Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Манида, Динамика взаимодействующих частиц с $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрией, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 499–504

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:08:29

© 2015 г.

С. Н. Манида*

ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ С $SL(2, \mathbb{R})$ -СИММЕТРИЕЙ

Рассмотрены закономерности развития системы классических точечных частиц, взаимодействие которых обладает дополнительной $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрией. Установлена связь дополнительных законов сохранения в нерелятивистской механике с соответствующими законами сохранения в пространстве анти-де Ситтера, представленными в координатах Бельтрами.

Ключевые слова: принцип относительности, релятивистская кинематика, пространство анти-де Ситтера, координаты Бельтрами.

DOI: 10.4213/tmf8904

1. ВВЕДЕНИЕ

Более ста лет назад была установлена [1] дополнительная (конформная) симметрия уравнений Максвелла. Нерелятивистский аналог такой симметрии – симметрия уравнения Шредингера для свободной частицы – был выявлен сравнительно недавно [2]. В настоящее время соответствующая группа симметрии носит название *группа Шредингера*. Эта группа представляет собой расширение группы Галилея, в которой обычные трансляции времени расширены до группы $SL(2, \mathbb{R})$. К системам, обладающим такой симметрией, относятся двумерные системы заряд–вершина [3], трехмерные системы заряд–монополь [4], частицы в однородных гравитационных полях [5], заряженные частицы около горизонта экстремальной черной дыры Райсснера–Нордстрёма [6] и др. Соответствующая симметрия в нерелятивистской классической механике была установлена для гидродинамики [7] и для динамики свободных частиц [8]. Известно также [9], [10], что лагранжиан системы свободных релятивистских частиц в пространстве анти-де Ситтера связан с лагранжианом нерелятивистской системы частиц, обладающей динамической $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрией.

Обычно $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрию в нерелятивистской физике связывают с нерелятивистским пределом конформной симметрии. В действительности нерелятивистский предел конформной группы не приводит к $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрии. Два различных варианта перехода от пространства анти-де Ситтера к нерелятивистскому пространству Галилея–Ньютона порождают две различные (но изоморфные) группы

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: sergey@manida.com

преобразований Галилея. Объединение этих групп приводит к группе симметрии Шредингера, имеющей $SL(2, \mathbb{R})$ -подгруппу. Расширение группы симметрии Галилея до группы симметрии Шредингера позволяет получить дополнительные законы сохранения, что дает возможность вычислять различные параметры систем с $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрией. В настоящей работе после рассмотрения общих свойств пространственно-временных преобразований с $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрией мы изучаем динамику газа, состоящего из точечных нерелятивистских взаимодействующих частиц с потенциалом взаимодействия $\sim 1/r^2$, обладающим указанной симметрией. Аналогичная система из невзаимодействующих частиц была рассмотрена в работе [10].

2. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С $SL(2, \mathbb{R})$ -СИММЕТРИЕЙ

Рассмотрим трансляции времени в пространстве анти-де Ситтера. Удобнее всего описывать пространство-время постоянной отрицательной кривизны (пространство анти-де Ситтера) как четырехмерную гиперболическую поверхность в пятимерном пространстве с сигнатурой $(+, +, -, -, -)$ и (псевдо)декартовыми координатами Z_A , $A = -1, 0, 1, 2, 3$:

$$Z_{-1}^2 + Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 = R^2.$$

Произведем поворот в плоскости Z_{-1}, Z_0 на некоторый угол θ :

$$\begin{aligned} Z'_{-1} &= Z_{-1} \cos \theta - Z_0 \sin \theta, \\ Z'_0 &= Z_0 \cos \theta + Z_{-1} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Наиболее подходящими для описания динамики материальной точки в пространстве анти-де Ситтера являются координаты Бельтрами, представляющие собой проекцию точек гиперboloида из точки $Z_{-1} = Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$ на четырехмерную гиперплоскость $Z_{-1} = -R$:

$$x^\mu \equiv \frac{Z_\mu}{Z_{-1}} R, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

В координатах Бельтрами геодезические свободных частиц описываются линейными или дробно-линейными функциями. Это утверждение почти очевидно, так как геодезические свободных частиц на гиперboloида представляют собой пересечение гиперboloида плоскостью, проходящей через точку $Z_A = 0$, т. е. через полюс проекции координат Бельтрами.

В координатах Бельтрами поворот (1) принимает вид

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{x_0 + R \operatorname{tg} \theta}{1 - (x_0/R) \operatorname{tg} \theta}, \\ \mathbf{r}' &= \frac{\mathbf{r}}{1 - (x_0/R) \operatorname{tg} \theta}, \quad \mathbf{r} \equiv \{x_1, x_2, x_3\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обычный предельный переход $R \rightarrow \infty$, $R \operatorname{tg} \theta \equiv c\tau$, $x_0 \equiv ct$ приводит преобразования (2) к стандартному виду:

$$t' = t + \tau, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}. \quad (3)$$

Если в формулах (2) перейти к пределу $c \rightarrow \infty$, $\operatorname{tg} \theta \equiv \alpha R/c$, получим

$$t' = \frac{t}{1 - \alpha t}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{1 - \alpha t}. \quad (4)$$

Генератор преобразования (2) представим в виде

$$\hat{E} = \frac{R}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ct}{R} \left(t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (5)$$

Предельный переход в выражении (5)

$$\hat{H} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{c}{R} \hat{E} = \frac{\partial}{\partial t}$$

приводит к генератору преобразования (3), а предельный переход

$$\hat{K} \equiv \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{R}{c} \hat{E} = t \left(t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

– к генератору преобразования (4). Коммутатор генераторов $\hat{H}$ и $\hat{K}$

$$[\hat{H}, \hat{K}] = 2t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r} \equiv \hat{D}$$

замыкает алгебру $sl(2, \mathbb{R})$:

$$[\hat{D}, \hat{H}] = -2\hat{H}, \quad [\hat{D}, \hat{K}] = 2\hat{K}.$$

Конечное преобразование, порождаемое генератором $\hat{D}$, имеет вид

$$t' = \alpha^2 t, \quad \mathbf{r}' = \alpha \mathbf{r}. \quad (6)$$

Конечные преобразования (3), (4) и (6) можно представить в общем виде как

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\sigma t + \gamma}, \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{\sigma t + \gamma}, \quad (7)$$

где $\alpha\gamma - \beta\sigma = 1$. Генератор преобразований (7) имеет вид линейной комбинации введенных выше генераторов $\hat{H}$, $\hat{K}$, $\hat{D}$:

$$\hat{G} = (\alpha - 1)\hat{D} + \beta\hat{H} - \sigma\hat{K}.$$

На первый взгляд преобразования (4) и (6) не имеют отношения к симметриям классической физики, однако, как отмечено выше, найдены десятки физических явлений и процессов, обладающих такой симметрией.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С $SL(2, \mathbb{R})$ -СИММЕТРИЕЙ

Действие с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 - \sum_{\substack{a, b=1, \\ a \neq b}}^N U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|), \quad (8)$$

описывающим систему N точечных взаимодействующих частиц с массами m_a , обладает хорошо известной десятипараметрической группой симметрии, приводящей к законам сохранения энергии

$$H = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 + \sum_{\substack{a,b=1, \\ a \neq b}}^N U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|),$$

углового момента

$$\mathbf{J} = \sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{r}_a, \dot{\mathbf{r}}_a]$$

и импульса

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a,$$

а также к закону движения центра масс системы

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \frac{t\mathbf{P}}{M},$$

который следует из сохранения величин $\mathbf{P}$ и

$$\mathbf{R}_0 = \sum_{a=1}^N \frac{m_a (\mathbf{r}_a - \dot{\mathbf{r}}_a t)}{M}.$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{R} = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \mathbf{r}_a}{M}, \quad M = \sum_{a=1}^N m_a.$$

В случае произвольного потенциала взаимодействия частиц $U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$ о развитии системы во времени ничего более сказать нельзя, по крайней мере до установления термодинамического равновесия (если оно возможно). Однако для определенного “конформного” потенциала можно получить больше информации о развитии параметров системы.

Элементарное действие $dS = L dt$, построенное с использованием лагранжиана с двухчастичным потенциалом взаимодействия, зависящим от расстояния как $\sim 1/r^2$,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1, \\ a \neq b}}^N \frac{g_{ab}}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|^2}, \quad (9)$$

оказывается ковариантным при преобразованиях (7). Действительно, из (7) получаем

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{dt}{(\sigma t + \gamma)^2}, \\ d\mathbf{r}'_a &= \frac{d\mathbf{r}_a}{\sigma t + \gamma} - \frac{\sigma \mathbf{r}_a dt}{(\sigma t + \gamma)^2}, \\ \dot{\mathbf{r}}'_a &= \dot{\mathbf{r}}_a(\sigma t + \gamma) - \mathbf{r}_a. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом этих равенств видно, что преобразованный лагранжиан отличается от лагранжиана (9) на полную производную:

$$L' = L - \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma}{2(\sigma t + \gamma)} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a^2 \right],$$

что доказывает $SL(2, \mathbb{R})$ -симметрию соответствующей динамики. Установив ковариантные свойства лагранжиана, можем получить с помощью теоремы Нётер законы сохранения, соответствующие этой дополнительной симметрии.

Симметрии, порождаемой генератором $\hat{D}$, соответствует сохранение величины

$$D_0 = -Ht + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a (\dot{\mathbf{r}}_a \mathbf{r}_a). \quad (11)$$

Симметрии, порождаемой генератором $\hat{K}$, соответствует сохранение величины

$$K_0 = -Ht^2 - 2D_0t + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a^2. \quad (12)$$

Для определения новых параметров развития системы введем зависящие от времени величины

$$D(t) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a (\dot{\mathbf{r}}_a \mathbf{r}_a), \quad K(t) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a^2. \quad (13)$$

Начальные (при $t = 0$) значения величин (13) совпадают с сохраняющимися величинами (11), (12): $D(0) = D_0$, $K(0) = K_0$. Развитие этих величин во времени получаем непосредственно из равенств (13):

$$D(t) = D_0 + Ht, \quad K(t) = K_0 + 2D_0t + Ht^2.$$

Функция $D(t)$ имеет смысл “коррелятора” координат и скоростей частиц и может принимать любые значения и иметь любой знак в зависимости от того, сжимается или разлетается облако частиц. При положительной энергии H “коррелятор” растет, облако разлетается, при отрицательной энергии облако сжимается.

Величина $K(t)$ (след тензора момента инерции системы) существенно положительна. Ее обращение в нуль означает “схлопывание” (коллапс) системы. Это “схлопывание” может произойти при $H < 0$ или при $H > 0$ и $D_0 < -\sqrt{HK_0}$ за время

$$t = -\frac{D_0}{H} - \frac{1}{H} \sqrt{D_0^2 - HK_0}. \quad (14)$$

Конечно, в процессе “схлопывания” частицы приобретают сколь угодно большую скорость и нерелятивистская механика перестает работать. К сожалению, стандартная релятивистская механика не обладает рассматриваемой симметрией, так что область применимости приведенных выше формул ограничена нерелятивистским пределом.

Благодарности. Работа поддержана Санкт-Петербургским государственным университетом (грант № 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] H. Bateman, *Proc. London Math. Soc.*, **7**:1 (1909), 70–89.
- [2] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, *Nuovo Cimento A*, **34**:4 (1976), 569–612.
- [3] R. Jackiw, *Ann. Phys.*, **201**:1 (1990), 83–116.
- [4] R. Jackiw, *Ann. Phys.*, **129**:1 (1980), 183–200.
- [5] D. Deser, R. Jackiw, G.'t Hooft, *Ann. Phys.*, **152**:1 (1984), 220–235.
- [6] P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P. K. Townsend, A. van Proyen, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:21 (1998), 4553–4556.
- [7] L. O’Raifeartaigh, V. V. Sreedhar, *Ann. Phys.*, **293**:2 (2001), 215–227.
- [8] O. Jahn, V. V. Sreedhar, *Am. J. Phys.*, **69**:10 (2001), 1039–1043.
- [9] С. Н. Манида, *ТМФ*, **169**:2 (2011), 323–336.
- [10] Т. Ангсачон, С. Н. Манида, М. Е. Чайковский, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 13–21.