Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, Ортогональные многочлены и деформированные осцилляторы, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 68–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:05:40

© 2015 г.

В. В. Борзов*, Е. В. Дамаскинский*

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

На примере осциллятора Фибоначчи обсуждается построение осциллятороподобных систем, связанных с ортогональными полиномами. Рассмотрен также вопрос о размерностях соответствующих алгебр Ли.

Ключевые слова: обобщенный осциллятор, ортогональные полиномы, числа Фибоначчи, алгебры осциллятороподобных систем.

DOI: 10.4213/tmf8903

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа написана на основе доклада, прочитанного одним из авторов (Е. В. Д.) на конференции “В поисках фундаментальных симметрий”, посвященной 90-летию Юрия Викторович Новожилова. Поэтому стиль изложения носит не вполне академический характер.

Авторы учились на физическом факультете СПбГУ в период, когда кафедру теории поля и физики элементарных частиц возглавлял Ю. В. Новожилов, поддерживающий традиции обучения студентов, сложившиеся под влиянием академиков В. И. Смирнова и В. А. Фока. Высокий уровень физико-математического образования на физическом факультете открывал для его выпускников широкие возможности приложения своих сил как в области физики, так и в области математики. В нашем случае это привело к тому, что автор-физик (Е. В. Д.) стал интересоваться достижениями современной математической физики, а автор-математик (В. В. Б.) – некоторыми задачами теоретической физики. Начиная с 2000 года авторы объединили свои усилия в исследовании алгебраических структур квантовой физики. В настоящей работе мы приведем некоторые результаты, полученные нами в последние годы. Эти результаты связаны с обобщением понятия гармонического осциллятора, являющегося одним из основных понятий квантовой механики.

*Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: borzov.vadim@yandex.ru

†Военный институт (инженерно-технический) Военной академии материально-технического обеспечения, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: evd@pdmi.ras.ru

Развитие квантовой физики в конце прошлого века, в частности появление квантовых групп и квантовых алгебр [1]–[4] (школа Л. Д. Фаддеева, В. Г. Дринфельда, 1983–1987 гг.), естественным образом привело к появлению различных обобщений понятия квантового гармонического осциллятора [5]–[8] (Л. С. Biedenharn, А. J. Macfarlane, П. П. Кулиш и Е. В. Дамаскинский, 1989, 1990 гг.), связанных с q -деформациями канонических коммутационных соотношений алгебры гармонического осциллятора¹⁾.

Дальнейшие исследования привели к построению обобщений алгебры Гейзенберга, порождающихся ортогональными многочленами схемы Аски–Вильсона [14]. В работе [15] одного из авторов была развита общая схема построения осциллятороподобных алгебр для произвольного семейства ортогональных полиномов на вещественной оси (далее мы будем называть такие алгебры обобщенными осцилляторами).

За последние годы мы применили этот подход к построению алгебр обобщенных осцилляторов, связанных с:

- некоторыми классическими ортогональными многочленами непрерывного аргумента (полиномы Лагерра, Чебышёва (первого и второго рода), Лежандра, Гегенбауера и Якоби);
- некоторыми классическими ортогональными многочленами дискретного аргумента (полиномы Мейкснера, Шарлье, Кравчука);
- некоторыми q -аналогами классических ортогональных многочленов (дискретные и непрерывные q -полиномы Эрмита, q -полиномы Шарлье);
- обобщенными полиномами Фибоначчи;
- полиномами Чебышёва–Коорнвиндера от двух переменных.

Кроме того, в ряде случаев были построены и исследованы соответствующие когерентные состояния типа Барута–Жиранделло и Клаудера–Газо.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, СВЯЗАННОГО С СИСТЕМОЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Пусть задана система ортогональных многочленов $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$, образующая ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mu} = L^2(\mathbb{R}; \mu(dx))$. По мере μ можно построить осциллятороподобную систему, для которой эти полиномы играют ту же роль, что и полиномы Эрмита для стандартного квантового гармонического осциллятора. Приведем основные моменты такого построения (подробное описание см. в работе [15]).

Итак, пусть μ – (симметричная) вероятностная мера на $\mathbb{R}$ с конечными моментами $\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu$ (где $\mu_{2k+1} = 0$). Эти моменты однозначно определяют положительную последовательность $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ и систему ортогональных многочленов с рекуррентными соотношениями

$$xp_n(x) = b_n p_{n+1}(x) + b_{n-1} p_{n-1}(x). \quad (1)$$

Данные многочлены образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}_{\mu}$. Соотношения (1) определяют действие оператора координаты X_{μ} :

$$X_{\mu} p_n(x) = b_n p_{n+1}(x) + b_{n-1} p_{n-1}(x).$$

¹⁾Попытки обобщения гейзенберговских коммутационных соотношений предпринимались и ранее [9]–[13].

Аналогичным образом можно определить оператор импульса P_μ , который сопряжен оператору координаты относительно базиса:

$$P_\mu p_n(x) = i(-b_n p_{n+1}(x) + b_{n-1} p_{n-1}(x)).$$

Тогда в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\mu$ можно определить сопряженные друг другу операторы рождения и уничтожения $a_\mu^\pm = (X_\mu \pm iP_\mu)/\sqrt{2}$, оператор N_μ , нумерующий базисные состояния, и самосопряженный гамильтониан

$$H_\mu = X_\mu^2 + P_\mu^2 = a_\mu^+ a_\mu^- + a_\mu^- a_\mu^+,$$

причем

$$\begin{aligned} a_\mu^+ p_n(x) &= \sqrt{2} b_n p_{n+1}(x), & a_\mu^- p_n(x) &= \sqrt{2} b_{n-1} p_{n-1}(x), \\ N_\mu p_n(x) &= n p_n(x), & H_\mu p_n(x) &= \lambda_n p_n(x), \end{aligned}$$

где $\lambda_0 = 2b_0^2$, $\lambda_n = 2(b_{n-1}^2 + b_n^2)$. Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям обобщенной алгебры Гейзенберга

$$[a_\mu^-, a_\mu^+] = 2(B(N_\mu + I) - B(N_\mu)), \quad [N_\mu, a_\mu^\pm] = \pm a_\mu^\pm,$$

где оператор-функция $B(N_\mu)$ определен на базисе следующим образом:

$$B(N_\mu) p_n(x) = b_{n-1}^2 p_n(x), \quad p_n(x) \in \mathcal{H}_\mu.$$

Центр этой алгебры порождается элементом $\mathcal{C} = 2B(N_\mu) - a_\mu^+ a_\mu^-$. При соответствующих изменениях (см. работу [15]) те же рассуждения применимы и к более общему случаю (несимметричной меры μ)

$$x p_n(x) = b_n p_{n+1}(x) + a_n p_n(x) + b_{n-1} p_{n-1}(x). \quad (2)$$

Когерентные состояния типа Барута-Жирарделло для такого обобщенного осциллятора определяются соотношениями

$$a^- |z\rangle = z |z\rangle, \quad |z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2} (|z|^2)^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\sqrt{2} b_{n-1})!}} p_n,$$

где

$$\mathcal{N}(|z|^2) = \langle z | z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!}.$$

Можно доказать, что таким образом определенные когерентные состояния образуют сверхполное семейство состояний в гильбертовом пространстве. Кроме того, эти состояния минимизируют соответствующее соотношение неопределенности.

Основная сложность в применении данного подхода состоит в решении проблемы моментов, которая возникает как при построении меры ортогональности для полиномов (в неклассическом случае), так и при построении меры, участвующей в соотношении (сверх)полноты для когерентных состояний. Возникает также ряд проблем с получением явного вида когерентных состояний в терминах специальных (гипергеометрических или базисных гипергеометрических) функций.

3. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ОСЦИЛЛЯТОР ФИБОНАЧЧИ

В 1202 г. итальянский купец и математик Леонардо Пизанский (1180–1240), известный как Фибоначчи, опубликовал сочинение “Liber Abaca”. В этом произведении были собраны почти все математические сведения, известные к этому времени. В частности, из этого труда европейские математики, использующие латинский вариант счисления, узнали об арабском (десятичном) счислении, что значительно упростило арифметические вычисления. Среди множества задач, приведенных в этой книге, была, получившая широкую известность “задача о кроликах”²⁾, решение которой дает последовательность чисел, известная как последовательность чисел Фибоначчи:

$$F_n: \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Элементы этой последовательности (числа Фибоначчи)³⁾ определяются рекуррентным соотношением $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 2$) с начальными условиями $F_0 = 1$, $F_1 = 1$.

Известно, что числа F_n связаны с многочленами Чебышёва второго рода $U_n(x)$ соотношением [19]–[21]

$$F_{n+1} = (-i)^n U_n\left(\frac{i}{2}\right), \quad U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

Существует много вариантов обобщения чисел Фибоначчи. Наиболее естественные из них определяются соотношением

$$\mathfrak{F}_{n+1}^{a,b} = a\mathfrak{F}_n^{a,b} + b\mathfrak{F}_{n-1}^{a,b}.$$

Используя связь чисел Фибоначчи с полиномами Чебышёва, Исмаил [21] предложил однопараметрическое обобщение чисел Фибоначчи

$$F_{n+1}(\theta) = (-i)^n U_n(i \operatorname{sh} \theta) \implies F_n(\theta) = e^{(n-1)\theta} \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

где $q = -e^{-2\theta}$. Заметим, что F_{n+1} получается из $F_{n+1}(\theta)$ при $\operatorname{sh} \theta = 1/2$. Это обобщение удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$y_{n+1}(\theta) = 2 \operatorname{sh} \theta y_n(\theta) + y_{n-1}(\theta)$$

с начальными условиями $F_1(\theta) = 1$, $F_2(\theta) = 2 \operatorname{sh} \theta$. Исмаил показал, что $F_n(\theta)$ порождают классическую проблему моментов для меры

$$\nu(x) = (1 - q^\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} q^{\alpha k} \delta(x - q^k e^{-\theta}),$$

где $\delta(x - c)$ – единичная дискретная мера, сосредоточенная в точке $x = c$. При четных α эта мера положительна с единичной полной массой, а в остальных случаях ν является единичной знакопеременной (signed) мерой. Этой мере соответствуют ортогональные многочлены $\{p_n(xe^\theta; q^{\alpha-1}, 1)\}$, известные как малые q -полиномы

²⁾Одна из разновидностей этой задачи – задача о смертных кроликах – обсуждается в работах [16], [17].

³⁾Простейшие свойства чисел Фибоначчи изложены в известной брошюре Воробьева [18].

Якоби, имеющие следующий явный вид:

$$p_n(x; a, b) = {}_2\phi_1(q^{-n}, abq^{n+1}; aq \mid q, qx) = \sum_{j=0}^n \frac{(q; q)_n (abq^{n+1}; q)_j}{(q; q)_j (q; q)_{n-j}} q^{\binom{j+1}{2}} \frac{(-x)^j}{(aq; q)_j},$$

где q -факториалы определяются формулой

$$(\lambda; q)_s = (1 - \lambda)(1 - \lambda q) \dots (1 - \lambda q^{s-1}).$$

Ричардсон заметил [22], что все элементы матрицы, обратной к матрице с элементами $1/F_{i+j+1}$, где F_n — n -е число Фибоначчи, являются целыми числами (так как тем же свойством обладает матрица Гильберта, он назвал эту матрицу матрицей Филберта, образовав термин по правилу $\text{Fi}(\text{bonacci}) + (\text{Hi})\text{lb}(\text{ert})$). Используя этот результат, Берг показал [23], что последовательность $1/F_{n+2}$, $n = 1, 2, \dots$, чисел, обратных к числам Фибоначчи, представляет собой последовательность моментов дискретной вероятностной меры. Он также установил, что эта мера является мерой ортогональности для малых q -полиномов Якоби

$$p_n(x; a, b; q) = {}_2\phi_1\left(q^{-n}, abq^{n+1} \mid q, xq\right)$$

при $a = q$, $b = 1$ и $q = (1 - \sqrt{5})/(1 + \sqrt{5})$.

Применив описанный выше метод построения обобщенного осциллятора в случае полиномов $p_n(x) \equiv p_n(x; a, b; q)$, мы получаем соответствующую осциллятороподобную систему и набор когерентных состояний для нее [24]. Далее мы будем называть эту систему осциллятором Фибоначчи⁴⁾.

В нашем случае рекуррентные соотношения имеют вид

$$-xp_n(x) = A_n p_{n+1}(x) - (A_n + C_n)p_n(x) + C_n p_{n-1}(x),$$

где $p_0(x) = 1$ и

$$A_n = q^n \frac{(1 - aq^{n+1})(1 - abq^{n+1})}{(1 - abq^{2n})(1 - abq^{2(n+1)})}, \quad C_n = aq^n \frac{(1 - q^n)(1 - bq^n)}{(1 - abq^{2n})(1 - abq^{2(n+1)})}.$$

Положим $p_n(x) = \gamma_n \Psi_n(x)$, где

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{C_1 C_2 \dots C_n}{A_0 A_1 \dots A_{n-1}}} = \left(a^n q^n \frac{1 - abq}{1 - abq^{2n+1}} \frac{(q, q)_n (bq, q)_n}{(aq, q)_n (abq, q)_n} \right)^{1/2}.$$

Заметим, что в случае $a = q$, $b = 1$ мы имеем

$$\gamma_n = q^n \frac{(q, q)_n}{(q^2, q)_n} \sqrt{\frac{1 - q^2}{1 - q^{2(n+1)}}}.$$

⁴⁾Заметим, что в литературе (вслед за работой [25]) осциллятором Фибоначчи иногда называют двухпараметрический деформированный осциллятор [26], который связан с базисным числом $[n; q, p] = (q^n - p^{-n})/(q - p^{-1})$, удовлетворяющим (как и другие базисные числа) обобщенному варианту рекуррентного соотношения Фибоначчи

$$[n+1; q, p] = (q+p)^{-1}[n; q, p] - qp^{-1}[n-1; q, p], \quad [0; p, q] = 0, \quad [1; p, q] = 1.$$

Тогда для $\Psi_n(x)$ получаем

$$x\Psi_n(x) = -b_n\Psi_{n+1}(x) + a_n\Psi_n(x) - b_n\Psi_{n-1}(x),$$

где $\Psi_0(x) = 1$, $a_n = A_n + C_n$ и $b_{n-1} = \sqrt{A_{n-1}C_n}$.

При $a = q$, $b = 1$ имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{q^n}{1 - q^{2(n+1)}} \left(\frac{(1 - q^n)^2}{1 - q^{2n+1}} + \frac{(1 - q^{n+2})^2}{1 - q^{2n+3}} \right), \\ b_{n-1} &= \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n+1})}{\sqrt{(1 - q^{2n})(1 - q^{2(n+1)})}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим теперь

$$X_\mu = \text{Re}(\tilde{X}_\mu - \tilde{P}_\mu), \quad P_\mu = -i \text{Im}(\tilde{X}_\mu - \tilde{P}_\mu),$$

где операторы $\tilde{X}_\mu$ и $\tilde{P}_\mu$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\mu \Psi_n &= b_{n-1}\Psi_{n-1} + a_n\Psi_n + b_n\Psi_{n+1}, \\ \tilde{P}_\mu \Psi_n &= i(b_{n-1}\Psi_{n-1} + a_n\Psi_n - b_n\Psi_{n+1}). \end{aligned}$$

В результате, используя описанные выше соотношения, мы определим алгебру осциллятора Фибоначчи⁵⁾.

Когерентные состояния типа Барута–Жиранделло для этого осциллятора определим, как и выше, соотношениями

$$a^-|z\rangle = z|z\rangle, \quad |z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\sqrt{2}b_{n-1})!} \Psi_n,$$

и после некоторых преобразований мы получаем следующее выражение для нормировочного множителя:

$$\mathcal{N}(|z|^2) = {}_6\phi_1 \left(-q, -q^{3/2}, q^{3/2}, q^{3/2}, -q^{3/2}, -q^2 \middle| q; \frac{|z|^2}{2} \right),$$

где по определению

$${}_6\phi_1 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \\ b_1 \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6; q)_k}{(b_1; q)_k} (-1)^{2k} q^{-2k \binom{k}{2}}$$

и мы использовали стандартное обозначение для q -символа Похгамера:

$$\begin{aligned} (a; q)_0 &= 1, & (a; q)_n &= (1 - a)(1 - aq) \dots (1 - aq^{n-1}), \\ (a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n &= (a_1; q)_n (a_2; q)_n \dots (a_m; q)_n. \end{aligned}$$

В случае $a = q$, $b = 1$ выражение для когерентных состояний упрощается и принимает вид

$$|z\rangle = \mathcal{N}^{-1/2}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n(n+3)/2} p_n(x; q, 1|q) \frac{(q^3; q)_{2n}}{(q; q)_n^2} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right)^n$$

⁵⁾Отметим, что в работах [27], [28] также обсуждаются деформированные осцилляторы, связанные с (обобщенными) числами Фибоначчи.

с тем же выражением для нормирующего множителя. Для завершения нашего построения желательно найти в явном виде меру, участвующую в соотношении сверхполноты для построенных когерентных состояний осциллятора Фибоначчи. В настоящий момент эта задача находится в стадии разработки.

4. РАЗМЕРНОСТЬ АЛГЕБР ОБОБЩЕННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В недавно опубликованной работе [29] авторы исследовали условия, при которых алгебра $\mathfrak{A}$ обобщенного осциллятора, связанного описанным выше образом с ортогональными многочленами, является конечномерной. В работе [29] рассматривался только случай полиномов, ортогональных по симметричной мере на вещественной оси (когда матрица Якоби, соответствующая рекуррентным соотношениям (1), имеет нулевую диагональ). В работе [30] мы уточнили формулировку достаточного условия и распространили результаты на случай матрицы Якоби с ненулевой диагональю, соответствующей рекуррентным соотношениям (2). Справедливо следующее утверждение [30].

ТЕОРЕМА. *Определим последовательность*

$$A_n^{(0)} = b_n^2 - b_{n-1}^2, \quad \dots, \quad A_n^{(j)} = A_{n+1}^{(j-1)} - A_n^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. *Если при любом фиксированном $j > 0$ последовательность $\{A_n^{(j)}\}_{n=0}^\infty$ непостоянна, т. е. $A_n^{(j)} \neq \text{const}$ для $n = 0, 1, \dots$, то алгебра $\mathfrak{A}$ обобщенного осциллятора бесконечномерна.*

2. *Алгебра $\mathfrak{A}$ обобщенного осциллятора конечномерна тогда и только тогда, когда*

$$b_n^2 = (\beta_0 + \beta_2 n)(1 + n), \quad \beta_0, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

и в этом случае размерность алгебры $\mathfrak{A}$ равна 4.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих эту теорему.

В качестве первого примера рассмотрим случай многочленов Чебышёва первого рода $T_n(x)$, который не рассматривался в статье [29]. Полиномы $T_n(x)$ определяются соотношением

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

и ортогональны в гильбертовом пространстве $L^2([-1, 1]; \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx)$. Нормированные полиномы

$$\Psi_n^{-1/2}(x) = \sqrt{2} T_n(x), \quad n \geq 1, \quad \Psi_0^{-1/2}(x) = T_0(x) = 1,$$

удовлетворяют симметричным рекуррентным соотношениям (1), в которых

$$b_n = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В этом случае $A_n^{(j)} \neq \text{const}$ для всех $n = 0, 1, \dots$ при любых фиксированных $j > 0$, следовательно, соответствующая алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечномерна.

В качестве второго примера рассмотрим полиномы Лагерра, удовлетворяющие несимметричным рекуррентным соотношениям. Эти полиномы

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\alpha + 1}{n!} {}_1F_1(-n, \alpha + 1; x)$$

ортогональны в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+^1; x^\alpha e^{-x} dx)$. Нормированные полиномы

$$\Psi_n(x) = d_n^{-1} L_n^\alpha(x), \quad d_n = \sqrt{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}}, \quad n \geq 0,$$

удовлетворяют несимметричным рекуррентным соотношениям (2), в которых

$$b_n = -\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}, \quad a_n = 2n + \alpha + 1.$$

В этом случае коэффициенты b_n^2 имеют вид (5), следовательно, соответствующая алгебра $\mathfrak{A}_L$ четырехмерна, но не изоморфна алгебре гармонического осциллятора.

Наконец, последний пример – это рассмотренный выше осциллятор Фибоначчи. В этом случае коэффициенты b_n определяются формулами (3) и, как и в первом примере, $A_n^{(j)} \neq \text{const}$ для всех $n = 0, 1, \dots$ при любых фиксированных $j > 0$. Следовательно, соответствующая алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечномерна.

Благодарности. Авторы признательны П. П. Кулишу и В. Д. Ляховскому за обсуждение ряда вопросов, связанных с темой статьи. Исследования Е. В. Дамаскинского выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-03148_a).

Список литературы

- [1] П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **101** (1981), 101–110.
- [2] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, “Liouville model on the lattice”, *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, Lecture Notes in Physics, **246**, eds. H. J. de Vega, N. Sánchez, Springer, Berlin, 1986, 166–179.
- [3] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1:1** (1989), 178–206.
- [4] V. G. Drinfel’d, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Berkeley, CA, August 3–11, 1986), ed. A. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [5] L. C. Biedenharn, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22:18** (1989), L873–L878.
- [6] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22:21** (1989), 4581–4588.
- [7] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23:9** (1990), L415–L419.
- [8] Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **189** (1991), 37–74.
- [9] G. Iwata, *Prog. Theoret. Phys.*, **6:4** (1951), 524–528.
- [10] В. В. Курышкин, “Об одном обобщении операторов рождения и уничтожения в квантовой теории (U. квантования)”, депонент ВИНТИ СССР 15 3936-76, 1976; V. V. Kuryshkin, *Ann. Found. L. de Broglie*, **5** (1980), 111–126.
- [11] J. Cigler, *Monatsh. Math.*, **88:2** (1979), 87–105.
- [12] A. Jannussis, G. Bbodimas, D. Sourlas, L. Papaloucas, K. Vlachos, P. Siafaricas, *Hadronic J.*, **6:6** (1983), 1653–1686.
- [13] M. Arik, D. D. Coon, *J. Math. Phys.*, **17:4** (1976), 524–527.
- [14] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, Springer, Berlin, 2010.

- [15] V. V. Borzov, *Integral Transf. Spec. Funct.*, **12**:2 (2001), 115–138.
- [16] V. E. Hoggatt, Jr., D. A. Lind, *Fibonacci Quart.*, **7**:5 (1969), 482–487.
- [17] A. M. Oller, *The dying rabbit problem revisited*, arXiv:0710.2216.
- [18] Н. Н. Воробьев, *Числа Фибоначчи*, Наука, М., 1964.
- [19] R. Askey, *Math. Teacher*, **97**:2 (2004), 116–119.
- [20] R. Askey, *Math. Teacher*, **98**:9 (2005), 610–615.
- [21] M. E. H. Ismail, *One parameter generalizations of the Fibonacci and Lucas polynomials*, arXiv:math/0606743.
- [22] T. M. Richardson, *Fibonacci Quart.*, **39**:3 (2001), 268–275.
- [23] C. Berg, *Arab. J. Math. Sci.*, **17**:2 (2011), 75–88, arXiv:math/0609283.
- [24] Е. В. Дамаскинский, В. В. Борзов, “Осциллятор Фибоначчи”, *Квантовая теория и космология*, Сборник статей, посвященный 70-летию профессора А. А. Гриба, Лаб. теор. физ. им. А. А. Фридмана, СПб., 2009, 54–65.
- [25] M. Arik, E. Demircan, T. Turgut, L. Ekinici, M. Mungan, *Z. Phys. C.*, **55**:1 (1992), 89–95.
- [26] R. Chakrabarti, R. Jagannathan, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**:13 (1991), L711–L718.
- [27] J. de Souza, E. M. F. Curado, M. A. Rego-Monteiro, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:33 (2006), 10415–10425.
- [28] M. Schork, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:15 (2007), 4207–4214.
- [29] G. Honnouvo, K. Thirulogasanthar, *J. Math. Phys.*, **55**:9 (2014), 093511, 13 pp., arXiv:1305.2509.
- [30] V. V. Borzov, E. V. Damaskinsky, “On dimensions of oscillator algebras”, *Proceedings of Days on Diffraction* (St. Petersburg, Russia, 26–30, May 2014), eds. O. V. Motygin, A. P. Kiselev, L. I. Goray, A. Ya. Kazakov, A. S. Kirpichnikova, IEEE, New York, 2014, 48–52.