Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Богданов, Е. В. Ферапонтов, Нелокальный гамильтонов формализм полугамильтоновых систем гидродинамического типа, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 1, 113–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:32:13

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ПОЛУГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

С использованием формальных функций Бейкера–Ахиезера для $(2+1)$ -мерной системы n волн строится нелокальный гамильтонов формализм полугамильтоновых систем гидродинамического типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно результатам работы [1] система гидродинамического типа в инвариантах Римана, удовлетворяющая уравнениям

$$R_t^i = v^i(R) R_x^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

является гамильтоновой с невырожденной скобкой Дубровина–Новикова тогда и только тогда, когда существует плоская диагональная метрика $\sum g_{ii}(dR^i)^2$ такая, что

$$\partial_j \ln \sqrt{g_{ii}} = \frac{\partial_j v^i}{v^j - v^i}, \quad i \neq j, \quad (2)$$

где $\partial_j = \partial/\partial R^j$. В этом случае уравнения (1) представимы в гамильтоновой форме

$$R_t^i = A^{ij} \frac{\delta H}{\delta R^j} \quad (3)$$

с гамильтоновым оператором типа оператора Дубровина–Новикова [2]

$$A^{ij} = \delta^{ij} g^{ii} d - g^{ii} \Gamma_{ik}^j R_x^k, \quad d = \frac{d}{dx} \quad (4)$$

(здесь $g^{ii} = 1/g_{ii}$, Γ_{ik}^j — символы Кристоффеля связности Леви–Чивита, порожденной метрикой ds^2) и подходящим гамильтонианом $H = \int h(R) dx$. Перекрестное дифференцирование соотношения (2) приводит к равенствам

$$\partial_k \frac{\partial_j v^i}{v^j - v^i} = \partial_j \frac{\partial_k v^i}{v^k - v^i}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (5)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, Московская обл., Россия

которые тем самым выполнены для любой гамильтоновой системы (1). Системы (1), характеристические скорости которых удовлетворяют соотношениям (5), были названы полугамильтоновыми. Поскольку общее решение уравнений (5) зависит от $n(n-1)$ функций двух аргументов (в то время как гамильтоновы системы (1), как и плоские диагональные метрики, параметризуются $n(n-1)/2$ функциями двух аргументов), класс полугамильтоновых систем оказывается существенно шире класса гамильтоновых. Всякая полугамильтонова система обладает бесконечным набором коммутирующих потоков

$$R_\tau^i = w^i(R)R_x^i,$$

характеристические скорости которых удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\frac{\partial_j w^i}{w^j - w^i} = \frac{\partial_j v^i}{v^j - v^i}, \quad i \neq j. \quad (6)$$

В работах [3, 4] было высказано предположение, согласно которому полугамильтоновы системы также являются гамильтоновыми, если от локальных гамильтоновых операторов (4) перейти к рассмотрению нелокальных (т.е. явно зависящих от d^{-1}) выражений вида

$$A^{ij} = \delta^{ij} g^{ii} d - g^{ii} \Gamma_{ik}^j R_x^k + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} w_{\alpha}^i R_x^i d^{-1} w_{\alpha}^j R_x^j, \quad \varepsilon_{\alpha} = \pm 1. \quad (7)$$

Гамильтоновы операторы (7) подробно рассматривались в работах [3, 4] как естественное обобщение нелокального гамильтонова формализма, предложенного в [5]. Процедура введения нелокального гамильтонова формализма выглядит следующим образом.

1. Для заданной полугамильтоновой системы (1) определяются коэффициенты метрики $ds^2 = \sum g_{ii}(dR^i)^2$ из уравнений (2). Заметим, что эти уравнения задают g_{ii} с точностью до преобразований вида $g_{ii} \rightarrow g_{ii}/\varphi^i(R^i)$, где φ^i является произвольной функцией аргумента R^i . Можно показать, что условия полугамильтоновости равносильны обращению в нуль компонент R_{kkj}^i тензора кривизны метрики ds^2 при $i \neq j \neq k \neq i$.

2. Ищется разложение оставшихся компонент $R_{ij}^{ij} = g^{ii} R_{ij}^j$ тензора кривизны по квадратам решений линейной системы (6):

$$R_{ij}^{ij} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} w_{\alpha}^i w_{\alpha}^j, \quad \varepsilon_{\alpha} = \pm 1. \quad (8)$$

Предположение о существовании разложений вида (8) высказывалось в работах [3, 4] и подтверждается многочисленными примерами. Строгое обоснование формулы (8) и является предметом данной работы. Заметим, что в (8) фактически приходится рассматривать бесконечные суммы $\sum_{\alpha}$ или даже интегралы $\int d\alpha$.

3. Как только разложение (8) найдено, система (1) может быть представлена в гамильтоновой форме (3) с нелокальным гамильтоновым оператором (7). При этом тождества Якоби для оператора (7) сводятся к соотношениям (2), (6), (8). Поскольку метрика ds^2 определяется с произволом в n функций одного аргумента $\varphi^i(R^i)$, всякая полугамильтонова система допускает бесконечное число согласованных нелокальных гамильтоновых структур.

Таким образом, построение нелокального гамильтонова формализма сводится к обоснованию разложений вида (8).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим двухкомпонентную слабонелинейную систему

$$R_t^1 = R^2 R_x^1, \quad R_t^2 = R_x^2 R^1.$$

Соответствующие уравнения (2) принимают форму

$$\partial_2 \ln \sqrt{g_{11}} = \frac{1}{R^1 - R^2}, \quad \partial_1 \ln \sqrt{g_{22}} = \frac{1}{R^2 - R^1},$$

так что

$$g_{11} = \frac{1}{(R^1 - R^2)^2 \varphi^1(R^1)}, \quad g_{22} = \frac{1}{(R^1 - R^2)^2 \varphi^2(R^2)},$$

где $\varphi^i(R^i)$ — две произвольные функции одной переменной. Для системы (8) линейная система (6) может быть явно проинтегрирована:

$$w^1 = \frac{1}{2} \varphi^{1'}(R^1 - R^2) - \frac{1}{2}(\varphi^1 + \varphi^2), \quad w^2 = \frac{1}{2} \varphi^{2'}(R^2 - R^1) - \frac{1}{2}(\varphi^1 + \varphi^2).$$

Прямое вычисление показывает, что при данном выборе коэффициентов метрики g_{11} и g_{22} и коммутирующих потоков w^1, w^2 единственная ненулевая компонента R_{12}^{12} тензора кривизны может быть представлена в виде

$$R_{12}^{12} = w^1 + w^2.$$

Так как

$$w^1 + w^2 = \left(w^1 + \frac{1}{2}\right) \left(w^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(w^1 - \frac{1}{2}\right) \left(w^2 - \frac{1}{2}\right),$$

это разложение имеет искомый вид (8). Оно порождает нелокальный оператор

$$A^{ij} = g^{ii} \delta^{ij} d - g^{ii} \Gamma_{ik}^j u_x^k + w^i R_x^i d^{-1} R_x^j + R_x^i d^{-1} w^j R_x^j,$$

который в матричной форме может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} A = & (R^1 - R^2)^2 \begin{pmatrix} \varphi^1 & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix} d + \\ & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi^{1'}(R^1 - R^2)^2 R_x^1 + \varphi^1(R^1 - R^2)_x^2 & 2(R^1 - R^2)(\varphi^2 R_x^1 + \varphi^1 R_x^2) \\ 2(R^2 - R^1)(\varphi^2 R_x^1 + \varphi^1 R_x^2) & \varphi^{2'}(R^1 - R^2)^2 R_x^2 + \varphi^2(R^1 - R^2)_x^2 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} w^1 R_x^1 d^{-1} R_x^1 + R_x^1 d^{-1} w^1 R_x^1 & w^1 R_x^1 d^{-1} R_x^2 + R_x^1 d^{-1} w^2 R_x^2 \\ w^2 R_x^2 d^{-1} R_x^1 + R_x^2 d^{-1} w^1 R_x^1 & w^2 R_x^2 d^{-1} R_x^2 + R_x^2 d^{-1} w^2 R_x^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, изучаемая система имеет бесконечно много нелокальных гамильтоновых структур с конечными нелокальными хвостами.

ПРИМЕР 2 [3, 4]. Система

$$R_t^i = \left(\sum R^k + 2R^i \right) R_x^i$$

рассматривалась в статье [6] как бездисперсионный предел связанных уравнений Кортевега–де Фриза. Соответствующие уравнения (2) принимают форму

$$\partial_j \ln \sqrt{g_{ii}} = \frac{1}{2(R^j - R^i)}, \quad i \neq j.$$

Следовательно, получаем

$$g_{ii} = \frac{\prod_{k \neq i} (R^k - R^i)}{\varphi^i(R^i)},$$

где $\varphi^i(R^i)$ — n произвольных функций одной переменной. Выбирая $\varphi^i(R^i) = (R^i)^a$, $a = 0, \dots, n$, получаем $(n + 1)$ плоских метрик, порождающих локальные гамильтоновы структуры типа структур Дубровина–Новикова. Оказывается, что в случае произвольных φ^i метрика g_{ii} также порождает нелокальный гамильтонов оператор, но с бесконечным нелокальным “хвостом”. Действительно, система (6) имеет частные решения вида

$$w^i = \left((R^i - \alpha) \sqrt{\prod_{k=1}^n (R^k - \alpha)} \right)^{-1},$$

где $\alpha = \text{const}$. Прямое вычисление вычетов показывает, что тензор кривизны R_{ij}^{ij} метрики g_{ii} может быть представлен в виде

$$R_{ij}^{ij} = \frac{1}{8\pi i} \int_{\gamma_1} w^i w^j \varphi^1(\alpha) d\alpha + \dots + \frac{1}{8\pi i} \int_{\gamma_n} w^i w^j \varphi^n(\alpha) d\alpha,$$

где γ_i — контур в комплексной α -плоскости, окружающий точку $\alpha = R^i$. Нелокальный “хвост”, соответствующий этому разложению, имеет вид

$$\frac{1}{8\pi i} \int_{\gamma_1} w^i R_x^i d^{-1} w^j R_x^j \varphi^1(\alpha) d\alpha + \dots + \frac{1}{8\pi i} \int_{\gamma_n} w^i R_x^i d^{-1} w^j R_x^j \varphi^n(\alpha) d\alpha.$$

2. ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ НА ЯЗЫКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛАМЕ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ВРАЩЕНИЯ

Преобразуем разложение (8) к эквивалентной форме, введя коэффициенты Ламе $H^i = \sqrt{g_{ii}}$ и коэффициенты вращения β_{ij} по формулам

$$\partial_i H^j = \beta_{ij} H^i. \quad (9)$$

Тогда, как несложно проверить,

$$R_{ij}^{ij} = \frac{1}{H^i H^j} \left(\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{k \neq i, j} \beta_{ki} \beta_{kj} \right), \quad w_\alpha^i = \frac{H_\alpha^i}{H^i},$$

В рамках метода $\bar{\partial}$ -одевания эта функция конструируется как решение матричной нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы на комплексной плоскости переменной α с подходящим одеванием ядра (одновременно строятся и соответствующие коэффициенты вращения).

Подстановка (12) в (9) приводит к следующему набору соотношений между коэффициентами β_{ij} , β_{ii} и q_{ij} :

$$\begin{aligned} \partial_j \beta_{ii} &= \beta_{ij} \beta_{ji}, & i \neq j, \\ q_{ij} &= \beta_{ii} \beta_{ij} - \partial_i \beta_{ij}, & i \neq j, \\ \partial_k \beta_{ij} &= \beta_{ik} \beta_{kj}, & i \neq j \neq k. \end{aligned} \quad (13)$$

Дальнейшее использование подстановки (12) в (9) приводит к набору рекуррентных соотношений, позволяющих построить формальную функцию Бейкера–Ахиезера по коэффициентам вращения β_{ij} в виде произведения экспоненциального множителя на формальный ряд по α (с точностью до обращения операторов ∂_i). Таким образом, формальная функция Бейкера–Ахиезера может быть построена без использования конструктивных методов теории солитонов непосредственно по произвольным коэффициентам вращения. Однако коэффициенты ряда Лорана для формальной функции Бейкера–Ахиезера содержат бесконечные суммирования и могут расходиться.

Разложение вектор-функции $\vec{H}_{(i)}(-\alpha)$ на бесконечности имеет вид

$$\vec{H}_{(i)}(-\alpha) = \begin{pmatrix} -\beta_{i1}\alpha^{-1} + q_{i1}\alpha^{-2} + \dots \\ \dots \\ 1 - \beta_{ii}\alpha^{-1} + q_{ii}\alpha^{-2} + \dots \\ \dots \\ -\beta_{in}\alpha^{-1} + q_{in}\alpha^{-2} + \dots \end{pmatrix} \exp(-\alpha R^i). \quad (14)$$

Рассмотрим функцию

$$H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha) + H_{(k)}^j(\alpha) H_{(k)}^i(-\alpha), \quad (15)$$

составленную из компонент вектор-функций $\vec{H}_{(k)}(\alpha)$ и $\vec{H}_{(k)}(-\alpha)$. Пользуясь формулами (12), (14), мы находим разложение (15) в окрестности бесконечности:

$$H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha) + H_{(k)}^j(\alpha) H_{(k)}^i(-\alpha) = \begin{cases} -2\partial_i \beta_{ij} \alpha^{-2} + \dots & \text{при } k = i, \\ -2\partial_j \beta_{ji} \alpha^{-2} + \dots & \text{при } k = j, \\ -2\beta_{ki} \beta_{kj} \alpha^{-2} + \dots & \text{при } k \neq i, j, \end{cases}$$

где многоточием обозначены члены порядка $O(\alpha^{-3})$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{k \neq i, j} \beta_{ki} \beta_{kj} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{Res}_{\infty} \alpha (H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha) + H_{(k)}^j(\alpha) H_{(k)}^i(-\alpha)) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} (-1)^p (\psi_{ik}(p) \psi_{jk}(-p) + \psi_{jk}(p) \psi_{ik}(-p)) \end{aligned} \quad (16)$$

или, если ряд Лорана определяет функцию комплексной переменной α в некоторой окрестности G бесконечности,

$$\begin{aligned} \partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{k \neq i, j} \beta_{ki} \beta_{kj} = \\ = \frac{1}{4\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} \alpha d\alpha (H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha) + H_{(k)}^j(\alpha) H_{(k)}^i(-\alpha)), \end{aligned} \quad (16')$$

где γ обозначает контур в окрестности бесконечности (границу G). Формула (16') тесно связана с известным результатом об интегрируемости уравнений, описывающих n -ортогональные криволинейные системы координат [9]. В силу элементарного тождества

$$\begin{aligned} H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha) + H_{(k)}^j(\alpha) H_{(k)}^i(-\alpha) = \\ = (H_{(k)}^i(\alpha) + H_{(k)}^i(-\alpha))(H_{(k)}^j(\alpha) + H_{(k)}^j(-\alpha)) - \\ - H_{(k)}^i(-\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha) - H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(\alpha) \end{aligned}$$

разложения (16), (16') имеют искомый вид (8) (в разложении (16') волновые функции являются комплексными, поэтому необходимо переписать разложение в терминах вещественных и мнимых частей волновых функций, что не изменит искомую структуру разложения).

4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕЙКЕРА–АХИЕЗЕРА: МЕТОД $\bar{\partial}$ -ОДЕВАНИЯ

Мы приведем краткое изложение хорошо известной схемы метода $\bar{\partial}$ -одевания для уравнений (9), (11) (см. [8]) и обсудим особенности разложения (10) для точно решаемых случаев.

Введем нелокальную матричную $\bar{\partial}$ -проблему с канонической нормировкой

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{\alpha} \chi(\alpha, R) = \iint_{\mathbf{C}} d\alpha' \wedge d\bar{\alpha}' \chi(\alpha', R) \times \\ \times \exp\left(\alpha' \sum_{k=1}^n P^{(k)} R^k\right) K(\alpha, \alpha') \exp\left(-\alpha \sum_{k=1}^n P^{(k)} R^k\right), \\ (\chi(\alpha, R) - 1)_{|\alpha| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\chi(\alpha, R)$ и ядро $K(\alpha, \alpha')$ – матричнозначные $n \times n$ -функции, $P^{(k)}$ – диагональные матрицы с единственным ненулевым элементом (единицей) на месте k , $P_{ij}^{(k)} = \delta_{ik} \delta_{jk}$. Задача (17) сводится к интегральному уравнению.

Мы предполагаем, что ядро $K(\alpha, \alpha')$ равно нулю в некоторой окрестности бесконечности G по переменным α и α' , тогда функция $\chi(\alpha, R)$ аналитична в этой окрестности.

В терминах функции Бейкера–Ахиезера

$$\psi(\alpha, R) = \chi(\alpha, R) \exp\left(\alpha \sum_{k=1}^n P^{(k)} R^k\right)$$

задача (17) принимает вид

$$\bar{\partial}_\alpha \psi(\alpha, R) = \iint_{\mathbf{C}} d\alpha' \wedge d\bar{\alpha}' \psi(\alpha', R) K(\alpha, \alpha'). \quad (18)$$

В соответствии с методом $\bar{\partial}$ -одевания предположение об однозначной разрешимости задачи (17) приводит к линейным уравнениям на функцию χ

$$P^{(j)}(\partial_i \chi(\alpha, R) + \alpha \chi(\alpha, R) P^{(i)}) = P^{(j)} U(R) P^{(i)} \chi(\alpha, R) \quad (19)$$

или в терминах функции ψ –

$$P^{(j)} \partial_i \psi(\alpha, R) = P^{(j)} U(R) P^{(i)} \psi(\alpha, R), \quad (20)$$

где функция $U(R)$ определяется разложением $\chi(\alpha, R)$ по α на бесконечности:

$$\chi(\alpha, R) \rightarrow 1 + \frac{U(R)}{\alpha} + \dots, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Записывая матричное уравнение (20) в компонентах, получаем

$$\partial_i \psi_{jk}(\alpha, R) = U_{ji}(R) \psi_{ik}(\alpha, R). \quad (21)$$

Это уравнение при сопоставлении $H_{(k)}^i = \psi_{ik}$, $\beta_{ij} = U_{ji}$ совпадает с уравнением (9) для компонент матричной функции Бейкера–Ахизера. Разложение (12) следует из определения функции ψ . Таким образом, задача (17) позволяет строить решения уравнений (10) и матричные функции Бейкера–Ахизера (12), зависящие от функционального параметра – ядра $K(\alpha, \alpha')$.

В случае вырожденных ядер

$$K(\alpha, \alpha') = \sum_{k=1}^P f^{(k)}(\alpha') g^{(k)}(\alpha),$$

включающем решения типа солитонных, задача (17) сводится к системе линейных уравнений и решается явно. Разложение (16') в этом случае сильно упрощается. Действительно, перейдем в правой части (16') от интегрирования по контуру к интегрированию по области, дополнительной к G (для простоты мы выпишем только один член), и воспользуемся уравнением (18):

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} (H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha)) \alpha d\alpha = \\ &= \iint_{\mathbf{C} \setminus \bar{G}} \alpha d\alpha \wedge d\bar{\alpha} \bar{\partial}_\alpha (H_{(k)}^i(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha)) = \\ &= \sum_{p=1}^n \iint_{\mathbf{C}} \alpha d\alpha \wedge d\bar{\alpha} \iint_{\mathbf{C}} d\alpha' \wedge d\bar{\alpha}' (H_{(p)}^i(\alpha', R) K_{pk}(\alpha, \alpha') H_{(k)}^j(-\alpha) + \\ & \quad + H_{(p)}^j(\alpha', R) K_{pk}(\alpha, \alpha') H_{(k)}^i(-\alpha)). \end{aligned}$$

В случае вырожденных ядер получаем, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^n \iint_{\mathbf{C}} \alpha d\alpha \wedge d\bar{\alpha} \iint_{\mathbf{C}} d\alpha' \wedge d\bar{\alpha}' (H_{(p)}^j(\alpha', R) K_{pk}(\alpha, \alpha') H_{(k)}^j(-\alpha) + \\
& \quad + H_{(p)}^j(\alpha', R) K_{pk}(\alpha, \alpha') H_{(k)}^i(-\alpha)) = \\
& = \sum_{r=1}^P \sum_{q=1}^n \left\{ \iint_{\mathbf{C}} \alpha d\alpha \wedge d\bar{\alpha} g_{qk}^{(r)}(\alpha) H_{(k)}^j(-\alpha) \times \right. \\
& \quad \times \sum_{p=1}^n \iint_{\mathbf{C}} d\alpha' \wedge d\bar{\alpha}' H_{(p)}^i(\alpha', R) f_{pq}^{(r)}(\alpha') + \\
& \quad + \iint_{\mathbf{C}} \alpha d\alpha \wedge d\bar{\alpha} g_{qk}^{(r)}(\alpha) H_{(k)}^i(-\alpha) \times \\
& \quad \times \sum_{p=1}^n \iint_{\mathbf{C}} d\alpha' \wedge d\bar{\alpha}' H_{(p)}^j(\alpha', R) f_{pq}^{(r)}(\alpha') \Big\} = \\
& = \sum_{r=1}^P \sum_{q=1}^n (\tilde{H}_{rq}'^i \times \tilde{H}_{rq}''^j + \tilde{H}_{rq}'^j \times \tilde{H}_{rq}''^i),
\end{aligned}$$

где $\tilde{H}_{rq}'^i$, $\tilde{H}_{rq}''^i$ представляют собой два различных набора волновых функций уравнений (9). Используя элементарное тождество, которое применялось для разложения (16), приходим к выводу, что в случае вырожденных ядер имеется разложение типа (10) в виде конечной суммы.

Список литературы

- [1] С. П. Царев. ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 5. С. 534–537.
- [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
- [3] Е. В. Ферапонтов. Функци. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. Вып. 3. С. 37–49.
- [4] E. V. Ferapontov. Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1995. V. 170. P. 33–58.
- [5] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов. УМН. 1990. Т. 45. Вып. 3. С. 191–192.
- [6] E. V. Ferapontov, M. V. Pavlov. Physica D. 1991. V. 52. P. 211–219.
- [7] С. П. Царев. Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048–1068.
- [8] С. В. Манаков, В. Е. Захаров. Функци. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. Вып. 2. С. 11–25.
- [9] V. E. Zakharov. Description of the n -orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian Integrable Systems of Hydrodynamic Type: Part 1. Integration of the Lamé equations. Preprint ИТЕР, 1997. P. 1–42.

Поступила в редакцию 19.III.1998 г.