Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Славянов, Антиквантование и соответствующие симметрии, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 186–191

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8905>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:42:13

© 2015 г.

С. Ю. Славянов*

АНТИКВАНТОВАНИЕ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СИММЕТРИИ

Приведен обзор результатов по соотношениям между уравнениями Гойна и уравнениями Пенлеве, а также по их симметриям. В основном эти результаты рассеяны по предыдущим статьям автора и его последователей.

Ключевые слова: антиквантование, симметрии, уравнение Гойна, деформированное уравнение Гойна, интегральные преобразования.

DOI: 10.4213/tmf8905

1. ПРЕАМБУЛА

Прежде всего, приведем несколько фраз о Ю. В. Новожилове, написанных мною несколько лет тому назад: “В 1971 году под руководством декана Юрия Викторовича Новожилова началась первая фаза переезда физического факультета в Петергоф. Он много помог мне в получении квартиры в Петергофе и становлении маленьким боссом – куратором студенческого курса. Юрий Викторович являлся для меня идеальным менеджером: он не занимался мелкими придирками, однако был твердым и последовательным в принципиальных вопросах”.

2. ВВЕДЕНИЕ

В 1926 г. Шредингер опубликовал четыре статьи в *Annalen der Physik* под названием “Квантование как задача на собственные значения” [1]. В этих статьях он превратил нелинейные уравнения классической механики в линейные уравнения квантовой механики. С тех пор последние называются уравнениями Шредингера.

В 1996 г. автор в статье [2], опубликованной в *Journal of Physics A*, предпринял попытку выполнить обратное преобразование от стационарного уравнения Шредингера к нелинейному уравнению классической механики. Эта попытка была ограничена с точки зрения общности, но очень плодотворна с точки зрения включенных классов уравнений. Класс линейных уравнений известен как класс Гойна. Любое уравнение из этого класса характеризуется наличием двух параметров: один рассматривается как время, а другой (называемый в теории обыкновенных дифференциальных

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: slav@ss2034.spb.edu

уравнений аксессуарным параметром) рассматривается как энергия. Зависимость от времени является адиабатичной. Генерируемые при антиквантовании нелинейные уравнения известны как уравнения Пенлеве. Они имеют то свойство, что их решения являются аналитическими функциями на римановой поверхности с точками ветвления, совпадающими с особенностями уравнения.

Соотношение между уравнениями Гойна и уравнениями Пенлеве первоначально рассматривалось в статье Фукса [3], датированной 1906 г. Это соотношение изучалось в рамках так называемого условия изомонодромности. Требуется введение в уравнение Гойна дополнительной ложной особенности. Важность уравнений Пенлеве следует из гипотезы Абловица–Рамани–Сегура, которая утверждает, что любая одномерная редукция интегрируемого уравнения в частных производных сводится к надлежащему уравнению Пенлеве.

Уравнение Шредингера, являющееся линейным уравнением второго порядка, может быть конвертировано в линейную (2×2) -систему уравнений первого порядка. Соответствующие системы также глубоко изучались. Они тесно связаны с 21-й проблемой Гильберта, которая была разрешена Болибрухом [4]. Эти системы могут быть доведены до систем с коэффициентами, которые представляют собой полиномы первой степени. Следовательно, можно применить интегральные преобразования, порождающие многие симметрии. Здесь надо упомянуть пионерскую статью Фока [5], датированную 1926 г., где он нашел симметрию кулоновской задачи.

3. УРАВНЕНИЯ КЛАССА ГОЙНА

Уравнение Гойна – это фуксово дифференциальное уравнение с четырьмя регулярными особыми точками, расположенными без потери общности в $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = t$, $z_4 = \infty$ на комплексной плоскости переменной z . Само уравнение и его различные конфлюэнтные случаи играют важную роль в прикладной математике. Многие известные специальные функции математической физики (гипергеометрические функции, функции Маттье, сфероидальные функции и т. д.) являются решениями уравнений класса Гойна (см. обзор этих уравнений в книге [6]).

В настоящей работе мы используем следующее представление уравнения Гойна:

$$\sigma(z)w'' + \sum_{j=1}^3 (1 - \theta_j)\sigma_j(z)w' + (\alpha\beta z - \sigma_3(t)h)w = 0, \quad (1)$$

где $\sigma(z) = z(z-1)(z-t)$, $\sigma_j(z) = \sigma(z)/(z-z_j)$. Параметры θ_j , $j = 1, 2, 3$, являются характеристическими показателями для решений с сингулярностями в точках z_j , в то время как α, β – это характеристические показатели на бесконечности. Следует отметить, что θ_3 рассматривается как зависимый параметр, поскольку относительно характеристических показателей в особенностях должно выполняться условие Фукса (выбор одного зависимого параметра θ_3 среди $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \alpha$ и β произволен). Параметр h называется аксессуарным параметром уравнения (1). Он нормирован в соответствии с условием

$$\operatorname{res}_{z=t} \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(z)} = 1. \quad (2)$$

Здесь и далее параметр h обозначает энергию. Следовательно, уравнение Гойна характеризуется шестью параметрами: четыре локальных параметра θ_1 , θ_2 , α и β , параметр t , означающий здесь время, и параметр h .

Применяя процесс конфлюэнции, когда особенности сливаются одна с другой, а некоторые коэффициенты стремятся к бесконечности [6], можно получить конфлюэнтные уравнения Гойна. Например, биконфлюэнтным уравнением Гойна будет

$$zw'' - (z^2 + tz - c)w' + (-\alpha z - h)w = 0.$$

Это уравнение соответствует ангармоническому квантовому осциллятору. Полный список других конфлюэнтных уравнений можно найти в книге [6].

4. ФУКСОВА СИСТЕМА

Пусть имеется матрица полиномиального “вращения”

$$R = \begin{pmatrix} z(z-1) & \rho z \\ 0 & (z-t) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Обратная к ней матрица равна

$$R^{-1} = \sigma^{-1} \begin{pmatrix} z-t & -\rho z \\ 0 & z(z-1) \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор $\vec{w}$ является решением (2×2) -системы

$$\vec{w}' = R^{-1}S\vec{w} = T\vec{w}, \quad S = \begin{pmatrix} \alpha z + e_1 & e_2 \\ e_3 & \beta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Значения $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = t$ задают положение конечных сингулярностей рассматриваемой системы. Параметры системы подчиняются определенному линейному соотношению (условию Фукса). Эта система эквивалентна уравнению Гойна. Требуется только найти связь между параметрами уравнения Гойна и параметрами системы. В частности, параметр e_3 после надлежащей нормировки соответствует h . Детали преобразования произвольной фуксовой (2×2) -системы к специальной, заданной соотношениями (4), обсуждаются в публикациях [7], [8], причем выкладки довольно громоздки.

5. ДЕФОРМИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ГОЙНА

Если ложная сингулярность в точке $z_0 = q$ добавлена к четырем регулярным сингулярностям $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = t$, $z_4 = \infty$ в уравнении Гойна, мы получаем *деформированное уравнение Гойна* [9], [7], для которого будем использовать обозначение *Гойн-1*. После надлежащей нормировки параметров уравнение *Гойн-1* записывается как

$$\sigma(z)w'' + \left(\tau(z) - \sigma(z) \frac{1}{z-q} \right) w' + \left(\alpha\beta z - \sigma_3(t)h + \frac{\mu\sigma_1(q)z}{z-q} \right) w = 0, \quad (5)$$

где $\tau(z) = \sum_{j=1}^3 (1 - \theta_j) \sigma_j(z)$.

В то время как уравнение Гойна зависит от шести параметров, уравнение *Гойн-1* (5) зависит от восьми параметров: к списку добавлены параметры q и μ . Параметры α , β , θ_j должны удовлетворять условию Фукса

$$\sum_{j=1}^3 \theta_j + \alpha + \beta = 2. \quad (6)$$

В дополнение выполняется следующее необходимое условие (отсутствие логарифмических членов в разложении в окрестности ложной особой точки):

$$\sigma_3(t)h = \sigma(q)\mu^2 + (\sigma_1(q) + \tau(q))\mu + \alpha\beta q. \quad (7)$$

Следовательно, реальное число параметров уменьшается на единицу, причем параметр h можно исключить. Отсюда следует уравнение

$$\sigma(z)w'' + \tau(z)w' + \alpha\beta zw - (\sigma(q)\mu^2 + \tau(q)\mu + \alpha\beta q)w - \frac{\sigma(z)w' - \sigma(q)\mu w}{z - q} = 0. \quad (8)$$

Если мы введем оператор $D = d/dx$ и оператор умножения на независимую переменную z , то уравнение (8) можно представить в симметричном виде

$$\left(H(D, z) - H(\mu, q) - \frac{\sigma(z)D - \sigma(q)\mu}{z - q} \right) w = 0. \quad (9)$$

Это уравнение рассматривается на функциях, которые удовлетворяют условиям $w'(q) = \mu$, $w''(q) = 0$. Положив $z = q$ в (9), мы получим тривиальное тождество. Функцию H от двух переменных мы ассоциируем с гамильтонианом, либо квантовым, либо классическим в зависимости от выбора переменных. Уравнение (9) отвечает второму варианту антиквантования, когда антиквантование определяется как аннулирование деформированного уравнения Гойна. Заметим, что условие изомонодромности играет здесь подчиненную роль, т. е. является следствием, а не первопричиной.

Фуксово уравнение, эквивалентное (9), можно получить из фуксовой системы с помощью матрицы полиномиального “вращения” R , аналогичной введенной выше:

$$R = \begin{pmatrix} z^2 - z & \rho(z - 1) \\ z & z - t + \rho \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Предложенный выбор неединствен. Представление деформированного уравнения Гойна в виде (9) первоначально появилось в статье [10].

6. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ (2×2) -СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим интегральные симметрии Эйлера для следующей линейной системы первого порядка:

$$R(z) \frac{d\vec{w}}{dz} = S(z)\vec{w}. \quad (11)$$

Здесь R – уже обсуждавшаяся матрица полиномиального “вращения” (10), а S – матрица размера 2×2 , линейно зависящая от z . Точнее, мы предполагаем, что

$$S = \kappa Az + E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (11) ищется в форме контурного интеграла:

$$\vec{w}(z) = \int_L (z - \zeta)^\kappa \vec{v}(\zeta) d\zeta, \quad (12)$$

где $\vec{v}(t)$ – двумерная вектор-функция, а контур интегрирования L выбирается из условия, чтобы внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, пропадали. Подставив (12) в уравнение (11), мы получим, что $\vec{v}(\zeta)$ будет решением системы

$$R(\zeta) \frac{d\vec{v}(\zeta)}{d\zeta} = (-(\kappa + 2)(A\zeta + B) + E + B)\vec{v}(\zeta). \quad (13)$$

Сравнение уравнений (11) и (13) дает соотношение между набором параметров первоначальной (2×2) -системы и набором параметров преобразованной системы, и тем самым мы получаем симметрии таких систем относительно преобразования Эйлера и, следовательно, симметрии соответствующих уравнений второго порядка. Конкретные вычисления связей между параметрами весьма громоздки и могут быть выполнены только с помощью систем компьютерной алгебры, таких как, например, Maple.

Здесь изучалось преобразование Эйлера, но для других типов уравнений класса Гойна можно исследовать иные интегральные преобразования.

7. АНТИКВАНТОВАНИЕ И УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Сначала рассмотрим уравнение Гойна (1). Уравнение Пенлеве P^6 было первоначально выведено из него в работе автора [2], а позднее вывод представлен с большими деталями в книге [6] и в статье [11]. Рецепт основан на замене квантовых переменных – координаты, импульса и гамильтониана – на классические и переходе от уравнения Шредингера к уравнению Эйлера–Лагранжа классического движения. Гамильтонианы, связанные с уравнениями Пенлеве, изучались в книгах [6] и [12]:

$$H(p, q, t) = \frac{1}{\sigma_3(t)} (\sigma(q)\mu^2 + \tau(q)\mu + \alpha\beta q). \quad (14)$$

Эта процедура называется “антиквантованием”, и она выполняется при условии (2). С другой стороны, она не чувствительна к линейным преобразованиям независимой переменной и к s -гомотопному преобразованию зависимой переменной. Такой подход обеспечивает наиболее прямолинейное и простое (хотя и слегка мистическое) средство для вывода уравнения P^6 . Преобразование Лежандра, меняющее переменные q, μ на $q, \dot{q}$, ведет к лагранжиану $L(\dot{q}, q, t)$:

$$L = \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(q)} \left(\dot{q} - \frac{\tau(q)}{\sigma_3(t)} \right)^2 - \frac{\alpha\beta q}{\sigma_3(t)}.$$

Соответствующее уравнение Эйлера есть

$$\ddot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \frac{\partial \ln \sigma}{\partial q} - \dot{q} \frac{\partial \ln(\sigma_3(t)\sigma(q))}{\partial t} + \\ + \frac{\sigma(q)}{2\sigma_3(t)^2} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\tau(q)^2}{\sigma(q)} + \frac{\sigma(q)}{\sigma_3(t)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\tau(q)}{\sigma(q)} - \frac{2\sigma(q)}{\sigma_3(t)^2} \alpha\beta.$$

После дифференцирования и подходящих упрощений мы приходим к следующему уравнению:

$$\ddot{q} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) \dot{q}^2 + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) \dot{q} + \\ + \frac{\sigma}{2t^2(t-1)^2} \left[\frac{(1-\theta_1)^2 t}{q^2} - \frac{(1-\theta_2)^2 (t-1)}{(q-1)^2} + \frac{(1-\theta_3)(3-\theta_3)t(t-1)}{(q-t)^2} - (\alpha-\beta)^2 \right] = 0.$$

Это общая форма уравнения P^6 , порожденная уравнением Гойна и приводящая к динамике Ковалевской.

Модельные задачи квантовой механики с соответствующим динамическим представлением в терминах уравнений Пенлеве обсуждались в работе [13].

Благодарности. Автор признателен А. Я. Казакову и Ф. Вукайловичу за долгое сотрудничество и М. В. Бабичу, указавшему на ошибку в первоначальном тексте манускрипта.

Список литературы

- [1] E. Schrödinger, *Ann. der Phys.*, **384**:4 (1926), 361–376; **384**:4 (1926), 489–527; **385**:13 (1926), 437–490; **386**:18, 109–139.
- [2] S. Yu. Slavyanov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**:22 (1996), 7329–7335.
- [3] R. Fuchs, *Math. Ann.*, **63**:3 (1907), 301–321.
- [4] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2009.
- [5] V. A. Fock, *Z. Phys.*, **98**:3–4 (1935), 145–154.
- [6] С. Ю. Славянов, В. Лай, *Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский Диалект, СПб., 2002.
- [7] А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **155**:2 (2008), 252–264.
- [8] С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **182**:2 (2015), 223–230.
- [9] С. Ю. Славянов, Ф. Р. Вукайлович, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 143–151.
- [10] A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **432** (2015), 162–176.
- [11] S. Yu. Slavyanov, “Kovalevskaya’s dynamics and Schrödinger equations of Heun class”, *Operator Methods in Ordinary and Partial Differential Equations* (Stockholm, Sweden, June 2000), *Operator Theory: Advances and Applications*, **132**, eds. S. Albeverio, N. Elander, W. N. Everitt, P. Kurasov, Birkhäuser, Basel, 2002, 395–402.
- [12] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yosida, *From Gauss to Painlevé. A Modern Theory of Special Functions*, Aspects of Mathematics, **16**, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
- [13] А. Мюллери, С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **166**:2 (2011), 261–265.