Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Марачевский, Флуктуационный потенциал взаимодействия нейтрального атома с дифракционной решеткой, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 151–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:11:09

© 2015 г.

В. Н. Марачевский*

ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО АТОМА С ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ

Представлен теоретический формализм расчета флуктуационного потенциала взаимодействия анизотропного нейтрального атома в основном состоянии с дифракционной решеткой.

Ключевые слова: эффект Казимира–Полдера, коэффициент Рэлея.

DOI: 10.4213/tmf8906

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффекты Казимира [1] и Казимира–Полдера [2] позволяют изучать флуктуационные эффекты при наличии макроскопических тел [3]–[12]. Теоретический формализм, позволяющий проводить точные расчеты сил Казимира в периодических геометриях, был предложен в работах [13], [14]. Сравнение теории и экспериментов по измерению нормальной и тангенциальной сил Казимира в периодических геометриях было впервые проведено в работах [13], [15]. В работе [13] было проведено сравнение теории и эксперимента [16] по измерению нормальной силы Казимира для геометрии с прямоугольным профилем дифракционной решетки. В работах [15] было проведено сравнение теории и экспериментов по измерению тангенциальной силы Казимира для геометрий с синусоидальными профилями поверхностей и совпадающими периодами, разделенными вакуумной щелью. В работах [15] удалось показать, что тангенциальная сила Казимира между параллельными дифракционными решетками находится в точном соответствии с результатами точной теории, а расчеты, проведенные с использованием приближения близкой силы, которое основано на теории Лифшица [17], [18] для плоскопараллельных геометрий, не согласуются с экспериментальными данными. Обзор исследований, проведенных для различных наноструктур, можно найти в работе [19].

Общий метод нахождения потенциала Казимира–Полдера в произвольной калибровке вектор-потенциалов был предложен в работе [20]. Потенциал Казимира–Полдера при наличии периодических геометрий был рассмотрен в работах [21], [22].

*Отдел теоретической физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: maraval@mail.ru

В работе [22] было проведено сравнение теории и эксперимента по рассеянию бозе-эйнштейновских конденсатов атомов рубидия на дифракционной решетке при наличии дополнительного потенциала отталкивания, созданного внешним лазерным полем.

В настоящей работе представлен теоретический формализм расчета при нулевой температуре потенциала Казимира–Полдера анизотропного атома при наличии дифракционной решетки, периодической в одном пространственном направлении. В разделе 2 флуктуационный потенциал выражен через коэффициенты Рэлея [23]. Формализм расчета коэффициентов Рэлея для геометрий с прямоугольным профилем дифракционной решетки, изложенный в разделе 3, может быть использован при расчетах потенциала Казимира–Полдера и при расчетах сил Казимира между двумя дифракционными решетками, разделенными вакуумной щелью [24].

Внутри диэлектриков предполагается выполненным условие $\mu = 1$, используются единицы $\hbar = c = 1$.

2. ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим дифракционную решетку с периодом d , периодическую в направлении x и трансляционно-инвариантную в направлении z . Материал решетки определяется заданием частотной дисперсии диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$. Рассмотрим решетку, в которой полупространство $y \leq 0$ заполнено диэлектриком, а периодически меняющийся профиль границы дифракционной решетки и вакуума ($\varepsilon = 1$ в вакууме) расположен при $0 \leq y \leq b$. При $y > b$ имеем $\varepsilon = 1$, за исключением точки $\vec{r}_A$, в которую помещен нейтральный атом, описываемый атомной поляризуемостью $\alpha_{ij}(\omega)$.

Для решения задачи дифракции необходимо решить уравнения Максвелла при наличии дифракционной решетки. Электрические и магнитные поля могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} E_i(x, y, z, t) &= E_i(x, y) e^{ik_z z - i\omega t}, \\ H_i(x, y, z, t) &= H_i(x, y) e^{ik_z z - i\omega t}, \\ E_i(x + d, y) &= E_i(x, y) e^{ik_x d}, \\ H_i(x + d, y) &= H_i(x, y) e^{ik_x d}. \end{aligned}$$

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, падающую (вниз) на дифракционную решетку. При $y > b$ запишем компоненты электромагнитного поля с использованием разложений Рэлея [23]:

$$E_z(x, y) = I_p^{(E)} e^{i\alpha_p x - i\beta_p y} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{np}^{(E)} e^{i\alpha_n x + i\beta_n y}, \quad (1)$$

$$H_z(x, y) = I_p^{(H)} e^{i\alpha_p x - i\beta_p y} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{np}^{(H)} e^{i\alpha_n x + i\beta_n y}, \quad (2)$$

где

$$\alpha_p = k_x + \frac{2\pi p}{d}, \quad \beta_p^2 = \omega^2 - k_z^2 - \alpha_p^2,$$

$$\alpha_n = k_x + \frac{2\pi n}{d}, \quad \beta_n^2 = \omega^2 - k_z^2 - \alpha_n^2,$$

числа n, p целые, суммирование производится по всем $n \in \mathbb{Z}$, и $-\pi/d < k_x < \pi/d$. Отраженная от дифракционной решетки волна определяется коэффициентами отражения Рэлея $R_{np}^{(E)}, R_{np}^{(H)}$. Также определим коэффициенты отражения Рэлея $R_{np}^{EE}, R_{np}^{HH}, R_{np}^{EH}, R_{np}^{HE}$, где второй верхний индекс соответствует индексу $\sigma = E, H$ падающей волны в $I_p^{(\sigma)}$ в разложениях (1), (2), а первый верхний индекс соответствует электрической или магнитной отраженной волне в разложениях (1), (2).

При $y \leq 0$ компоненты электромагнитного поля удовлетворяют разложениям

$$E_z(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{np}^{(E)} e^{i\alpha_n x - i\beta_n^{(2)} y}, \quad (3)$$

$$H_z(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{np}^{(H)} e^{i\alpha_n x - i\beta_n^{(2)} y}, \quad (4)$$

где

$$(\beta_n^{(2)})^2 = \varepsilon\omega^2 - k_z^2 - \alpha_n^2.$$

Аналогично коэффициентам отражения Рэлея определим коэффициенты прохождения Рэлея $T_{np}^{EE}, T_{np}^{HH}, T_{np}^{EH}, T_{np}^{HE}$.

При $0 \leq y \leq b$ компонента электромагнитного поля E_z определяется следующим образом:

$$E_z(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_z^n(y) e^{i\alpha_n x}, \quad (5)$$

другие компоненты электромагнитного поля в области $0 \leq y \leq b$ определяются по аналогии с (5).

Для нахождения перпендикулярных оси z компонент электрического и магнитного поля при $y \geq b$ и $y \leq 0$ воспользуемся формулами

$$\vec{E}_t(\varepsilon\omega^2 - k_z^2) = ik_z \text{grad } E_z - i\omega \vec{z} \times \text{grad } H_z,$$

$$\vec{H}_t(\varepsilon\omega^2 - k_z^2) = ik_z \text{grad } H_z + i\omega \varepsilon \vec{z} \times \text{grad } E_z. \quad (6)$$

Рассмотрим следующие поляризации электромагнитной волны: E -поляризацию, в которой $E_z \neq 0, H_z = 0$, и H -поляризацию, в которой $H_z \neq 0, E_z = 0$. При решении задач в периодических геометриях удобен именно этот выбор поляризаций.

Компоненты электрического поля электромагнитной волны, идущей вниз, в случае E -поляризации равны

$$\vec{E}_{En}^- = \vec{e}_{En}^- e^{i\alpha_n x} e^{-i\beta_n y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}, \quad (7)$$

а для H -поляризации

$$\vec{E}_{Hn}^- = \vec{e}_{Hn}^- e^{i\alpha_n x} e^{-i\beta_n y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

здесь введены нормированные векторы поляризаций электромагнитного поля для электромагнитной волны, распространяющейся вниз,

$$\vec{e}_{En}^- = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} -\frac{k_z \alpha_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ \frac{k_z \beta_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{Hn}^- = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} \frac{\omega \beta_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ \frac{\omega \alpha_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $C^2 \equiv |\vec{E}|^2 = \omega^2/(\omega^2 - k_z^2)$. Аналогично введем нормированные векторы поляризаций электромагнитного поля для электромагнитной волны, распространяющейся вверх:

$$\vec{e}_{En}^+ = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} -\frac{k_z \alpha_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ -\frac{k_z \beta_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{Hn}^+ = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} -\frac{\omega \beta_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ \frac{\omega \alpha_n}{\omega^2 - k_z^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Найдем тензорное произведение векторов плюс- и минус-поляризаций при евклидовом повороте $\omega \rightarrow i\omega$. Положим $K^2 = \omega^2 + k_z^2$ ($K > 0$). Имеем

$$\begin{aligned} \vec{e}_{Em}^+ \otimes \vec{e}_{En}^- &= \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{k_z^2 \alpha_m \alpha_n}{K^2} & -\frac{ik_z^2 \alpha_m \beta_n}{K^2} & k_z \alpha_m \\ \frac{ik_z^2 \beta_m \alpha_n}{K^2} & \frac{k_z^2 \beta_m \beta_n}{K^2} & ik_z \beta_m \\ k_z \alpha_n & -ik_z \beta_n & K^2 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_{Hm}^+ \otimes \vec{e}_{Hn}^- &= \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2 \beta_m \beta_n}{K^2} & \frac{i\omega^2 \beta_m \alpha_n}{K^2} & 0 \\ -\frac{i\omega^2 \alpha_m \beta_n}{K^2} & -\frac{\omega^2 \alpha_m \alpha_n}{K^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_{Em}^+ \otimes \vec{e}_{Hn}^- &= \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{\omega k_z \alpha_m \beta_n}{K^2} & -\frac{i\omega k_z \alpha_m \alpha_n}{K^2} & 0 \\ \frac{i\omega k_z \beta_m \beta_n}{K^2} & \frac{\omega k_z \beta_m \alpha_n}{K^2} & 0 \\ \omega \beta_n & -i\omega \alpha_n & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_{Hm}^+ \otimes \vec{e}_{En}^- &= \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} -\frac{\omega k_z \beta_m \alpha_n}{K^2} & \frac{i\omega k_z \beta_m \beta_n}{K^2} & -\omega \beta_m \\ -\frac{i\omega k_z \alpha_m \alpha_n}{K^2} & -\frac{\omega k_z \alpha_m \beta_n}{K^2} & -i\omega \alpha_m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Флуктуационный потенциал взаимодействия анизотропного атома с поляризуемостью $\alpha_{ij}(\omega)$, расположенного в точке с координатами $\vec{r}_A$, и периодической структуры с периодом d в направлении x , расположенной при $y < y_A$, дается общим выражением [22]

$$U(\vec{r}_A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} d\zeta \zeta^2 \alpha_{jk}(i\zeta) G_{jk}^{(1)}(\vec{r}_A, \vec{r}_A, i\zeta), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
 G_{jk}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}', \omega) = & \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} dk_x \times \\
 & \times \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{\beta_n} e^{i(\alpha_m x - \alpha_n x') + i k_z(z - z') + i(\beta_m y + \beta_n y')} \times \\
 & \times \sum_{\sigma, \sigma' = E, H} R_{mn}^{\sigma\sigma'}(k_x, k_z, \omega) (\vec{e}_{\sigma m}^+ \otimes \vec{e}_{\sigma' n}^-)_{jk}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Для дифракционной решетки, которая рассматривается в настоящей работе, функция $G_{jk}^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}', \omega)$ определена при $y, y' > b$ и зависит от коэффициентов отражения Рэлея $R_{mn}^{\sigma\sigma'}$. Метод расчета коэффициентов Рэлея для дифракционной решетки с прямоугольным профилем сечения при $0 < y < b$ приведен в следующем разделе. В формулу (12) необходимо подставить тензорные произведения (11) векторов поляризации электромагнитного поля.

3. КОЭФФИЦИЕНТЫ РЭЛЕЯ

Заменим суммирование по n в бесконечных пределах в разложениях Рэлея суммированием по n от $-N$ до N . Таким образом, в приводимые ниже в данном разделе формулы войдет целочисленный положительный параметр N . Обозначим символом $[G]$ $(2N + 1)$ -компонентный вектор с компонентами, пронумерованными как $G_N, G_{N-1}, \dots, G_0, \dots, G_{-N+1}, G_{-N}$. Подчеркнем, что коэффициенты G_n зависят от y и, таким образом, правильнее было бы писать везде $G_n(y)$, однако мы не будем этого делать для упрощения обозначений.

Определим диагональную матрицу Λ размера $(2N + 1) \times (2N + 1)$:

$$\Lambda = \text{diag} \left(k_x + \frac{2\pi N}{d}, k_x + \frac{2\pi(N-1)}{d}, \dots, k_x, \dots, k_x - \frac{2\pi(N-1)}{d}, k_x - \frac{2\pi N}{d} \right). \quad (14)$$

Уравнения Максвелла для периодической в направлении x геометрии при наличии трансляционной инвариантности в направлении z могут быть записаны следующим образом [25]:

$$\frac{\partial[E_z]}{\partial y} - ik_z[E_y] = i\omega[H_x], \quad (15)$$

$$ik_z[E_x] - i\Lambda[E_z] = i\omega[H_y], \quad (16)$$

$$i\Lambda[E_y] - \frac{\partial[E_x]}{\partial y} = i\omega[H_z], \quad (17)$$

$$\frac{\partial[H_z]}{\partial y} - ik_z[H_y] = -i\omega[D_x], \quad (18)$$

$$ik_z[H_x] - i\Lambda[H_z] = -i\omega[D_y], \quad (19)$$

$$i\Lambda[H_y] - \frac{\partial[H_x]}{\partial y} = -i\omega[D_z]. \quad (20)$$

Используя связь $[\vec{D}] = Q[\vec{E}]$ и результаты работы [26], для прямоугольного профиля дифракционной решетки имеем

$$Q = \text{diag} \left(\left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\|^{-1}, \|\varepsilon\|, \|\varepsilon\| \right). \quad (21)$$

Здесь $\|\varepsilon\|$ – матрица Тёплица,

$$\|\varepsilon\| = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{2N} \\ \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{-2} & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 & \ddots & \varepsilon_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{-2N} & \dots & \varepsilon_{-2} & \varepsilon_{-1} & \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $\varepsilon_n(y)$ – коэффициенты Фурье периодической функции $\varepsilon(x + d, y) = \varepsilon(x, y)$:

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i2\pi nx}{d}\right) \varepsilon_n(y). \quad (23)$$

Из уравнения (19) следует, что

$$[E_y] = \|\varepsilon\|^{-1} \frac{\Lambda[H_z] - k_z[H_x]}{\omega}. \quad (24)$$

Это выражение необходимо подставить в уравнения (15) и (17) для исключения из них вектора $[E_y]$. Далее, из уравнения (16) имеем

$$[H_y] = \frac{k_z[E_x] - \Lambda[E_z]}{\omega}, \quad (25)$$

и это выражение необходимо подставить в уравнения (18) и (20) для исключения из них $[H_y]$. В результате уравнения Максвелла можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} [E_x] \\ [E_z] \\ [H_x] \\ [H_z] \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} [E_x] \\ [E_z] \\ [H_x] \\ [H_z] \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где матрица M определена следующим образом:

$$M \equiv M(\omega) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_z}{\omega} \Lambda \|\varepsilon\|^{-1} & \frac{1}{\omega} \Lambda \|\varepsilon\|^{-1} \Lambda - \omega I \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^2}{\omega} \|\varepsilon\|^{-1} + \omega I & \frac{k_z}{\omega} \|\varepsilon\|^{-1} \Lambda \\ \frac{k_z}{\omega} \Lambda & \omega \|\varepsilon\| - \frac{1}{\omega} \Lambda^2 & 0 & 0 \\ \frac{k_z^2}{\omega} I - \omega \left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\|^{-1} & -\frac{k_z}{\omega} \Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

При вычислении вакуумных эффектов энергия Казимира и энергия Казимира–Полдера выражаются через матрицы отражения, составленные из коэффициентов Рэлея на мнимых частотах. В формулу (12) для потенциала Казимира–Полдера анизотропного атома при наличии поверхности, обладающей пространственной периодичностью, матрица отражения входит на мнимых частотах, поэтому рассмотрим формализм вычисления коэффициентов отражения Рэлея $R_{mn}^{\sigma\sigma'}(k_x, k_z, i\omega)$ на

мнимых частотах. Матрица M_E , необходимая для вычисления коэффициентов Рэлея на мнимых частотах, определяется евклидовым поворотом из матрицы (27):

$$M_E \equiv M(i\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_z}{\omega} \Lambda \|\varepsilon\|^{-1} & \frac{1}{\omega} \Lambda \|\varepsilon\|^{-1} \Lambda + \omega I \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^2}{\omega} \|\varepsilon\|^{-1} - \omega I & \frac{k_z}{\omega} \|\varepsilon\|^{-1} \Lambda \\ \frac{k_z}{\omega} \Lambda & -\omega \|\varepsilon\| - \frac{1}{\omega} \Lambda^2 & 0 & 0 \\ \frac{k_z^2}{\omega} I + \omega \left\| \frac{1}{\varepsilon} \right\|^{-1} & -\frac{k_z}{\omega} \Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Далее выберем линейно независимые векторы $J^{(1)}(n)$, где $n = N, \dots, -N$, размера $4 \times (2N + 1)$, удовлетворяющие условиям $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, эти векторы отвечают E -поляризации в падающей волне:

$$J^{(1)}(n) = \begin{pmatrix} [E_x^{(1)}(n)] \\ [E_z^{(1)}(n)] \\ [H_x^{(1)}(n)] \\ [H_z^{(1)}(n)] \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где в каждом из векторов $[E_x^{(1)}(n)]$, $[E_z^{(1)}(n)]$, $[H_x^{(1)}(n)]$ единственный ненулевой элемент стоит в $(N + 1 - n)$ -й строке,

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(n)_{N+1-n} &= \frac{k_z(k_x + 2\pi n/d)}{\omega^2 + k_z^2} \exp\left(b\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2}\right), \\ E_z^{(1)}(n)_{N+1-n} &= \exp\left(b\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2}\right), \\ H_x^{(1)}(n)_{N+1-n} &= -\frac{\omega\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + (k_x + 2\pi n/d)^2}}{\omega^2 + k_z^2} \exp\left(b\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

а вектор $[H_z^{(1)}(n)]$ нулевой. Таким образом, мы получаем $2N + 1$ линейно независимых векторов $J^{(1)}(n)$, соответствующих $n = N, \dots, -N$.

Аналогично выберем линейно независимые векторы $J^{(2)}(n)$, $n = N, \dots, -N$, размера $4 \times (2N + 1)$, удовлетворяющие условиям $H_z \neq 0$, $E_z = 0$, эти векторы отвечают H -поляризации в падающей волне:

$$J^{(2)}(n) = \begin{pmatrix} [E_x^{(2)}(n)] \\ [E_z^{(2)}(n)] \\ [H_x^{(2)}(n)] \\ [H_z^{(2)}(n)] \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где в каждом из векторов $[E_x^{(2)}(n)]$, $[H_x^{(2)}(n)]$, $[H_z^{(2)}(n)]$ единственный ненулевой элемент стоит в $(N + 1 - n)$ -й строке,

$$\begin{aligned} E_x^{(2)}(n)_{N+1-n} &= \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + (k_x + 2\pi n/d)^2}}{\omega^2 + k_z^2} \exp b \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2}, \\ H_x^{(2)}(n)_{N+1-n} &= \frac{k_z(k_x + 2\pi n/d)}{\omega^2 + k_z^2} \exp \left(b \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2} \right), \\ H_z^{(2)}(n)_{N+1-n} &= \exp \left(b \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

а вектор $[E_z^{(2)}(n)]$ нулевой. Таким образом, мы получаем $2N + 1$ линейно независимых векторов $J^{(2)}(n)$, соответствующих $n = N, \dots, -N$.

Теперь выберем линейно независимые векторы $B^{(1)}(n)$, $n = N, \dots, -N$, размера $4 \times (2N + 1)$, удовлетворяющие условиям $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, эти векторы отвечают E -поляризации в отраженной волне:

$$B^{(1)}(n) = \begin{pmatrix} [E_x^{(1)}(n)] \\ [E_z^{(1)}(n)] \\ [H_x^{(1)}(n)] \\ [H_z^{(1)}(n)] \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где в каждом из векторов $[E_x^{(1)}(n)]$, $[E_z^{(1)}(n)]$, $[H_x^{(1)}(n)]$ единственный ненулевой элемент стоит в $(N + 1 - n)$ -й строке,

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(n)_{N+1-n} &= \frac{k_z(k_x + 2\pi n/d)}{\omega^2 + k_z^2} \exp \left(-b \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2} \right), \\ E_z^{(1)}(n)_{N+1-n} &= \exp \left(-b \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2} \right), \\ H_x^{(1)}(n)_{N+1-n} &= \frac{\omega \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + (k_x + 2\pi n/d)^2}}{\omega^2 + k_z^2} \exp \left(-b \sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

а вектор $[H_z^{(1)}(n)]$ нулевой. Таким образом, получаем $2N + 1$ линейно независимых векторов $B^{(1)}(n)$, соответствующих $n = N, \dots, -N$.

Далее выберем линейно независимые векторы $B^{(2)}(n)$, $n = -N, \dots, N$, размера $4 \times (2N + 1)$, удовлетворяющие условиям $H_z \neq 0$, $E_z = 0$, эти векторы отвечают H -поляризации в отраженной волне:

$$B^{(2)}(n) = \begin{pmatrix} [E_x^{(2)}(n)] \\ [E_z^{(2)}(n)] \\ [H_x^{(2)}(n)] \\ [H_z^{(2)}(n)] \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где в каждом из векторов $[E_x^{(2)}(n)]$, $[H_x^{(2)}(n)]$, $[H_z^{(2)}(n)]$ единственный ненулевой элемент стоит в $(N + 1 - n)$ -й строке,

$$\begin{aligned} E_x^{(2)}(n)_{N+1-n} &= -\frac{\omega\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + (k_x + 2\pi n/d)^2}}{\omega^2 + k_z^2} \exp\left(-b\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2}\right), \\ H_x^{(2)}(n)_{N+1-n} &= \frac{k_z(k_x + 2\pi n/d)}{\omega^2 + k_z^2} \exp\left(-b\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2}\right), \\ H_z^{(2)}(n)_{N+1-n} &= \exp\left(-b\sqrt{\omega^2 + k_z^2 + \left(k_x + \frac{2\pi n}{d}\right)^2}\right), \end{aligned} \quad (36)$$

а вектор $[E_z^{(2)}(n)]$ нулевой. Таким образом, получаем $2N + 1$ линейно независимых векторов $B^{(2)}(n)$, соответствующих $n = N, \dots, -N$.

Выберем $2N + 1$ линейно независимых векторов $V^{(1)}(n)$, $n = N, \dots, -N$, размера $4 \times (2N + 1)$, удовлетворяющих условиям $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, эти векторы отвечают E -поляризации в прошедшей волне:

$$V^{(1)}(n) = \begin{pmatrix} [E_x^{(1)}(n)] \\ [E_z^{(1)}(n)] \\ [H_x^{(1)}(n)] \\ [H_z^{(1)}(n)] \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где в каждом из векторов $[E_x^{(1)}(n)]$, $[E_z^{(1)}(n)]$, $[H_x^{(1)}(n)]$ единственный ненулевой элемент стоит в $(N + 1 - n)$ -й строке,

$$\begin{aligned} E_x^{(1)}(n)_{N+1-n} &= \frac{k_z(k_x + 2\pi n/d)}{\varepsilon\omega^2 + k_z^2}, \\ E_z^{(1)}(n)_{N+1-n} &= 1, \\ H_x^{(1)}(n)_{N+1-n} &= -\frac{\omega\varepsilon\sqrt{\omega^2\varepsilon + k_z^2 + (k_x + 2\pi n/d)^2}}{\varepsilon\omega^2 + k_z^2}, \end{aligned} \quad (38)$$

а вектор $[H_z^{(1)}(n)]$ нулевой. Таким образом, получаем $2N + 1$ линейно независимых векторов $V^{(1)}(n)$, соответствующих $n = N, \dots, -N$. Уточним, случай $n = N$ соответствует вектору $[E_z^{(1)}(N)]$ с единственной ненулевой первой компонентой, равной единице, а случай $n = -N$ соответствует вектору $[E_z^{(1)}(-N)]$ с единственной ненулевой последней компонентой, равной единице.

Наконец, выберем $2N + 1$ линейно независимых векторов $V^{(2)}(n)$, $n = N, \dots, -N$, размера $4 \times (2N + 1)$, удовлетворяющих условиям $H_z \neq 0$, $E_z = 0$, эти векторы отвечают H -поляризации в прошедшей волне:

$$V^{(2)}(n) = \begin{pmatrix} [E_x^{(2)}(n)] \\ [E_z^{(2)}(n)] \\ [H_x^{(2)}(n)] \\ [H_z^{(2)}(n)] \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где в каждом из векторов $[E_x^{(2)}(n)]$, $[H_x^{(2)}(n)]$, $[H_z^{(2)}(n)]$ единственный ненулевой элемент стоит в $(N + 1 - n)$ -й строке,

$$\begin{aligned} E_x^{(2)}(n)_{N+1-n} &= \frac{\omega \sqrt{\omega^2 \varepsilon + k_z^2 + (k_x + 2\pi n/d)^2}}{\varepsilon \omega^2 + k_z^2}, \\ H_x^{(2)}(n)_{N+1-n} &= \frac{k_z(k_x + 2\pi n/d)}{\varepsilon \omega^2 + k_z^2}, \\ H_z^{(2)}(n)_{N+1-n} &= 1, \end{aligned} \quad (40)$$

а вектор $[E_z^{(1)}(n)]$ нулевой. Таким образом, получаем $2N + 1$ линейно независимых векторов $V^{(2)}(n)$, соответствующих $n = N, \dots, -N$.

Теперь можно найти коэффициенты Рэлея для отражения от дифракционной решетки. Для этого необходимо проинтегрировать систему линейных уравнений первого порядка (26) с матрицей (28) в интервале $y \in [0, b]$. В качестве начальных условий при $y = 0$ берутся векторы $V^{(1)}(n)$ и $V^{(2)}(n)$. Определим $U^{(1)}(n)$ – результат решения системы уравнений (26) при $y = b$ с начальным заданным вектором $V^{(1)}(n)$ при $y = 0$. Аналогично определим $U^{(2)}(n)$ – результат решения системы уравнений (26) при $y = b$ с заданным вектором $V^{(2)}(n)$ при $y = 0$.

При $y = b$ нужно записать условия непрерывности для всех $4 \times (2N + 1)$ фурье-компонент электромагнитного поля, тангенциальных к плоскости $y = b$, так как поля E_x , E_z , H_x , H_z должны быть непрерывны при $y = b$. Из этого условия и определяются все необходимые коэффициенты Рэлея.

В результате получаем две системы линейных уравнений, из которых находятся коэффициенты отражения Рэлея R и коэффициенты прохождения Рэлея T :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N (-T_{np}^{EE} U^{(1)}(n) - T_{np}^{HE} U^{(2)}(n) + R_{np}^{EE} B^{(1)}(n) + R_{np}^{HE} B^{(2)}(n)) &= -J^{(1)}(p), \\ \sum_{n=-N}^N (-T_{np}^{EH} U^{(1)}(n) - T_{np}^{HH} U^{(2)}(n) + R_{np}^{EH} B^{(1)}(n) + R_{np}^{HH} B^{(2)}(n)) &= -J^{(2)}(p), \end{aligned} \quad (41)$$

где $p = N, \dots, -N$. Матрица каждой из этих систем уравнений является квадратной и имеет размер $4(2N + 1) \times 4(2N + 1)$. Подчеркнем, получающиеся коэффициенты отражения и прохождения определены на мнимых частотах.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен теоретический формализм расчета флуктуационного потенциала взаимодействия анизотропного нейтрального атома в основном состоянии с дифракционной решеткой, периодической в заданном пространственном направлении и трансляционно-инвариантной в перпендикулярном направлении.

Данное исследование было завершено к 90-летию со дня рождения Юрия Викторовича Новожилова, научного руководителя и замечательного человека.

Благодарности. Работа частично поддержана Санкт-Петербургским государственным университетом (гранты № 11.38.237.2015 и 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wetensc.*, **51** (1948), 793–795.
- [2] H. B. G. Casimir, D. Polder, *Phys. Rev.*, **73**:4 (1948), 360–372.
- [3] Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, *УФН*, **116**:1 (1975), 5–40; **143**:2 (1984), 345–389.
- [4] G. Plunien, B. Müller, W. Greiner, *Phys. Rep.*, **134**:2–3 (1986), 87–193.
- [5] K. A. Milton, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:38 (2004), R209–R277, arXiv: hep-th/0406024.
- [6] R. L. Jaffe, *Phys. Rev. D*, **72**:2 (2005), 021301, 5 pp., arXiv: hep-th/0503158.
- [7] V. N. Marachevsky, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:37 (2012), 374021, 17 pp.
- [8] S. Scheel, S. Y. Buhmann, *Acta Phys. Slovaca*, **58**:5 (2008), 675–809.
- [9] S. Y. Buhmann, *Dispersion Forces*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [10] D. Fursaev, D. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta. Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory*, Springer-Verlag, Dordrecht, 2011.
- [11] Е. М. Сантанжело, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 98–117.
- [12] M. Bordag, I. Pirozhenko, *Phys. Rev. D*, **81**:8 (2010), 085023, 12 pp., arXiv: 0912.4047.
- [13] A. Lambrecht, V. N. Marachevsky, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:16 (2008), 160403.
- [14] A. Lambrecht, V. N. Marachevsky, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:8–9 (2009), 1789–1795.
- [15] H.-C. Chiu, G. L. Klimchitskaya, V. N. Marachevsky, V. M. Mostepanenko, U. Mohideen, *Phys. Rev. B*, **80**:12 (2009), 121402, 4 pp.; **81**:11 (2010), 115417, 20 pp.
- [16] H. B. Chan, Y. Bao, J. Zou, R. A. Cirelli, F. Klemens, W. M. Mansfield, C. S. Pai, *Phys. Rev. Lett.*, **101**:3 (2008), 030401, 4 pp.
- [17] Е. М. Лифшиц, *ЖЭТФ*, **29**:1 (1955), 94–112.
- [18] V. V. Nesterenko, I. G. Pirozhenko, *Phys. Rev. A*, **86**:5 (2012), 052503, 13 c., arXiv: 1112.2599.
- [19] A. W. Rodriguez, F. Capasso, S. G. Johnson, *Nature Photonics*, **5**:4 (2011), 211–221.
- [20] V. N. Marachevsky, Yu. M. Pis'mak, *Phys. Rev. D*, **81**:6 (2010), 065005, 6 pp.
- [21] A. M. Contreras-Reyes, R. Guérout, P. A. M. Neto, D. A. R. Dalvit, A. Lambrecht, S. Reynaud, *Phys. Rev. A*, **82**:5 (2010), 052517, 6 pp., arXiv: 1010.0170.
- [22] H. Bender, C. Stehle, C. Zimmermann, S. Slama, J. Fiedler, S. Scheel, S. Y. Buhmann, V. N. Marachevsky, *Phys. Rev. X*, **4**:1 (2014), 011029, 10 pp.
- [23] O. M. Rayleigh, *Proc. Roy. Soc. A*, **79**:532 (1907), 399–416.
- [24] В. Н. Марачевский, *ТМФ*, **176**:1 (2013), 117–126.
- [25] D. R. Maystre (ed.), *Selected Papers on Diffraction Gratings*, SPIE, Bellingham, 1993; R. Petit (ed.), *Electromagnetic Theory of Gratings*, Springer, Berlin, 1980; M. C. Hutley, *Diffraction Gratings*, Academic Press, London, 1982; E. G. Loewen, E. Popov, *Diffraction Gratings and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1997.
- [26] L. Li, *J. Opt. Soc. Amer. A*, **13**:9 (1996), 1870–1876.