hep-th/0308149.
- [18] L. P. Chimento, A. E. Cossarini, N. A. Zuccalá, *Class. Quant. Grav.*, **15**:1 (1998), 57–74.
- [19] P. K. Townsend, M. N. R. Wohlfarth, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:6 (2003), 061302, 4 pp., arXiv: hep-th/0303097.
- [20] R. Emparan, J. Garriga, *JHEP*, **05** (2003), 028, 8 pp., arXiv: hep-th/0304124.
- [21] I. P. Neupane, *Class. Quant. Grav.*, **21**:18 (2004), 4383–4397, arXiv: hep-th/0311071.
- [22] J. G. Russo, *Phys. Lett. B*, **600**:3–4 (2004), 185–190, arXiv: hep-th/0403010.
- [23] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D*, **70**:4 (2004), 043539, 20 pp., arXiv: hep-th/0405034.
- [24] E. Dudas, N. Kitazawa, A. Sagnotti, *Phys. Lett. B*, **694**:1 (2010), 80–88, arXiv: 1009.0874.
- [25] A. A. Andrianov, F. Cannata, A. Yu. Kamenshchik, *JCAP*, **10** (2011), 004, 21 pp., arXiv: 1105.4515; *Phys. Rev. D*, **86**:10 (2012), 107303, 6 pp.
- [26] E. Piedipalumbo, P. Scudellaro, G. Esposito, C. Rubano, *Gen. Rel. Grav.*, **44**:10 (2012), 2611–2643, arXiv: 1112.0502.
- [27] C. Kiefer, *Quantum Gravity*, International Series of Monographs on Physics, **136**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.
- [28] Y. F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, J.-Q. Xia, *Phys. Rept.*, **493**:1 (2010), 1–60, arXiv: 0909.2776.
- [29] T. M. Dunster, *SIAM J. Math. Anal.*, **21**:4 (1990), 995–1018.
- [30] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.
- [31] A. O. Barvinsky, A. Yu. Kamenshchik, *Phys. Rev. D*, **89**:4 (2014), 043526, 19 pp., arXiv: 1312.3147.
- [32] C. M. Bender, S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I. Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Springer, New York, 1999.
- [33] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, Наука, М., 1966.
- [34] A. A. Andrianov, F. Cannata, A. Yu. Kamenshchik, D. Regoli, *J. Modern Phys. D*, **19**:1 (2010), 97–111.