Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Пастон, Связь между квантовыми эффектами в общей теории относительности и в теории вложения, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 162–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:31:48

© 2015 г.

С. А. Пастон*

СВЯЗЬ МЕЖДУ КВАНТОВЫМИ ЭФФЕКТАМИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И В ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ

Обсуждаются результаты, касающиеся связи квантовых эффектов в римановом пространстве и на поверхности, возникающей в результате его изометрического вложения в плоское пространство большего числа измерений. Обсуждается соответствие между эффектом Хокинга, фиксируемым наблюдателем в римановом пространстве с горизонтом, и эффектом Унру, связанным с ускоренным движением этого наблюдателя в объемлющем пространстве. Приводятся как примеры, для которых соответствие работает, так и примеры, для которых его нет. Описан общий вид гиперболического вложения метрики с горизонтом, гладко покрывающего горизонт, и изложено доказательство наличия соответствия между эффектами Хокинга и Унру для такого вложения. Также обсуждается возможность связи между двухточечными функциями в римановом пространстве и в объемлющем пространстве, в которое проведено вложение. Получены ограничения на геометрические параметры вложений, для которых такая связь известна.

Ключевые слова: теория вложения, соответствие эффектов Хокинга и Унру, изометрические вложения, излучение Хокинга, эффект Унру.

DOI: 10.4213/tmf8907

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно общей теории относительности Эйнштейна гравитационное взаимодействие описывается в рамках предположения о том, что наше четырехмерное пространство-время представляет собой риманово пространство, т. е. многообразие, на котором определены метрика $g_{\mu\nu}(x)$ и соответствующая ей связность (здесь и далее $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$, используется сигнатура $(+---)$). Несмотря на отсутствие в настоящее время удовлетворительной квантовой теории гравитации, при не слишком высоких энергиях можно изучать влияние гравитации на квантовые эффекты, рассматривая квантованные поля в римановом пространстве (см., например, монографии [1], [2]). К наиболее известным нетривиальным примерам такого влияния

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: paston@pobox.spbu.ru

можно отнести эффекты Хокинга [3] (излучение черных дыр) и Унру [4] (наблюдение теплового излучения равноускоренным наблюдателем).

Как следует из теоремы Жана-Картана, обобщенной на псевдориманов случай Фридманом [5], произвольное n -мерное псевдориманово пространство может быть, по крайней мере локально, изометрически вложено в плоское псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{m, N-m}$ с числом измерений $N \geq n(n+1)/2$. При этом псевдоримановому пространству сопоставляется описываемая функцией вложения $y^a(x^\mu)$ поверхность, метрика которой

$$g_{\mu\nu} = (\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b)\eta_{ab} \quad (1)$$

индуцируется плоской метрикой η_{ab} объемлющего пространства (здесь и далее индексы $a, b, \dots$ принимают N значений). Это позволяет перейти к описанию гравитации в виде теории соответствующей нашему пространству-времени четырехмерной поверхности в плоском десятимерном объемлющем пространстве. При таком подходе, обычно называемом теорией вложения, вместо метрики $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ независимой переменной, определяющей гравитацию, выбирается функция вложения $y^a(x^\alpha)$.

Впервые такой подход к описанию гравитации, сходный с используемым в теории струн, был предложен Редже и Тейтельбоймом [6]. Позднее разные варианты такого подхода исследовались в достаточно большом количестве работ, например в работах [7]–[18], причем в работах [8], [12] идея использования вложения возникала независимо. Отметим, что в отличие от популярной в последнее время теории бран [19], в теории вложения объемлющее пространство является плоским, гравитация в нем отсутствует. Именно поэтому теория вложения, в отличие от теории бран, является альтернативным описанием гравитации в терминах функции вложения $y^a(x^\alpha)$, причем имеющей вид некоторой теории в плоском пространстве-времени, что может быть полезно при попытках квантования гравитации. Существует возможность сформулировать теорию вложения и в виде некоторой теории поля в объемлющем плоском пространстве – теории разбиения [20], что сближает описание гравитации в таком подходе с описанием остальных фундаментальных взаимодействий, для которых построена корректная квантовая формулировка.

При рассмотрении нашего пространства-времени как четырехмерной поверхности в плоском пространстве можно поставить вопрос о связи между квантовыми эффектами в пространстве-времени как римановом пространстве (о которых упоминалось выше) и эффектами, возникающими на поверхности вследствие наличия квантовых полей в плоском объемлющем пространстве. И оказывается, что такая связь есть, по крайней мере для определенных типов вложений некоторого класса римановых пространств, в том числе являющихся физически интересными решениями уравнений Эйнштейна.

Как было замечено Дезером и Левиным [21], [22] (отметим также появившуюся в это же время, но менее известную работу [23]), предсказанное Хокингом излучение черных дыр может быть отождествлено с наблюдаемым в объемлющем пространстве излучением Унру. Для этого нужно рассмотреть определенное вложение метрики черной дыры (т. е. имеющую такую метрику четырехмерную поверхность в плоском объемлющем пространстве), для которого покоящийся на фиксированном расстоянии от черной дыры наблюдатель оказывается движущимся равноускоренно в объемлющем пространстве. Такое соответствие между эффектами Хокинга и Унру было обнаружено для многих физически интересных метрик. В разделах 3–7 мы подробно обсудим, в каких случаях указанное соответствие имеет место, а в каких

нет, а также, следуя работе [24], сформулируем и докажем утверждение 1, описывающее условия на метрику и функцию вложения, при которых соответствие работает.

Еще одним примером связи между квантовыми эффектами в римановом пространстве и на соответствующей ему вложенной в плоское объемлющее пространство поверхности, является возможность связать двухточечные функции Вайтмана (или функции Грина) в римановом пространстве и в объемлющем пространстве. Это можно сделать для поверхностей, соответствующих так называемой warped-геометрии. Для функций Вайтмана соответствующий анализ проведен в работе [25], а для функций Грина – в работах [26], [27]. В разделе 8 мы обсудим, для какого класса поверхностей применим этот подход.

2. ЭФФЕКТЫ ХОКИНГА И УНРУ

В наиболее общем смысле эффект Хокинга [3] заключается в том, что в пространстве-времени с горизонтом событий наблюдатель, расположенный вне горизонта, фиксирует наличие потока частиц, имеющих тепловое распределение. В основе этого квантового эффекта лежит нетривиальность причинной структуры пространства-времени с горизонтом, в котором рассматривается квантовая теория поля. Из-за этой нетривиальности вектор состояния, являющийся вакуумным с точки зрения операторов поля на начальной поверхности в прошлом, будучи разложенным по базису состояний, соответствующему операторам поля на конечной поверхности в будущем (включающей в себя бесконечно удаленную поверхность и горизонт событий), соответствует наличию излучения с тепловым спектром.

Фиксируемая наблюдателем температура этого излучения (температура Хокинга) выражается формулой

$$T_H = \frac{k}{2\pi} \quad (2)$$

через так называемую “поверхностную гравитацию” k , определяемую для данного наблюдателя следующим образом (см., например, [28]). Пусть ξ – времениподобный вектор Киллинга, нормированный таким образом, что его значение ξ_0 в точке, где находится наблюдатель, подчинено условию $\xi_0^2 = 1$. Пусть пространство-время содержит светоподобную гиперповерхность $\mathcal{N}$, на которой ξ ортогонально ко всем касательным к $\mathcal{N}$ векторам (при этом сам вектор ξ является светоподобным вектором, касательным к $\mathcal{N}$), в этом случае $\mathcal{N}$ называют горизонтом Киллинга. Тогда в точках поверхности $\mathcal{N}$ выполняется соотношение

$$\xi^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu = k \xi^\mu, \quad (3)$$

определяющее поверхностную гравитацию k (где ∇_α обозначает ковариантную производную). С физической точки зрения k соответствует четырехмерному ускорению покоящейся вблизи горизонта в статической системе отсчета частицы (вектор Киллинга ξ касателен к ее мировой линии), перемасштабированному с учетом красного смещения для наблюдателя, находящегося в некоторой точке вне горизонта.

Для трехмерно бесконечных пространств, для которых на трехмерной бесконечности ξ^2 ограничено, например, для большинства черных дыр, обычно предполагается, что наблюдатель находится на бесконечности, тогда вектор Киллинга нормируется условием $\xi^2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$. Однако при рассмотрении имеющих конечный трехмерный размер пространств, например пространства де Ситтера, приходится анализировать эффект Хокинга с точки зрения наблюдателя, расположенного на конечном расстоянии.

Эффект Унру [4] заключается в том, что в пространстве Минковского в состоянии, вакуумном с точки зрения инерциального наблюдателя, движущийся с постоянным ускорением w наблюдатель обнаруживает тепловое излучение с температурой Унру

$$T_U = \frac{w}{2\pi}. \quad (4)$$

Для того чтобы это увидеть, можно провести квантование некоторого поля в сопутствующих для равноускоренного наблюдателя координатах Риндлера [29] $t, \rho, x^{2,3}$, связанных с лоренцевыми координатами x^μ соотношениями

$$x^0 = \rho \operatorname{sh} t, \quad x^1 = \rho \operatorname{ch} t. \quad (5)$$

Построив соответствующий такому квантованию базис состояний, можно разложить по нему вакуум квантовой теории, заданной в лоренцевых координатах, и обнаружить тепловое распределение так называемых “риндлеровских” частиц с температурой (4) (для этого обычно используют преобразование Боголюбова; см., например, книгу [1]). Такой подход очень близок к используемому при описании излучения Хокинга, что приводит к хорошо известному тривиальному соответствию между эффектами Хокинга и Унру, описанному в следующем разделе. Важную роль при этом играет наличие горизонта для риндлеровского наблюдателя.

Однако, поскольку в рамках такого подхода не описана процедура наблюдения излучения Унру, он не дает возможности однозначно ответить на вопрос, является ли это излучение реальным. Особенно сложным вопрос интерпретации оказывается при рассмотрении не прямолинейного ускоренного движения, а равномерного движения по окружности, при котором абсолютная величина ускорения тоже остается постоянной. Для такого движения горизонт отсутствует и вакуум оказывается совпадающим с вакуумом инерциальной системы отсчета [30], т. е. следует считать, что эффект Унру отсутствует. Однако, как замечено в работе [31], считать, что при отсутствии горизонта отсутствует и эффект Унру, кажется странным, поскольку можно рассмотреть наблюдателя, движущегося прямолинейно равноускоренно в течение только конечного промежутка времени, до и после которого он является инерциальным. Для такого наблюдателя горизонт отсутствует, но считать, что в момент своего равноускоренного движения наблюдатель не фиксирует излучение Унру, это значит предположить, что наличие или отсутствие излучения нелокальным образом зависит от прошлого либо будущего наблюдателя. Кажется более разумным считать, что параметры наблюдаемого излучения должны определяться локальными характеристиками траектории наблюдателя.

Более последовательным с физической точки зрения является описание эффекта Унру путем рассмотрения движущегося по некоторой заданной траектории детектора Унру–Девитта, взаимодействующего с присутствующим в пространстве-времени квантовым полем. Детектор Унру–Девитта (подробнее см., например, [1]) представляет собой точечный объект, который описывается оператором монопольного момента детектора $m(\tau)$ и может переходить из своего основного состояния в возбужденное состояние с энергией E . В качестве гамильтониана взаимодействия детектора с квантовым полем (например, скалярным полем $\varphi(x^\mu)$) берется простейшее выражение

$$H_I = \int d\tau g m(\tau) \varphi(x^\mu(\tau)), \quad (6)$$

где τ – собственное время детектора, после чего можно в низшем порядке теории возмущений по константе связи g вычислить вероятность перехода в состояние с энергией E и найти возникающий спектр.

Чаще всего рассматриваются стационарные траектории движения детектора, к которым относятся и прямолинейное равноускоренное движение, и движение по окружности. В работе [32] была проведена полная классификация стационарных движений и вычислены соответствующие им спектры. Интересно заметить, что в этой работе, как и в некоторых других, термин “излучение Унру” для не имеющих горизонта траекторий не употреблялся, а говорилось только о спектре вакуумных возбуждений детектора. В отличие от случая прямолинейного равноускоренного движения, для всех остальных стационарных траекторий спектр оказывается нетепловым. Интересно отметить, что в работе [31] эффект Унру для движения по окружности был отождествлен с наблюдаемым экспериментально эффектом Соколова–Тернова. Обсуждение различных аспектов эффекта Унру также можно найти в литературе, цитированной в недавней работе [33].

Запись гамильтониана взаимодействия в виде (6) позволяет найти только спектр возбуждений, возникающий в результате взаимодействия детектора с квантовым полем во все моменты собственного времени детектора. Чтобы получить “мгновенный” спектр, который должен, как можно ожидать, соответствовать наблюдаемому излучению, необходимо как-то модифицировать взаимодействие. Это было осуществлено в работе [34] путем введения зависимости от времени τ константы связи g в формуле (6) по типу включения и выключения взаимодействия в некоторые моменты времени. Было показано, что для случая произвольного одномерного движения с медленно меняющимся ускорением (т. е. удовлетворяющим условию $|\dot{w}| \ll w^2$) имеет место тепловой спектр со стандартной температурой Унру (4).

3. ТРИВИАЛЬНОЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ЭФФЕКТАМИ ХОКИНГА И УНРУ

Прежде всего опишем хорошо известное тривиальное соответствие между эффектами Хокинга и Унру, которое имеет место при рассмотрении движения равноускоренного наблюдателя в пространстве Минковского. Такой наблюдатель является покоящимся в координатах Риндлера $t, \rho, x^{2,3}$, определяемых формулами (5), или с использованием светоподобных координат $x^\pm = x^0 \pm x^1$ формулами

$$x^+ = \rho e^t, \quad x^- = -\rho e^{-t}. \quad (7)$$

Трансляции по времени t координат Риндлера соответствуют лоренцеву бусту в пространстве Минковского. Соответствующий вектор Киллинга ξ^μ , нормированный на единицу при $\rho = \rho_0$, имеет компоненты

$$\xi^+ = \frac{1}{\rho_0} \rho e^t = \frac{1}{\rho_0} x^+, \quad \xi^- = \frac{1}{\rho_0} \rho e^{-t} = -\frac{1}{\rho_0} x^-, \quad \xi^{2,3} = 0. \quad (8)$$

Для него существует горизонт Киллинга $\mathcal{N}$, представляющий собой поверхность $(x^+ = 0 \cup x^- = 0) \cap x^1 \geq 0$, поэтому можно определить поверхностную гравитацию и можно считать, что для риндлеровского наблюдателя имеет место эффект Хокинга.

Учитывая, что в лоренцевых координатах в пространстве Минковского ковариантная производная ∇_α сводится к обычной производной ∂_α , несложно вычислить

левую часть уравнения (3) в некоторой точке горизонта, например в точке, в которой $x^- = 0$, $x^+ > 0$:

$$\xi^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu = \xi^+ \partial_+ \xi^\mu = \delta_+^\mu \frac{x^+}{\rho_0^2} = \frac{1}{\rho_0} \xi^\mu. \quad (9)$$

Отсюда находим величину поверхностной гравитации с точки зрения наблюдателя с координатой ρ_0 :

$$k = \frac{1}{\rho_0}. \quad (10)$$

Очевидно, что это значение совпадает с постоянным ускорением w этого наблюдателя, а значит, можно сказать, что для риндлеровского наблюдателя в пространстве Минковского температура Хокинга (2) и температура Унру (4) совпадают, т. е. имеет место простейший случай соответствия между эффектами Хокинга и Унру.

4. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ЭФФЕКТАМИ ХОКИНГА И УНРУ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВЛОЖЕНИЙ

Как оказалось, аналогичное описанному в предыдущем разделе соответствие между эффектами Хокинга и Унру имеет место, если рассмотреть определенного типа изометрические вложения в плоское объемлющее пространство для достаточно широкого ряда метрик. Впервые это было замечено в работах [21], [22], [35] для метрик де Ситтера (dS) и анти-де Ситтера (AdS), для метрики Шварцшильда вместе с ее dS и AdS обобщениями, для метрики заряженной черной дыры Рейснера–Нордстрёма, а также для метрики Банадоса–Тейтельбойма–Занелли, соответствующей трехмерной черной дыре. Было замечено, что температура T_H , соответствующая имеющемуся из-за наличия горизонта эффекту Хокинга, для рассмотренных вложений (гладко покрывающих горизонт) этих метрик совпадает с температурой T_U эффекта Унру, связанного с тем, что с точки зрения объемлющего пространства наблюдатель движется равноускоренно.

Например, для метрики Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (11)$$

использовалось вложение Фронсдала [36] в плоское шестимерное пространство с сигнатурой (+-----):

$$\begin{aligned} y^0 &= \tau \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \operatorname{sh} \frac{t}{\tau}, & y^1 &= \pm \tau \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \operatorname{ch} \frac{t}{\tau} & \text{при } r > 2m, \\ y^0 &= \pm \tau \sqrt{\frac{2m}{r} - 1} \operatorname{ch} \frac{t}{\tau}, & y^1 &= \tau \sqrt{\frac{2m}{r} - 1} \operatorname{sh} \frac{t}{\tau} & \text{при } r < 2m, \\ y^2 &= \int dr \sqrt{\frac{2m}{r - 2m} \left(1 - \frac{m\tau^2}{2r^3}\right)}, \\ y^3 &= r \cos \theta, & y^4 &= r \sin \theta \cos \varphi, & y^5 &= r \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Это вложение гладко покрывает горизонт при $\tau = 4m$. Легко заметить, что для него линии времени представляют собой гиперболы и при $r > 2m$ соответствуют равноускоренному движению в объемлющем пространстве. Было обнаружено, что

температуры Хокинга и Унру совпадают, причем именно при том единственном значении параметра вложения $\tau = 4m$, при котором компонента y^2 в (12) не содержит особенностей и вложение гладко покрывает горизонт событий.

В дальнейшем в большом количестве работ обнаруживалось аналогичное соответствие между эффектами Хокинга и Унру для многих других метрик. Соответствующие результаты были получены для различных типов черных дыр (в том числе с числом измерений, отличным от 4), черных струн и кротовых нор (см. работы [37]–[42] и цитированную там литературу). Обсуждалась также ситуация, в которой детектор движется по окружности [43] или свободно падает [44]. В этом случае спектр излучения уже не является в точности тепловым. В работе [45] было показано, что совпадение сохраняется и для поправок к температурам Хокинга и Унру. В работе [46] было замечено, что соответствие имеет место, если ограничиться вложением только $(t-r)$ -сектора риманова пространства. Важно отметить, что во всех случаях использовались покрывающие горизонт гиперболические вложения, имеющие зависимость от времени, аналогичную (12) (их также называют вложениями фронсдаловского типа), в которых линии времени представляют собой гиперболы в объемлющем пространстве.

Подход, при котором термодинамические свойства пространств с горизонтами анализируются с использованием изометрических вложений в плоское объемлющее пространство, обычно называют GEMS¹⁾. Следует отметить некоторую неточность этого термина – далеко не всегда используемые в его рамках вложения являются действительно глобальными, т. е. гладкими во всех несингулярных точках риманова пространства. Например, при анализе соответствия между эффектами Хокинга и Унру для метрики заряженной черной дыры Рейснера–Нордстрёма в работе [22] используется вложение, которое гладко покрывает внешний горизонт, однако его нельзя гладко продолжить под внутренний горизонт (в отличие от вложений, предложенных в [47]). Таким образом, под глобальностью в термине GEMS понимается только тот факт, что вложение гладко покрывает наблюдаемую область пространства вместе с горизонтом, а сохраняется ли гладкость глубоко под горизонтом, считается несущественным.

5. ПРИМЕРЫ ОТСУТСТВИЯ СООТВЕТСТВИЯ

Несмотря на большое количество примеров вложений, для которых описанное в предыдущем разделе соответствие между эффектами Хокинга и Унру имеет место, существуют и контрпримеры. Опишем их, следуя работе [48].

Таковыми контрпримерами, в частности, являются построенные сравнительно недавно вложения метрик Шварцшильда [49], [50] (включая ее dS обобщение [51]) и Рейснера–Нордстрёма [47]. Эти новые вложения бывают трех типов, и все они не являются гиперболическими, т. е. для них линии времени – не гиперболы. Чтобы сделать ясной их структуру, приведем явный вид вложений всех трех типов для метрики Шварцшильда (структура вложений остальных упомянутых метрик аналогична): кубическое вложение

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{\xi^2}{6} t'^3 + \left(1 - \frac{m}{r}\right) t' + u(r), \\ y^1 &= \frac{\xi^2}{6} t'^3 - \frac{m}{r} t' + u(r), \quad y^2 = \frac{\xi}{2} t'^2 + \frac{1}{2\xi} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

¹⁾Global embedding Minkowskian spacetime.

экспоненциальное вложение

$$\begin{aligned} y^0 &= \frac{m}{\alpha\sqrt{r_c r}} \left(e^{\alpha t' + u(r)} - \frac{r - r_c}{2m} e^{-\alpha t' - u(r)} \right), \\ y^1 &= \frac{m}{\alpha\sqrt{r_c r}} \left(e^{\alpha t' + u(r)} + \frac{r - r_c}{2m} e^{-\alpha t' - u(r)} \right), \quad y^2 = \hat{\gamma} t', \end{aligned} \quad (14)$$

спиральное вложение

$$\begin{aligned} y^0 &= t', \quad y^1 = \frac{(6m)^{3/2}}{\sqrt{r}} \sin \left(\frac{t'}{3^{3/2} 2m} - \sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1 + \frac{r}{6m} \right)^{3/2} \right), \\ y^2 &= \frac{(6m)^{3/2}}{\sqrt{r}} \cos \left(\frac{t'}{3^{3/2} 2m} - \sqrt{\frac{2m}{r}} \left(1 + \frac{r}{6m} \right)^{3/2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь t' – время некоторых падающих координат, связанное с шварцшильдовским временем соотношением $t' = t + h(r)$, константы ξ , α , $\hat{\gamma}$, r_c являются параметрами вложений, а компоненты y^3, y^4, y^5 и сигнатура объемлющего пространства совпадают с использованными для вложения (12).

Линии времени для всех этих трех вложений не являются гиперболами. Они являются стационарными траекториями, и аналог эффекта Унру для них изучался в работе [32]. Например, для детектора, движущегося в объемлющем пространстве по линиям времени вложения (13), спектр был найден точно, он имеет вид

$$S(E) = \frac{E^2}{8\pi^2 \sqrt{3} \xi^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \exp \left(-\frac{\sqrt{12}}{\xi^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) E \right) \quad (16)$$

и тепловым не является. Для линий времени вложения (14) в работе [32] спектр исследовался численно, также он анализировался в недавней работе [33]. Как и в предыдущем случае, спектр не является тепловым. Линии времени вложения (15) соответствуют движению детектора по окружности. Аналог эффекта Унру для этого случая много обсуждался в литературе, для этого случая спектр тоже не является тепловым. Более того, как легко увидеть из (15), при $r \rightarrow \infty$ радиус окружности стремится к нулю (при фиксированной угловой скорости) и детектор оказывается покоящимся в выбранной системе координат объемлющего пространства, а значит, эффект Унру в этом пределе должен точно отсутствовать. Такая ситуация, естественно, связана с тем, что вложение (15) является асимптотически плоским, т.е. соответствующая ему поверхность при $r \rightarrow \infty$ стремится к плоскости. Именно такое вложение кажется наиболее естественным с точки зрения теории вложения как описания гравитации (см. обсуждение в работе [50]).

Таким образом, для всех трех новых шестимерных вложений метрики Шварцшильда соответствие между эффектами Хокинга и Унру отсутствует. Аналогичная ситуация имеет место и для трех новых вложений метрики Рейснера–Нордстрёма, найденных в [47], и двух новых вложений метрики Шварцшильда–де Ситтера, найденных в [51], поскольку их структура полностью аналогична вложениям (13)–(15).

Еще один класс примеров отсутствия соответствия между эффектами Хокинга и Унру можно легко получить тривиальным изометрическим изгибанием (таким, как изгибание плоскости в часть цилиндра) плоского объемлющего пространства, содержащего поверхность, для которой до изгибания соответствие имело место. Например, осуществив изгибание стандартного гиперboloида, можно получить для

метрики де Ситтера нестандартное вложение в плоское пространство с сигнатурой $(+-----)$, имеющее вид

$$\begin{aligned} y^0 &= R \operatorname{sh}(\operatorname{sh} t), & y^1 &= R \operatorname{ch}(\operatorname{sh} t), & y^2 &= R \operatorname{ch} t \cos \chi, \\ y^3 &= R \operatorname{ch} t \sin \chi \cos \theta, & y^4 &= R \operatorname{ch} t \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ y^5 &= R \operatorname{ch} t \sin \chi \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Для него линии времени уже не будут гиперболами (и даже не будут являться стационарными траекториями), а значит, соответствующий такому движению спектр не будет тепловым и соответствие будет отсутствовать.

Другим примером является результат изгибания четырехмерной плоскости, описываемый функцией вложения

$$\begin{aligned} y^0 &= \alpha^{-1} \operatorname{sh} \alpha t, & y^1 &= \alpha^{-1} \operatorname{ch} \alpha t, & y^2 &= r \cos \theta, \\ y^3 &= r \sin \theta \cos \varphi, & y^4 &= r \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (18)$$

с сигнатурой объемлющего пространства $(+-----)$. Легко проверить, что ей соответствует метрика, совпадающая с метрикой пространства Минковского, т. е. функция (18) задает нетривиальное вложение пространства Минковского в плоское пятимерное объемлющее пространство. Если детектор Унру–Девитта движется по линии времени такого вложения, то с точки зрения внутренней геометрии он не будет наблюдать никакого излучения, поскольку движется по инерциальной траектории в четырехмерном пространстве Минковского. Однако в объемлющем пространстве линия времени является гиперболой, детектор движется равноускоренно и должен иметь место стандартный эффект Унру. Таким образом, в данном примере соответствие тоже отсутствует.

Если проанализировать примеры, для которых проверено наличие или отсутствие соответствия между эффектами Хокинга и Унру, то видно, что оно существует в случаях, когда метрика имеет горизонт, а вложение является гиперболическим и гладко этот горизонт покрывает. В разделах 6, 7 мы покажем, следуя работе [24], что при этих условиях соответствие действительно всегда имеет место.

6. ОБЩИЙ ВИД ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ВЛОЖЕНИЯ С ГОРИЗОНТОМ

Прежде всего сформулируем, какой общий вид имеет гиперболическое вложение метрики, обладающей горизонтом. Поскольку нас интересуют метрики, для которых существует излучение Хокинга, будем считать, что имеется времениподобный вектор Киллинга ξ и существует горизонт Киллинга (см., например, [28]), т. е. светоподобная гиперповерхность $\mathcal{N}$ такая, что вектор ξ к ней касателен и на ней $\xi^2 = 0$. В остальном метрику будем считать произвольной, т. е. не обладающей какой-либо дополнительной симметрией и не являющейся, вообще говоря, решением уравнений Эйнштейна с какой-то определенной материей. Выберем координаты t, ρ, x^2, x^3 так, чтобы вектор ξ был касателен к линиям времени t , а координата ρ обращалась в нуль на гиперповерхности $\mathcal{N}$, так что $\xi^2 \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$. Будем считать, что наблюдатель (например, детектор Унру–Девитта) покоится в выбранной системе координат и имеет постоянные координаты $\rho = \rho_0 > 0, x^2, x^3$, а также что $\xi^2 > 0$ при $0 < \rho \leq \rho_0$.

Существование времениподобного вектора Киллинга означает, что метрика обладает симметрией относительно одномерной группы трансляций – сдвигов времени.

Чтобы построить являющуюся вложением рассматриваемой метрики поверхность $\mathcal{M}$, которая тоже обладает симметрией относительно этой группы, необходимо рассматривать представления группы трансляций, матрицы которых соответствуют преобразованиям группы Пуанкаре объемлющего пространства (см. подробности о методе построения симметричных вложений в работе [50]). В одном из простейших случаев указанные матрицы соответствуют лоренцевым бустам в объемлющем пространстве, т. е. сдвиг t эквивалентен бусту. При этом линии времени в объемлющем пространстве оказываются гиперболами и вложения такого типа называют гиперболическими (или, как уже упоминалось выше, вложениями фронсдаловского типа). Произвольное вложение гиперболического типа можно, используя произвол в выборе координат ρ , x^2 , x^3 , в области $0 \leq \rho \leq \rho_0$ (где $\xi^2 > 0$) записать в виде

$$y^0 = \rho \operatorname{sh}(\alpha t), \quad y^1 = \rho \operatorname{ch}(\alpha t), \quad y^I = y^I(\rho, x^2, x^3). \quad (19)$$

Здесь и далее $I = 2, \dots, N-1$, а α – произвольная положительная константа, введенная для общности. Отметим, что компоненты y^I функции вложения $y^a(x^\mu)$ зависят от координат ρ , x^2 , x^3 , но не от t . При построении вложений конкретных метрик далее необходимо подставлять общий вид вложения (19) в уравнение (1) и искать его решения. Без какой-либо дополнительной симметрии метрики сделать это обычно не удастся, но провести интересующий нас общий анализ можно.

Будем нормировать соответствующий сдвигам времени t вектор Киллинга ξ так, чтобы он был единичным в точке наблюдения $\rho = \rho_0$. Тогда в координатах t , ρ , x^2 , x^3 его компоненты будут иметь вид

$$\xi^\mu = \delta_0^\mu \frac{1}{\sqrt{g_{00}(\rho_0)}} = \delta_0^\mu \frac{1}{\alpha \rho_0}, \quad (20)$$

а в объемлющем пространстве ему соответствует вектор $\xi^a = \xi^\mu \partial_\mu y^a$ с компонентами

$$\xi^0 = \frac{\rho}{\rho_0} \operatorname{ch}(\alpha t), \quad \xi^1 = \frac{\rho}{\rho_0} \operatorname{sh}(\alpha t), \quad \xi^I = 0. \quad (21)$$

Будем предполагать, что вложение гладко покрывает горизонт, т. е. что рассматриваемая четырехмерная поверхность является гладкой при $\rho = 0$. Поскольку координата t оказывается сингулярной на горизонте (как например, время координат Шварцшильда для черной дыры), функция вложения при использовании этой координаты не обязательно будет явно гладкой, поэтому гладкость нельзя определить напрямую. Чтобы это сделать, заметим, что, оставаясь касательным к поверхности $\mathcal{M}$, вектор ξ^a в сколь угодно малой окрестности точки $y^0 = y^1 = 0$ имеет сильно отличающиеся направления, лежащие, однако, в плоскости y^0, y^1 . Это совместимо с гладкостью поверхности $\mathcal{M}$ только в том случае, если вся плоскость y^0, y^1 является касательной к $\mathcal{M}$ в точке $y^0 = y^1 = 0$. Следовательно, величины y^0, y^1 можно использовать в качестве координат на $\mathcal{M}$ в окрестности точки $y^0 = y^1 = 0$ и гладкость $\mathcal{M}$ гарантирует гладкость функции вложения, записанной в этих координатах. При использовании в указанной окрестности в качестве координат на поверхности $\mathcal{M}$ величин y^0, y^1, x^2, x^3 функция вложения (19) (в области, где эта формула применима, т. е. при $y^{12} - y^{02} \geq 0$) приобретает вид

$$y^0 = y^0, \quad y^1 = y^1, \quad y^I = y^I(\sqrt{y^{12} - y^{02}}, x^2, x^3). \quad (22)$$

Ее гладкость по y^0, y^1 означает гладкую зависимость функции $y^I(\rho, x^2, x^3)$ от ρ^2 , откуда следует, что в окрестности горизонта, которому в объемлющем пространстве

соответствует множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$y^{1^2} - y^{0^2} = 0, \quad (23)$$

выполняется разложение

$$y^I = f^I(x^2, x^3) + (y^{1^2} - y^{0^2})h^I(x^2, x^3) + O((y^{1^2} - y^{0^2})^2). \quad (24)$$

Выполнение этого разложения, таким образом, является критерием того, что рассматриваемое вложение гладко покрывает горизонт.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ СООТВЕТСТВИЯ

Докажем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для гладко покрывающего горизонт гиперболического вложения (которое всегда можно записать в форме (19)) произвольной метрики, обладающей времениподобным вектором Киллинга и горизонтом Киллинга, соответствие между эффектами Хокинга и Унру имеет место.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определения температуры T_H возникающего из-за наличия горизонта излучения Хокинга найдем из уравнения (3) величину поверхностной гравитации k с точки зрения наблюдателя, имеющего координату $\rho = \rho_0$. Для этого перепишем это уравнение в терминах вектора объемлющего пространства ξ^a (21). Ковариантная производная вектора в формализме теории вложения может быть записана в виде (изложение этого формализма см. в [15], [52])

$$\nabla_\alpha \xi^\mu = e_a^\mu \partial_\alpha (\xi^\nu e_\nu^a), \quad (25)$$

где

$$e_\nu^a = \partial_\nu y^a, \quad e_a^\mu = g^{\mu\nu} e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (26)$$

Умножая уравнение (3) на величину e_μ^b и используя формулу (25), получаем уравнение

$$\Pi_a^b \xi^\alpha \partial_\alpha \xi^a = k \xi^b, \quad (27)$$

где величина $\Pi_a^b = e_\nu^b e_a^\nu$ является проектором на касательное пространство к поверхности $\mathcal{M}$ в данной точке.

Для удобства анализа уравнения (27) введем в объемлющем пространстве светоподобные координаты $y^\pm = y^0 \pm y^1$, аналогично тому, как было сделано в разделе 3 при обсуждении тривиального соответствия между эффектами Хокинга и Унру (формулы (7), (8)). В этих координатах формула (19) приобретет вид

$$y^+ = \rho e^{\alpha t}, \quad y^- = -\rho e^{-\alpha t}, \quad y^I = y^I(\rho, x^2, x^3), \quad (28)$$

с использованием которого формула (21) записывается как

$$\xi^+ = \frac{\rho}{\rho_0} e^{\alpha t} = \frac{y^+}{\rho_0}, \quad \xi^- = \frac{\rho}{\rho_0} e^{-\alpha t} = -\frac{y^-}{\rho_0}, \quad \xi^I = 0. \quad (29)$$

В разделе 6 было показано, что функция вложения поверхности $\mathcal{M}$ является гладкой в координатах y^0, y^1, x^2, x^3 (см. (22)), следовательно, она также будет гладкой и в координатах y^+, y^-, x^2, x^3 , в которых она приобретает вид

$$y^+ = y^+, \quad y^- = y^-, \quad y^I = y^I(\sqrt{y^+ y^-}, x^2, x^3). \quad (30)$$

Запишем в этих координатах уравнение (27) в точке горизонта, для которой $y^- = 0$, $y^+ > 0$ (что соответствует уравнению горизонта (23)), а значит, в этой точке $\xi^- = 0$ согласно (29). Для левой части уравнения (27) имеем

$$\Pi_a^b \xi^\alpha \partial_\alpha \xi^a = \Pi_a^b \xi^+ \partial_+ \xi^a = \frac{y^+}{\rho_0^2} \Pi_a^b m^a, \quad (31)$$

где m^a – постоянный вектор с компонентами $m^+ = 1$, $m^- = 0$, $m^I = 0$. Легко заметить из вида формулы (30), что при $y^- = 0$ вектор m^a является касательным к $\mathcal{M}$, поскольку совпадает с $\partial_+ y^a$. Следовательно, по свойству проектора $\Pi_a^b m^a = m^b$ и в итоге уравнение (27) переписывается в виде

$$\frac{y^+}{\rho_0^2} m^b = k \frac{y^+}{\rho_0} m^b. \quad (32)$$

Отсюда легко найти величину поверхностной гравитации для наблюдателя, имеющего координату $\rho = \rho_0$:

$$k = \frac{1}{\rho_0}. \quad (33)$$

Это означает, что согласно формуле (2) наблюдатель фиксирует излучение Хокинга с температурой $T_H = 1/2\pi\rho_0$.

С другой стороны, как видно из (19), этот наблюдатель в объемлющем пространстве движется с постоянным ускорением $w = 1/\rho_0$, а значит, фиксирует излучение Унру с температурой (4), которая оказывается совпадающей с T_H . Следовательно, утверждение доказано.

Следует отметить, что во многом проведенные при доказательстве рассуждения являются повторением рассуждений, использованных в разделе 3 при обсуждении тривиального соответствия между эффектами Хокинга и Унру. Отличие заключается только в том, что при выводе формулы (33) пришлось учитывать нетривиальность ковариантной производной, а при выводе (10) ковариантная производная совпадала с обычной. Однако результаты в обоих случаях получились одинаковые – соответствие между эффектами Хокинга и Унру имеет место, и это можно просто объяснить следующим образом.

Заметим, что отличие гиперболического вложения общего вида (19) от записи пространства Минковского в координатах Риндлера (5) заключается только в том, что для пространства Минковского “поперечные” компоненты $x^{2,3}$ не зависят от ρ , а для гиперболического вложения аналогичные “поперечные” компоненты y^I от ρ зависят. Однако эта зависимость при малых ρ для гладких вложений не имеет линейного по ρ члена (см. разложение (24)). Поэтому в малой окрестности горизонта гладкая поверхность $\mathcal{M}$ при фиксированных $x^{2,3}$ в первом приближении совпадает с пространством Минковского, а значит, для наблюдателя, координата которого ρ мала, температуры Хокинга и Унру совпадают тривиально. Для наблюдателей же с произвольным значением координаты ρ это совпадение сохраняется автоматически вследствие следующего из (4) и (19) соотношения

$$T_U \sqrt{g_{00}} = \frac{1}{2\pi\rho} \sqrt{\alpha^2 \rho^2} = \text{const} \quad (34)$$

и выглядящего точно так же известного закона Толмена

$$T_H \sqrt{g_{00}} = \text{const}. \quad (35)$$

Таким образом, в основе соответствия между эффектами Хокинга и Унру для произвольных гладко покрывающих горизонт гиперболических вложений лежит локальное сходство между такими вложениями и записью пространства Минковского в координатах Риндлера.

Отметим, что существование соответствия между эффектами Хокинга и Унру удалось доказать при достаточно общих предположениях. О метрике пространства-времени предполагалось только существование времениподобного вектора Киллинга и горизонта Киллинга (без этого нельзя было бы говорить об излучении Хокинга), а также существование для нас гиперболического вложения. Функция вложения была взята в самом общем виде, соответствующем гиперболическому типу реализации трансляционной инвариантности относительно сдвигов времени. Наличие какой-либо еще симметрии, например сферической, не предполагалось.

8. ПОВЕРХНОСТИ, НА КОТОРЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ОБЪЕМЛЮЩИМ ПРОСТРАНСТВОМ

Квантовые эффекты в римановом пространстве, в том числе и эффект Хокинга, определяются свойствами заданных в римановом пространстве квантовых полей, например скалярным полем, удовлетворяющим инвариантному уравнению

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2) \varphi(x) = 0. \quad (36)$$

А квантовые эффекты на вложенной поверхности, в частности эффект Унру, определяются свойствами квантовых полей, заданных в плоском объемлющем пространстве и удовлетворяющих уравнениям вида

$$(\partial_a \partial^a + M^2) \varphi(y) = 0. \quad (37)$$

Уравнения (36) и (37) имеют достаточно много общего, чтобы при некоторых дополнительных условиях на форму поверхности возникала связь между квантовыми эффектами в римановом пространстве и на вложенной в плоское объемлющее пространство поверхности.

Кроме являющегося такой связью описанного в предыдущих разделах соответствия между эффектами Хокинга и Унру, существует и другая аналогичная связь. Она имеет место для вложений, для которых метрика объемлющего пространства, плоская в лоренцевых координатах y^a , в некоторой криволинейной системе координат $\tilde{y}^a \equiv (x^\mu, z^A)$ принимает вид так называемой warped-геометрии:

$$ds^2 = \omega(z) \bar{g}_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu + g_{AB}^\perp(z) dz^A dz^B, \quad (38)$$

здесь и далее индексы $A, B, \dots$ принимают $N - 4$ значения. Предполагается, что вложенному риманову пространству соответствует четырехмерная поверхность, отвечающая некоторому значению $z^A = \text{const}$, а x^μ играет роль координат на поверхности, в которых метрика имеет вид $g_{\mu\nu} = \omega(z) \bar{g}_{\mu\nu}(x)$. Отметим, что именно такой способ описания системы четырехмерных поверхностей – с помощью введения $(N - 4)$ -компонентного поля $z^A(y^a)$ – используется в упомянутом в разделе 1 описании гравитации в виде теории разбиения [20], однако возможность записать метрику в форме (38) там не предполагается. С другой стороны, следует отметить, что в общем случае при использовании warped-геометрии (например, в рамках упоминавшейся в разделе 1 теории бран) предполагается, что в факторизованном

виде (38) записана не плоская метрика η_{ab} , а произвольная. Это соответствует гораздо более общей ситуации, чем обсуждаемая здесь, когда (38) является записью в криволинейных координатах именно плоской метрики.

Для поверхностей, соответствующих факторизации плоской метрики в форме (38), в работе [25] устанавливается связь между двухточечными функциями Вайтмана на поверхности и в объемлющем пространстве. Это удастся сделать с помощью разделения переменных, в результате которого квантовое поле в объемлющем пространстве (удовлетворяющее уравнению вида (37)) выражается через удовлетворяющее уравнению вида (36) квантовое поле в римановом пространстве и классическую переменную, зависящую от поперечных координат z^A . Очевидно, что в получении этого результата решающую роль сыграла возможность записать метрику в форме (38), без чего было бы неясно, как провести разделение переменных. Отметим, что кроме плоского пространства в работе [25] в качестве объемлющего пространства рассматриваются также пространства де Ситтера и анти-де Ситтера.

В работах [26], [27] был получен похожий результат для связи двухточечных функций Грина и анализировалась связь между причинной структурой объемлющего пространства и вложенного риманова пространства. Результат также был получен в предположении, что вложение соответствует факторизации плоской метрики объемлющего пространства в форме (38).

Интересно рассмотреть вопрос о том, насколько сильные ограничения на структуру вложенной поверхности налагает условие факторизации метрики (38) вместе с предположением о плоском характере этой метрики (метрика соответствует выбору некоторых криволинейных координат в плоском пространстве). С точки зрения внутренней геометрии ответ на этот вопрос можно получить как следствие теоремы 3.1 из работы [53], из которой следует, что вложенная поверхность должна быть пространством постоянной кривизны. Получим этот результат, используя формализм теории вложения [15], [52], при этом удастся параллельно найти и некоторое дополнительное условие, ограничивающее уже внешнюю геометрию.

Метрика объемлющего пространства в криволинейных координатах $\tilde{y}^a \equiv (x^\mu, z^A)$ связана с плоской метрикой η_{ab} в лоренцевых координатах y^a стандартной формулой

$$\tilde{g}_{ab}(\tilde{y}) = \frac{\partial y^c}{\partial \tilde{y}^a} \frac{\partial y^d}{\partial \tilde{y}^b} \eta_{cd}, \quad (39)$$

которая с учетом (38) сводится к уравнениям

$$(\partial_\mu y^c)(\partial_\nu y_c) = \omega(z) \bar{g}_{\mu\nu}(x), \quad (40)$$

$$(\partial_A y^c)(\partial_\nu y_c) = 0, \quad (\partial_A y^c)(\partial_B y_c) = g_{AB}^\perp(z), \quad (41)$$

где $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$, $\partial_A \equiv \partial/\partial z^A$. Дифференцируя равенство (40) по z^A , получаем

$$(\partial_\mu \partial_A y^c)(\partial_\nu y_c) + (\partial_\nu \partial_A y^c)(\partial_\mu y_c) = (\partial_A \omega(z)) \bar{g}_{\mu\nu}(x). \quad (42)$$

Поскольку согласно (41) величина $\partial_A y^c$ по индексу c ортогональна всем касательным векторам к поверхности $z^A = \text{const}$ в данной точке, в левой части (42) можно перенести производные, в результате чего получится уравнение

$$-2b_{\mu\nu}^c \partial_A y_c = (\partial_A \omega(z)) \bar{g}_{\mu\nu}(x), \quad (43)$$

где величина

$$b_{\mu\nu}^c = \nabla_\mu \nabla_\nu y^a = \Pi_{\perp a}^c \partial_\mu \partial_\nu y^a \quad (44)$$

является второй основной формой поверхности $z^A = \text{const}$ (здесь $\Pi_a^c = \delta_a^c - \Pi_a^c$ есть поперечный проектор).

Используя обратную метрику $g^{\perp AB}(z)$ и замечая, что $(\partial_{Ay^c})g^{\perp AB}(z)(\partial_B y^a) = \Pi_c^a$, уравнение (43) несложно переписать в виде

$$b_{\mu\nu}^a = \xi^a g_{\mu\nu}, \quad \xi^a = -\frac{1}{2}(\partial_B y^a) g^{\perp AB}(z) \frac{\partial_A \omega(z)}{\omega(z)}, \quad (45)$$

где использовано, что метрика поверхности $g_{\mu\nu} = \omega(z)\bar{g}_{\mu\nu}(x)$. Теперь, воспользовавшись выражением для тензора кривизны в формализме вложения (являющимся частным случаем уравнения Гаусса, см. подробнее [15], [52]), получаем

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= b_{\mu\alpha}^a \eta_{ab} b_{\nu\beta}^b - b_{\mu\beta}^a \eta_{ab} b_{\nu\alpha}^b = \xi^a \xi_a (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) = \\ &= \frac{\partial_A \omega(z) g^{\perp AB}(z) \partial_B \omega(z)}{4\omega(z)^2} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}). \end{aligned} \quad (46)$$

Отсюда следует, что поверхность $z = \text{const}$ обязательно является пространством постоянной кривизны, что и предполагалось показать. Однако в процессе рассуждений мы получили и более сильное условие на поверхность, затрагивающее также и внешнюю геометрию – условие (45) на вторую основную форму, в соответствии с которым она обязательно должна быть пропорциональна метрике.

Простейшими вариантами поверхностей, для которых выполняется это условие, являются плоскость, сфера и псевдосфера (гиперboloид) произвольного числа измерений. Именно они используются в качестве вложений в плоское объемлющее пространство как в работе [25], так и в работах [26], [27]. Однако не исключено, что эти варианты не являются единственно возможными. Используя предложенный в работе [50] метод построения поверхностей с заданной симметрией, можно попытаться построить и другие поверхности, вторая основная форма которых удовлетворяет условию (45). Таким свойством обладает, например, нетривиальное вложение трехмерной плоскости, использующееся при построении вложения метрики пространственно-плоской модели Фридмана в работе [54]. Вопрос о свойствах квантовых эффектов для вложений такого типа требует дополнительного исследования.

Благодарности. Автор благодарит организаторов конференции “В поисках фундаментальных симметрий”, посвященной 90-летию со дня рождения Ю. В. Новожилова. Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] Н. Биррелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, М., 1984.
- [2] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Атомиздат, М., 1980.
- [3] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43**:3 (1975), 199–220.
- [4] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D*, **14**:4 (1976), 870–892.
- [5] A. Friedman, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 625–649.
- [6] T. Regge, C. Teitelboim, “General relativity à la string: a progress report”, *Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting* (Trieste, Italy, 1975), ed. R. Ruffini, North Holland, Amsterdam, 1977, 77–88.
- [7] S. Deser, F. A. E. Pirani, D. C. Robinson, *Phys. Rev. D*, **14**:12 (1976), 3301–3303.

- [8] M. Pavšič, *Phys. Lett. A*, **107**:2 (1985), 66–70.
- [9] V. Tapia, *Class. Quantum Grav.*, **6**:3 (1989), L49–L56.
- [10] M. D. Maia, *Class. Quantum Grav.*, **6**:2 (1989), 173–183.
- [11] I. A. Bandos, *Modern Phys. Lett. A*, **12** (1997), 799–810, arXiv: hep-th/9608093.
- [12] F. B. Estabrook, R. S. Robinson, H. R. Wahlquist, *Class. Quantum Grav.*, **16**:3 (1999), 911–918.
- [13] D. Karasik, A. Davidson, *Phys. Rev. D*, **67**:6 (2003), 064012, 17 pp., arXiv: gr-qc/0207061.
- [14] M. D. Bustamante, F. Debbasch, M.-E. Brachet, *Classical gravitation as free membrane dynamics*, arXiv: gr-qc/0509090.
- [15] С. А. Пастон, В. А. Франке, *ТМФ*, **153**:2 (2007), 271–288, arXiv: 0711.0576.
- [16] Л. Д. Фаддеев, *ТМФ*, **166**:3 (2011), 323–335, arXiv: 0911.0282; L. D. Faddeev, *New action for the Hilbert-Einstein equations*, arXiv: 0906.4639; *3+1 decomposition in the new action for the Einstein theory of gravitation*, arXiv: 1003.2311.
- [17] S. A. Paston, A. A. Sheykin, *Internat. J. Modern Phys. D*, **21**:5 (2012), 1250043, 19 pp., arXiv: 1106.5212.
- [18] S. Willison, *A Re-examination of the isometric embedding approach to General Relativity*, arXiv: 1311.6203.
- [19] R. Maartens, K. Koyama, *Living Reviews in Relativity*, **13** (2010), lrr-2010-5, 124 pp., <http://www.livingreviews.org/lrr-2010-5>.
- [20] С. А. Пастон, *ТМФ*, **169**:2 (2011), 285–296, arXiv: 1111.1104.
- [21] S. Deser, O. Levin, *Class. Quantum Grav.*, **15**:12 (1998), L85–L87, arXiv: hep-th/9806223.
- [22] S. Deser, O. Levin, *Phys. Rev. D*, **59**:6 (1999), 064004, 7 pp., arXiv: hep-th/9809159.
- [23] M. Beciu, H. Culetu, *Modern Phys. Lett. A*, **14**:1 (1999), 1–8.
- [24] S. A. Paston, *Class. Quantum Grav.*, **32**:14 (2015), 145009, arXiv: 1411.4329.
- [25] M. Bertola, J. Bros, V. Gorini, U. Moschella, R. Schaeffer, *Nucl. Phys. B*, **581**:1–2 (2000), 575–603, arXiv: hep-th/0003098.
- [26] Y.-Z. Chu, *J. Math. Phys.*, **55**:9 (2014), 092501, 16 pp., arXiv: 1305.6933.
- [27] Y.-Z. Chu, *A line source in Minkowski for the de Sitter spacetime scalar Green's function: Massive case*, arXiv: 1310.2939.
- [28] P. K. Townsend, *Black holes*, arXiv: gr-qc/9707012.
- [29] W. Rindler, *Am. J. Phys.*, **34**:12 (1966), 1174–1178.
- [30] J. R. Letaw, *Phys. Rev. D*, **22**:6 (1980), 1345–1351.
- [31] E. T. Akhmedov, D. Singleton, *Письма в ЖЭТФ*, **86**:9 (2007), 702–706, arXiv: 0705.2525.
- [32] J. R. Letaw, *Phys. Rev. D*, **23**:8 (1981), 1709–1714.
- [33] S. Abdolrahimi, *Class. Quantum Grav.*, **31**:13 (2014), 135009, 12 pp., arXiv: 1304.4237.
- [34] L. C. Barbado, M. Visser, *Phys. Rev. D*, **86**:8 (2012), 084011, 11 pp., arXiv: 1207.5525.
- [35] S. Deser, O. Levin, *Class. Quantum Grav.*, **14**:9 (1997), L163–L168, arXiv: gr-qc/9706018.
- [36] C. Fronsdal, *Phys. Rev.*, **116**:3 (1959), 778–781.
- [37] Y.-W. Kim, Y.-J. Park, K.-S. Soh, *Phys. Rev. D*, **62**:10 (2000), 104020, 6 pp., arXiv: gr-qc/0001045.
- [38] N. L. Santos, O. J. C. Dias, J. P. S. Lemos, *Phys. Rev. D*, **70**:12 (2004), 124033, 7 pp., arXiv: hep-th/0412076.
- [39] R.-G. Cai, Y. S. Myung, *Phys. Rev. D*, **83**:10 (2011), 107502, 4 pp., arXiv: 1012.5709.
- [40] S.-T. Hong, W. T. Kim, J. J. Oh, Y.-J. Park, *Phys. Rev. D*, **63**:12 (2001), 127502, 4 pp., arXiv: hep-th/0103036.
- [41] S.-T. Hong, S.-W. Kim, *Modern Phys. Lett. A*, **21**:10 (2006), 789–794, arXiv: gr-qc/0303059.
- [42] Y.-W. Kim, J. Choi, Y.-J. Park, *Phys. Rev. D*, **89**:4 (2014), 044004, 8 pp., arXiv: 1311.0592.
- [43] H.-Z. Chen, Y. Tian, Y.-H. Gao, X.-C. Song, *JHEP*, **10** (2004), 011, 10 pp., arXiv: gr-qc/0409107.

- [44] E. J. Brynjolfsson, L. Thorlacius, *JHEP*, **09** (2008), 066, 13 pp., arXiv:0805.1876.
- [45] R. Banerjee, B. R. Majhi, D. Roy, *Corrections to Unruh effect in tunneling formalism and mapping with Hawking effect*, arXiv:0901.0466.
- [46] R. Banerjee, B. R. Majhi, *Phys. Lett. B*, **690**:1 (2010), 83–86, arXiv:1002.0985.
- [47] S. A. Paston, A. A. Sheykin, *SIGMA*, **10** (2014), 003, 10 pp., arXiv:1304.6550.
- [48] S. A. Paston, *JHEP*, **06** (2014), 122, 10 pp., arXiv:1402.3975.
- [49] A. Davidson, U. Paz, *Found. Phys.*, **30**:5 (2000), 785–794.
- [50] S. A. Paston, A. A. Sheykin, *Class. Quantum Grav.*, **29**:9 (2012), 095022, 17 pp., arXiv:1202.1204.
- [51] A. A. Sheykin, D. A. Grad, S. A. Paston, *PoS(QFTHEP2013)*, 091, arXiv:1401.7820.
- [52] С. А. Пастон, *Гравитация как теория вложения*, LAP Lambert Academic Publ., Saarbrücken, 2012.
- [53] M. Bertola, D. Gouthier, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.)*, **32**:1 (2001), 45–62.
- [54] С. А. Пастон, А. А. Шейкин, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 429–441, arXiv:1306.4826.