Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, С. Е. Воробьева, М. В. Компаниец, Представление несингулярными интегралами β -функции и аномальных размерностей в моделях критической динамики, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:08:40

© 2015 г.

Л. Ц. Аджемян*, С. Е. Воробьева*,
М. В. Компаниец*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕСИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ β -ФУНКЦИИ И АНОМАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ В МОДЕЛЯХ КРИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Предложен способ вычисления β -функции и аномальных размерностей в моделях критической динамики, удобный для численных расчетов в рамках ренормгруппы и ε -разложения. Эти величины выражены через ренормированные функции Грина, ренормировка которых проведена с помощью R -операции, представленной в форме, позволяющей в явном виде произвести сокращение ультрафиолетовых расходимостей в диаграммах Фейнмана. Необходимые для расчета интегралы не содержат полюсов по ε и удобны для проведения численного интегрирования.

Ключевые слова: ренормализационная группа, ε -разложение, многопетлевые диаграммы, критические показатели.

DOI: 10.4213/tmf8911

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод ренормализационной группы (РГ) и ε -разложения является в настоящее время основным инструментом изучения как статических, так и динамических критических явлений [1]. Для статических критических показателей в настоящее время известны аналитические ответы вплоть до высоких порядков теории возмущений (вплоть до 5-го порядка ε -разложения в модели ϕ^4 , см., например, работы [2]). Аналитические расчеты в моделях критической динамики значительно менее развиты, они ограничиваются, как правило, первым порядком теории возмущений, лишь в отдельных случаях имеются результаты в более высоких порядках – во втором порядке в теории перколяции [3], в третьем порядке в A -модели [4]. Известны также численные результаты во втором порядке в H -модели [5] и теории турбулентности [6].

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: loran.adzhemyan@gmail.com

В работах [7], [8] предложен подход, позволяющий сводить вычисление β -функции и аномальных размерностей в моделях критической статистики к расчету интегралов, не содержащих сингулярностей по ε , и потому удобных для численного интегрирования. В работе [9] это позволило впервые провести полностью независимую проверку аналитических пятипетлевых результатов [2]. В настоящей работе такой подход обобщается на модели критической динамики. Рассмотрение проводится на примере A -модели.

2. РЕНОРМИРОВКА МОДЕЛИ

Рассмотрим A -модель критической динамики в пространстве размерности $d = 4 - \varepsilon$. Неренормированное действие этой модели определяется набором $\phi_0 \equiv \{\psi_0, \psi'_0\}$ двух полей и имеет вид [1]

$$\begin{aligned} S_0(\phi_0) &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 \left[-\partial_t \psi_0 + \lambda_0 \frac{\delta S_0^{\text{st}}}{\delta \psi_0} \right] = \\ &= \lambda_0 \psi'_0 \psi'_0 + \psi'_0 \left[\partial_t \psi_0 + \lambda_0 \left(\partial^2 \psi_0 - \tau_0 \psi_0 - \frac{1}{3!} g_0 \psi_0^3 \right) \right] \end{aligned}$$

с неренормированным статическим действием

$$S_0^{\text{st}}(\phi_0) = -\frac{(\partial \psi_0)^2}{2} - \frac{\tau_0 \psi_0^2}{2} - \frac{1}{4!} g_0 \psi_0^4.$$

Ренормированное действие дается выражением [1]

$$S_R = Z_1 \lambda \psi' \psi' + \psi' \left[-Z_2 \partial_t \psi + \lambda \left(Z_3 \triangle \psi - Z_4 \tau \psi - \frac{1}{3!} Z_5 \mu^\varepsilon g \psi^3 \right) \right],$$

оно получается из исходного мультипликативной ренормировкой параметров и полей

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad \psi_0 = \psi Z_\psi, \quad \psi'_0 = \psi' Z_{\psi'}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_\lambda Z_{\psi'}^2, & Z_2 &= Z_{\psi'} Z_\psi, & Z_3 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\psi, \\ Z_4 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_\tau Z_\psi, & Z_5 &= Z_{\psi'} Z_\lambda Z_g Z_\psi^3. \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны, ренормированное действие может быть представлено в виде суммы базового действия S_B и контрчленов ΔS :

$$S_R = S_B + \Delta S, \quad (3)$$

где базовое действие имеет вид

$$S_B = \lambda \psi' \psi' + \psi' \left[-\partial_t \psi + \lambda \left(\triangle \psi - \tau \psi - \frac{1}{3!} \mu^\varepsilon g \psi^3 \right) \right]. \quad (4)$$

Введем обозначение для 1-неприводимой функции Грина базовой теории (4):

$$\Gamma_{(n_1, n_2)} \equiv \langle \underbrace{\psi \dots \psi}_{n_1} \underbrace{\psi' \dots \psi'}_{n_2} \rangle_{1\text{-непр.}}$$

Поверхностные ультрафиолетовые (УФ) расходимости при $\varepsilon = 0$ присутствуют в диаграммах 1-неприводимых функций $\Gamma_{(0,2)}$, $\Gamma_{(3,1)}$, имеющих логарифмическую расходимость, и в квадратично-расходящихся диаграммах функции $\Gamma_{(1,1)}$. Будем называть 1-неприводимые подграфы, которые имеют поверхностную УФ-расходимость, существенными. Очевидно, данные подграфы совпадают с диаграммами 1-неприводимых функций $\Gamma_{(0,2)}$, $\Gamma_{(3,1)}$ и $\Gamma_{(1,1)}$.

Учет контрчленов в (3) можно заменить действием R -операции на диаграммы базовой теории (4) [1] и записать ренормированные функции $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ в виде

$$\Gamma_{(n_1, n_2)}^R = R\Gamma_{(n_1, n_2)} = (1 - K)R'\Gamma_{(n_1, n_2)},$$

где операция R' устраняет расходимости в существенных подграфах диаграммы, а $(1 - K)$ – остающуюся поверхностную расходимость. Конкретная схема ренормировки определяется заданием операции K отбора расходящихся частей 1-неприводимых диаграмм.

Как и в статье [6], выберем схему ренормировки, аналогичную схеме вычитаний на нулевых импульсах (и частотах), с дополнительным условием $\mu^2 = \tau$. Конкретизировать такой выбор удобно с помощью следующих нормированных функций (на нулевых частотах и импульсах):

$$\bar{\Gamma}_1 = \frac{\Gamma_{(0,2)}}{2\lambda} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (5)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \partial_{i\omega} \Gamma_{(1,1)} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (6)$$

$$\bar{\Gamma}_3 = -\frac{1}{2} \partial_p^2 \frac{\Gamma_{(1,1)}}{\lambda} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (7)$$

$$\bar{\Gamma}_4 = -\frac{\Gamma_{(1,1)} - \Gamma_{(1,1)}|_{\tau=0}}{\lambda\tau} \Big|_{p=0, \omega=0}, \quad (8)$$

$$\bar{\Gamma}_5 = -\frac{\Gamma_{(3,1)}}{\lambda g \mu^\varepsilon} \Big|_{p=0, \omega=0}. \quad (9)$$

Константы ренормировки определим из требований

$$\bar{\Gamma}_i|_{\mu^2=\tau} = 1, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (10)$$

Эти условия означают, что в точке нормировки контрчлены полностью сокращают диаграммные вклады в ренормированные аналоги функций $\bar{\Gamma}_i$.

Константам ренормировки Z_i , определяющимся условиями (10), соответствует операция K отбора расходящихся частей диаграмм:

$$K\Gamma_{(0,2)} = \Gamma_{(0,2)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}, \quad K\Gamma_{(3,1)} = \Gamma_{(3,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} K\Gamma_{(1,1)} = & \left[\Gamma_{(1,1)}|_{\tau=0} + \frac{\tau}{\mu^2} (\Gamma_{(1,1)}|_{\mu^2=\tau} - \Gamma_{(1,1)}|_{\tau=0}) \right]_{p=0, \omega=0} + \\ & + p^2 \partial_p^2 \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} + i\omega \partial_{i\omega} \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

При $\mu^2 = \tau$ операция (12) упрощается,

$$K\Gamma_{(1,1)}|_{\mu^2=\tau} = \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} + p^2 \partial_{p^2} \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} + i\omega \partial_{i\omega} \Gamma_{(1,1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}, \quad (13)$$

так что при $\mu^2 = \tau$ все три операции в (11) и (13) сводятся к вычитанию на нулевых импульсах и частотах при $\mu^2 = \tau$.

Полную R -операцию можно записать в виде [9]

$$R\Gamma = \prod_i (1 - K_i)\Gamma, \quad (14)$$

где произведение берется по всем существенным (имеющим поверхностную расходимость) подграфам диаграмм, входящих в Γ , и диаграммам в целом (если у них есть поверхностная расходимость).

3. УРАВНЕНИЯ РГ

В используемой схеме ренормировки константы ренормировки зависят, как и в схеме минимальных вычитаний (МВ), только от константы связи и от размерности пространства, поэтому уравнения ренормгруппы для 1-неприводимых функций $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ можно получить аналогично тому, как это делается в монографии [1] для схемы МВ. Введем обозначения

$$e_0 = \{g_0, m_0, \lambda_0, \mu\}, \quad e = \{g, m, \lambda, \mu\}$$

для набора затравочных и ренормированных параметров. Для удобства мы включили в первый из них ренормировочную массу μ , от которой затравочное действие не зависит. Формулы ренормировки для 1-неприводимых функций $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ имеют вид

$$\Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)}(e_0) = Z_\psi^{-n_1} Z_{\psi'}^{-n_2} \Gamma_{(n_1, n_2)}^R(e). \quad (15)$$

Уравнения РГ для $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ получаются из условия независимости $\Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)}(e_0)$ от μ :

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)} = 0,$$

где $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \partial_\mu|_{m_0, g_0, \lambda_0}$. Для ренормированных функций $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ отсюда с учетом (15) получаем

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu [\ln \Gamma_{(n_1, n_2)}^R - n_1 \ln Z_\psi - n_2 \ln Z_{\psi'}] = 0,$$

таким образом, положив

$$\gamma_\phi \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\phi, \quad (16)$$

находим

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu \Gamma_{(n_1, n_2)}^R = (n_1 \gamma_\psi + n_2 \gamma_{\psi'}) \Gamma_{(n_1, n_2)}^R.$$

Переходя в этом выражении к дифференцированию по ренормированным переменным e с помощью равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu)_{g_0, m_0, \lambda_0} &= (\mathcal{D}_\mu)_{g, m, \lambda} + (\mathcal{D}_\mu g)_{g_0, m_0, \lambda_0} \partial_g + \\ &\quad + (\mathcal{D}_\mu \tau)_{g_0, m_0, \lambda_0} \partial_\tau + (\mathcal{D}_\mu \lambda)_{g_0, m_0, \lambda_0} \partial_\lambda, \end{aligned}$$

имеем

$$(\mathcal{D}_\mu + (\tilde{\mathcal{D}}_\mu g)\partial_g + (\tilde{\mathcal{D}}_\mu \tau)\partial_\tau + (\tilde{\mathcal{D}}_\mu \lambda)\partial_\lambda)\Gamma_{(n_1, n_2)}^R = (n_1\gamma_\psi + n_2\gamma_{\psi'})\Gamma_{(n_1, n_2)}^R. \quad (17)$$

Вводя с учетом (1) РГ-функции

$$\gamma_\tau \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\tau, \quad \gamma_\lambda \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_\lambda, \quad \gamma_g \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_g, \quad \beta \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = -g(\varepsilon + \gamma_g), \quad (18)$$

получаем из (17) искомое уравнение ренормгруппы:

$$(\mathcal{D}_\mu + \beta\partial_g - \gamma_\tau\mathcal{D}_\tau - \gamma_\lambda\mathcal{D}_\lambda)\Gamma_{(n_1, n_2)}^R = (n_1\gamma_\psi + n_2\gamma_{\psi'})\Gamma_{(n_1, n_2)}^R, \quad (19)$$

где $\mathcal{D}_\mu \equiv \mu\partial_\mu|_{\tau, \lambda, g}$, $\mathcal{D}_\tau \equiv \tau\partial_\tau|_{\lambda, \mu, g}$, $\mathcal{D}_\lambda \equiv \lambda\partial_\lambda|_{\tau, \mu, g}$.

Уравнения (19) позволяют обосновать критический скейлинг: условие $\beta(g_*) = 0$ определяет значение заряда g_* в неподвижной точке. Для устойчивой неподвижной точки подстановка $g = g_*$ в уравнения (19) превращает их в уравнения Эйлера для однородных функций, а величины $\gamma_\tau^* \equiv \gamma_\tau(g_*)$ и $\gamma_\phi^* \equiv \gamma_\phi(g_*)$ определяют критические показатели соответствующих величин. Необходимые для расчета этих показателей РГ-функции β и γ_i находят обычно по теории возмущений, вычисляя константы ренормировки. Как следует из (18), РГ-функции выражаются через них с помощью соотношений

$$\beta(g) = -\varepsilon \frac{g}{1 + g\partial_g \ln Z_g}, \quad \gamma_i(g) = -\varepsilon \frac{g\partial_g \ln Z_i}{1 + g\partial_g \ln Z_g}. \quad (20)$$

Теория ренормировок гарантирует, что РГ-функции (20) УФ-конечны: полюсы по ε в правых частях этих соотношений сокращаются. Однако сингулярный характер констант ренормировки весьма затрудняет их определение численными методами. Отсутствие полюсов в РГ-функциях (20) можно показать, используя уравнения (19): ренормированные функции $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$ УФ-конечны по построению [1]. Выбрав достаточное число уравнений из (19), можно выразить через них РГ-функции, что и доказывает конечность последних. Мы используем этот прием для численного расчета РГ-функций через $\Gamma_{(n_1, n_2)}^R$, точнее, через ренормированные аналоги функций $\bar{\Gamma}_i$ из (5)–(9):

$$\bar{\Gamma}_i^R = R\bar{\Gamma}_i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Уравнения для $\bar{\Gamma}_1^R$, $\bar{\Gamma}_4^R$, $\bar{\Gamma}_5^R$ непосредственно получаются из (19) подстановкой их определений (5), (8), (9), а для $\bar{\Gamma}_3^R$, $\bar{\Gamma}_4^R$ – действием на соответствующие уравнения из (19) операциями $\partial_p^2(\cdot)|_{p=0, \omega=0}$ и $\partial_i\omega(\cdot)|_{p=0, \omega=0}$ с использованием коммутативности этих операций и R -операции. Учитывая вытекающие из (2) и (16) связи между РГ-функциями

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_\lambda + 2\gamma_{\psi'}, & \gamma_2 &= \gamma_\psi + \gamma_{\psi'}, & \gamma_3 &= \gamma_\lambda + \gamma_{\psi'} + \gamma_\psi, \\ \gamma_4 &= \gamma_\lambda + \gamma_\tau + \gamma_{\psi'} + \gamma_\psi, & \gamma_5 &= \gamma_\lambda + \gamma_g + \gamma_{\psi'} + 3\gamma_\psi, \end{aligned} \quad (21)$$

получаем

$$(\mu\partial_\mu + \beta\partial_g - \gamma_\tau\mathcal{D}_\tau - \gamma_i)\bar{\Gamma}_i^R = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (22)$$

Безразмерные величины $\bar{\Gamma}_i^R$ зависят только от безразмерного отношения $\tilde{\tau} = \tau/\mu^2$, т. е. $\bar{\Gamma}_i^R(\tau, \mu, \lambda) = \bar{\Gamma}_i^R(\tilde{\tau})$. С учетом этого факта уравнения (22) можно записать в виде

$$(\beta\partial_g - (2 + \gamma_\tau)\tilde{\tau}\partial_{\tilde{\tau}} - \gamma_i)\bar{\Gamma}_i^R = 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \tilde{\tau} \equiv \frac{\tau}{\mu^2}.$$

Переходя в этих уравнениях к точке нормировки $\tilde{\tau} = 1$ и учитывая условие (10), получаем

$$(2 + \gamma_\tau)F_i = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (23)$$

где

$$F_i \equiv \hat{\partial}_{\tilde{\tau}} \bar{\Gamma}_i^R, \quad \hat{\partial}_{\tilde{\tau}}(\cdot) \equiv -\partial_{\tilde{\tau}}(\cdot)|_{\tilde{\tau}=1}. \quad (24)$$

Подставляя в уравнения (23) вытекающее из (21) соотношение $\gamma_\tau = \gamma_4 - \gamma_3$, получим уравнения

$$(2 + \gamma_4 - \gamma_3)F_i = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Решая эти уравнения для случаев $i = 3, 4$ относительно γ_3 и γ_4 , а затем решая оставшиеся уравнения относительно γ_1 , γ_2 и γ_5 , находим

$$\gamma_i = \frac{2F_i}{1 + F_3 - F_4}, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (25)$$

Эти равенства дают выражения для РГ-функции через ренормированные 1-неприводимые функции F_i . Однако, как и в статическом случае [6], [7], данные функции неудобны для вычислений, более удобными для расчета являются функции

$$f_i = R \hat{\partial}_{\tilde{\tau}} \bar{\Gamma}_i; \quad (26)$$

в этих функциях R -операция действует на продифференцированные диаграммы, в которых уже положено $\mu^2 = \tau$ ($\tilde{\tau} = 1$), поэтому операция K имеет простой вид (13). В то же время для функций F_i из (23) необходимо сначала продифференцировать ренормированную диаграмму, в которой операция K дается выражением (12), и лишь затем перейти в точку нормировки $\mu^2 = \tau$. Мы покажем ниже, что величины F_i и f_i связаны простыми соотношениями

$$F_i = (1 - F_4)f_i, \quad i = 1, 2, 3, 5. \quad (27)$$

Записывая уравнения (25) в виде

$$\gamma_i = \frac{2F_i/(1 - F_4)}{1 + F_3/(1 - F_4)}$$

и подставляя в них $f_i = F_i/(1 - F_4)$ из (27), приходим к соотношениям

$$\gamma_i = \frac{2f_i}{1 + f_3}, \quad i = 1, 2, 3, 5, \quad (28)$$

с помощью которых и будут производиться дальнейшие расчеты РГ-функций.

Используя соотношения (28) и (21), получаем формулы для вычисления остальных РГ-функций:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= \frac{2(f_3 - f_2)}{1 + f_3}, & \gamma_\psi &= \frac{f_2 - f_1 + f_3}{1 + f_3}, \\ \gamma_{\psi'} &= \frac{f_1 - f_3 + f_2}{1 + f_3}, & \gamma_g &= \frac{2(f_5 - 2f_3 - f_2 + f_1)}{1 + f_3}. \end{aligned}$$

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ R-ОПЕРАЦИИ

Величины f_i вычисляются в точке нормировки $\mu^2 = \tau$, операция вычитания $1 - K$ в формуле (14) для них сводится к вычитанию начального отрезка ряда по импульсу и частоте. Для логарифмических подграфов имеем

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \Gamma(p^2, \omega) - \Gamma|_{p=0, \omega=0},$$

а для квадратичных имеем

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \Gamma(p^2, \omega) - \Gamma|_{p=0, \omega=0} - p^2 \partial_{p^2} \Gamma|_{p=0, \omega=0} - i\omega \partial_{i\omega} \Gamma|_{p=0, \omega=0}.$$

В обоих случаях операцию вычитания можно записать в виде остаточного члена ряда Тейлора в интегральной форме: для логарифмических подграфов

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \int_0^1 da \partial_a \Gamma(ap^2, a\omega), \quad (29)$$

для квадратичных

$$(1 - K)\Gamma(p^2, \omega) = \int_0^1 da (1 - a) \partial_a^2 \Gamma(ap^2, a\omega). \quad (30)$$

Действие операции R на диаграмму χ с учетом соотношений (29), (30) можно записать в виде [9]

$$R\chi = \prod_i \int_0^1 da_i (1 - a_i)^{n_i} \partial_{a_i}^{n_i+1} \chi(\{a\}), \quad (31)$$

где произведение берется по всем существенным подграфам $\chi^{(i)}$ (включая диаграмму χ как целое), a_i – параметр растяжения внутри i -го подграфа импульсов и частот, втекающих в этот подграф, $n_i = 0$ для логарифмических подграфов и $n_i = 1$ для квадратичных. Преимущество такой записи ренормированных величин состоит в том, что ответ представляется в виде интегралов, конечных при $\epsilon = 0$, причем в форме, в которой не происходит сокращения больших вкладов в подынтегральном выражении (“теория без расхождений”).

5. РЕНОРМИРОВКА ВЕЛИЧИН f_i И ИХ СВЯЗЬ С F_i

Докажем соотношение (27). Рассмотрим с этой целью процедуру ренормировки в соотношении (26). Операция $-\partial_\tau$, действуя на диаграммы базовой теории, сводится к сумме вставок во всевозможные линии составного оператора $\psi\psi' \equiv \Psi$. Вставка такого оператора улучшает УФ-сходимость диаграмм, она порождает также новый тип расходящихся подграфов. Обозначим через $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}$ 1-неприводимую функцию, получающуюся вставкой одного оператора Ψ в $\Gamma_{(n_1, n_2)}$, тогда

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)} = \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}. \quad (32)$$

Среди величин $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}$ поверхностная расходимость (логарифмическая) остается только у $\Gamma_{(1, 1; 1)}$. Соответствующие подграфы принадлежат, таким образом, классу существенных, и их надо учитывать в R -операции (14), принимая во внимание, что

$$K\Gamma_{(1, 1; 1)} = \Gamma_{(1, 1; 1)}|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau}. \quad (33)$$

Как и для величин $\bar{\Gamma}_i$, вычитания с K , взятым из (33), приводят к тому, что в точке нормировки $p = 0$, $\omega = 0$, $\mu^2 = \tau$ все диаграммные вклады в $\Gamma_{(1,1;1)}^R$ в ренормированной функции сокращаются контрчленами, и остается только беспетлевой вклад. С учетом того что такой вклад в $\Gamma_{(1,1)}$ равен $-p^2 - \tau$, соответствующий вклад в $\Gamma_{(1,1;1)} = -\partial_\tau \Gamma_{(1,1)}$ равен единице. Поэтому

$$\Gamma_{(1,1;1)}^R \Big|_{p=0, \omega=0, \mu^2=\tau} = 1. \quad (34)$$

Для неренормированных функций соотношение, аналогичное (32), имеет вид

$$-\partial_{\tau_0} \Gamma_{(n_1, n_2)}^{(0)}(e_0, p) = \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)}(e_0, p), \quad (35)$$

где $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)}$ – 1-неприводимая функция со вставкой одного оператора $\psi_0 \psi'_0 \equiv \Psi_0$. Перейдем в (35) к ренормированным величинам. Ренормировка составного оператора Ψ определяется равенством $\Psi = Z_\Psi \Psi^R$, с учетом этого ренормировка функции $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)}$ записывается в виде

$$\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^{(0)} = Z_\psi^{1-n_1} Z_{\psi'}^{1-n_2} Z_\Psi \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R. \quad (36)$$

Выразим операцию ∂_{τ_0} в левой части (35) в терминах ренормированных переменных. В силу соотношений (1) фиксация переменных g_0 , μ , λ_0 означает также фиксацию g , μ , λ . Таким образом,

$$(\partial_{\tau_0})_{g_0, \mu, \lambda_0} = Z_\tau^{-1} (\partial_\tau)_{g, \mu, \lambda}.$$

Подставляя это равенство в (35) и используя формулы ренормировки (15), (36), получаем

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}^R(e, p) = Z_\psi Z_{\psi'} Z_\tau Z_\Psi \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R(e, p)$$

или, используя (2),

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}^R(e, p) = \frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R(e, p). \quad (37)$$

Учет констант ренормировки при построении функции $\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R$ также можно заменить действием R -операции на диаграммы базовой теории [1]:

$$\Gamma_{(n_1, n_2; 1)}^R = R \Gamma_{(n_1, n_2; 1)}. \quad (38)$$

Подставляя соотношения (38), (32) в (37), находим

$$-\partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}^R = -\frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi R \partial_\tau \Gamma_{(n_1, n_2)}.$$

Переписывая эти равенства для нормированных функций $\bar{\Gamma}_i$, заданных в (5)–(9), учитывая формулы (24), (26), (34) и полагая $\mu^2 = \tau$, получаем

$$1 - F_4 = \frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi \quad (39)$$

и

$$F_i = \frac{Z_4}{Z_\lambda} Z_\Psi f_i, \quad i = 1, 2, 3, 5.$$

Подставляя в эти выражения величину $(Z_4/Z_\lambda) Z_\Psi$ из (39), приходим к искомому равенству (27).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведено обобщение результатов, полученных в работах [5] и [6] для моделей критической статистики, на динамические модели. В работе [5] соотношение вида (28) в модели ϕ^3 было угадано и проверено в четырехпетлевом приближении, в статье [6] это соотношение было доказано в произвольном порядке теории возмущений. Приведенное в настоящей работе доказательство соотношения (28) заметно короче, чем в [6]. Это связано с тем, что в нем используется информация о возможности обобщения процедуры ренормировки на случай расширенной теории с учетом составных операторов [10], а также ее формулировки в терминах R -операции [1].

Соотношения (26), (28), (31) позволяют вычислять РГ-функции β и γ_i непосредственно по диаграммам для $\Gamma_{(2,0)}$, $\Gamma_{(1,1)}$ и $\Gamma_{(3,1)}$ в форме, не содержащей полюсов по ε . Эффективность такого подхода была проверена путем численного расчета критических показателей в трехпетлевом приближении. Результат с большой точностью совпал с аналитическим ответом, приведенным в [1], [4]. Были рассчитаны также критические показатели в другой модели критического поведения – теории перколяции, в которой в настоящее время известен аналитический ответ во втором порядке ε -разложения [2]. В этом случае также имело место хорошее совпадение численных результатов с аналитическими. Предложенный способ может использоваться в старших порядках теории возмущений.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.185.2014).

Список литературы

- [1] А. Н. Васильев, *Квантовополевого ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [2] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, F. V. Tkachev, *Phys. Lett. B*, **99**:2 (1981), 147–150; Erratum **101**:1 (1981), 457–458; K. G. Chetyrkin, S. G. Gorishny, S. A. Larin, F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B*, **132**:4–6 (1983), 351–354; *Preprint P-0453*, INR, Moscow, 1986; D. I. Kazakov, *Phys. Lett. B*, **133**:6 (1983), 406–410; Д. И. Казаков, *ТМФ*, **58**:3 (1984), 343–353; H. Kleinert, J. Neu, V. Shulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin, *Phys. Lett. B*, **272**:1–2 (1991), 39–44; Erratum **319**:4 (1993), 545.
- [3] H.-K. Janssen, U. C. Täuber, *Ann. Phys.*, **315**:1 (2005), 147–192, arXiv:cond-mat/0409670.
- [4] Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, *ТМФ*, **60**:1 (1984), 59–71.
- [5] Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. С. Кабриц, М. В. Компаниец, *ТМФ*, **119**:1 (1999), 73–92.
- [6] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, M. V. Kompaniets, A. N. Vasil'ev, *Internat. J. Modern Phys. B*, **17**:10 (2003), 2137–2170.
- [7] Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 100–111.
- [8] Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, С. В. Новиков, В. К. Сазонов, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 325–336.
- [9] L. Ts. Adzhemyan, M. V. Kompaniets, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **523** (2014), 012049, arXiv:1309.5621.
- [10] О. И. Завьялов, *Перенормированные диаграммы Фейнмана*, Наука, М., 1979.
- [11] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, International Series of Monographs on Physics, **77**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1989.