Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андрианов, С. С. Колеватов, Р. Солдаты, Алгебра функциональных сжатых операторов в электродинамике Максвелла–Черна–Саймонса, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 367–379

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8913>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:13:16

© 2015 г. А. А. Андрианов*, С. С. Колеватов*, Р. Солдати†

АЛГЕБРА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СЖАТЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ МАКСВЕЛЛА–ЧЕРНА–САЙМОНСА

С помощью сжатых операторов уничтожения и рождения построен базис эрмитовых генераторов, подчиняющийся алгебре Ли $SU(2)$. Обсуждаются соотношения между вакуумом электродинамики Максвелла–Черна–Саймонса и обычным вакуумом и показано, что самые общие преобразования Боголюбова представляют из себя не что иное, как функциональное вращение в пространстве Фока.

Ключевые слова: электродинамика Максвелла–Черна–Саймонса, сжатые состояния, преобразования Боголюбова.

DOI: 10.4213/tmf8913

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий пределы применимости фундаментальных законов физики привлекают все больше и больше внимания вследствие значительных успешных экспериментальных усовершенствований как в лабораторных исследованиях, так и в астрофизике. В квантовой электродинамике интерес к возможному нарушению лоренц-симметрии и CPT -четности возрос после выхода работы [1], где электродинамика была дополнена лагранжианом Черна–Саймонса, нарушающим четность и ориентированным вдоль постоянного вектора Черна–Саймонса. Позже обсуждались различные аспекты его проявления [2]–[6], однако они до сих пор не выявлены [7]–[9]. В частности, спонтанное нарушение лоренц-симметрии может возникать после конденсации аксионоподобных полей [2], [7]–[11].

Холодные реликтовые аксионы, возникшие из-за вакуумного смещения [12], [13] в ранней Вселенной, являются популярным кандидатом на роль темной материи. Если мы предположим, что аксионы являются единственным вкладом в плотность

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: sashaandrianov@gmail.com, kss2005@list.ru

†Dipartimento di Fisica, Universit'a di Bologna, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Bologna, Bologna, Italia. E-mail: soldati@bo.infn.it

вещества Вселенной, кроме обычной барионной материи, их плотность должна быть [14] порядка

$$\rho \simeq 10^{-30} \text{ г см}^{-3} \simeq 10^{-46} \text{ ГэВ}^4. \quad (1)$$

Конечно, темная материя распределена неравномерно, ее распределение приблизительно такое же, как и у видимого вещества (может быть, лучше сказать, что видимая материя распределяется примерно так же, как темная материя).

В течение последнего десятилетия в нескольких экспериментах по столкновению тяжелых ионов был обнаружен аномальный выход лептонных пар с инвариантной массой $< 1 \text{ ГэВ}$ в области малых быстрот и среднего поперечного углового момента (см. обзоры в [15], [16]). Это явление заметно только при центральных или почти центральных столкновениях. Большинство исследователей ссылаются на электрон-позитронные пары, однако димюонные пары также рождаются при выходе за димюонный порог.

Объяснение этого усиления дается в работе [17]. Мы предполагаем, что эффект может быть проявлением локального нарушения четности в столкновении ядер благодаря образованию псевдоскаляра, изосинглета или нейтрального изотриплета, величина которого зависит от динамики столкновения. Не так давно возможность образования изотриплетного псевдоскалярного конденсата при больших барионных плотностях была обоснована в [18]. В работах [19] было сделано предположение о том, что для периферийных взаимодействий должен появляться дополнительный эффект, а именно изосинглетный псевдоскалярный фон может возникнуть в результате масштабных флуктуаций топологического заряда, приводящих к так называемому киральному магнитному эффекту, исследованному на решеточных симуляторах КХД [20] и, судя по всему, обнаруженному в эксперименте STAR на RHIC [21]. Этот эффект также может быть связан с псевдоскалярными доменными стенками [22].

2. МАССИВНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ В ПСЕВДОСКАЛЯРНОМ ФОНЕ

Начнем с лагранжиана Штюкельберга, который описывает распространение абелева массивного векторного поля в присутствии псевдоскалярного (аксиноподобного) фона, а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}(x)F_{\alpha\beta}(x) - \frac{1}{4}gF^{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}(x)\frac{a_{cl}(x)}{M} + \\ & + \frac{1}{2}m^2A_\nu(x)A^\nu(x) + A^\mu(x)\partial_\mu B(x) + \frac{1}{2}\varkappa B^2(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где A^μ и a_{cl} – векторное и псевдоскалярное поля соответственно, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/2$ – дуальная напряженность поля, а B – вспомогательное скалярное поле Штюкельберга с $\varkappa \in \mathbb{R}$. Положительная безразмерная константа взаимодействия $g > 0$ и (большой) массовый параметр $M \gg m$ определяют интенсивность и дальность псевдоскаляр-векторного взаимодействия. Отметим, что мы включили массовый член Прока для векторного поля потому, что это необходимо для учета эффектов сильных взаимодействий в столкновении тяжелых ионов при образовании векторных мезонов $(\rho, \omega, \dots)$ помимо фотонов. Более того, как было тщательно доказано

в [23], массовый член для векторного поля необходим для обеспечения непротиворечивости динамики в случае лагранжиана Черна–Саймонса и появляется из радиационных поправок в фермионной части лагранжиана. Вспомогательный лагранжиан Штюкельберга, который вместе с массовым членом нарушает калибровочную инвариантность для векторного поля, был введен для обеспечения (с использованием приема Штюкельберга) одновременно перенормируемости и пертурбативной унитарности для всей теории взаимодействия. Более того, наличие этого члена делает гладким переход к безмассовому пределу в квантованном векторном поле.

В настоящей работе мы рассматриваем медленно меняющееся классическое псевдоскалярное поле вида

$$a_{cl}(x) = \frac{M}{g} \zeta_\lambda x^\lambda \theta(-\zeta \cdot x), \quad (3)$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда, в которой аргументом является постоянный четырехвектор ζ^μ с размерностью массы. При нашем выборе псевдоскалярного поля лоренц-симметрия и CPT -инвариантность нарушены в полупространстве Минковского, $\zeta \cdot x < 0$.

Если мы подставим форму (3) псевдоскалярного фона в лагранжиан с псевдоскаляр-векторным взаимодействием, мы сможем найти уравнения поля из эквивалентного лагранжиана [24]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{2} \zeta_\mu A_\nu(x) \tilde{F}^{\mu\nu}(x) \theta(-\zeta \cdot x) + \\ & + \frac{1}{2} m^2 A_\nu(x) A^\nu(x) + A^\mu(x) \partial_\mu B(x) + \frac{1}{2} \varkappa B^2(x), \end{aligned} \quad (4)$$

в котором калибровочная инвариантность явно нарушена всеми членами, кроме первого члена с максвелловским лагранжианом. В этом случае уравнения поля записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda F^{\lambda\nu} + m^2 A^\nu + \zeta_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu} + \partial^\nu B &= 0, & \zeta \cdot x < 0, \\ \partial_\lambda F^{\lambda\nu} + m^2 A^\nu + \partial^\nu B &= 0, & \zeta \cdot x > 0, \\ \partial_\nu A^\nu &= \varkappa B. \end{aligned} \quad (5)$$

После свертки первой пары уравнений поля с ∂_ν мы получаем

$$(\square + \varkappa m^2) B(x) = 0, \quad (6)$$

откуда видно, что вспомогательное поле Штюкельберга всегда является нефизическим действительным скалярным полем, не взаимодействующим с псевдоскалярным классическим фоном при любых $\varkappa \in \mathbb{R}$. Сделаем наиболее удобный выбор $\varkappa = 1$, что даст нам уравнение Клейна–Гордона для вспомогательного поля и следующие уравнения для векторного поля:

$$\begin{aligned} \square A^\nu(x) + m^2 A^\nu(x) &= \varepsilon^{\nu\alpha\rho\sigma} \zeta_\alpha \partial_\rho A_\sigma(x), & \zeta \cdot x < 0, \\ \square A^\nu(x) + m^2 A^\nu(x) &= 0, & \zeta \cdot x > 0 \\ \partial_\nu A^\nu(x) &= B(x), & (\square + m^2) B(x) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Нами уже были найдены наиболее общие решения линейных уравнений (5) в работе [24]. Идея заключается в том, чтобы перейти в импульсное пространство, найти

решение в обоих полупространствах Минковского по отдельности и сопоставить эти решения на границе. С одной стороны, общее решение уравнений поля для $\zeta \cdot x > 0$ — это хорошо известное векторное поле Прока–Штюкельберга и вспомогательные свободные духовые скалярные квантовые поля,

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= A_{\text{PS}}^\mu(x) - \frac{\partial^\mu B(x)}{m^2}, \quad \zeta \cdot x > 0, \\ A_{\text{PS}}^\mu(x) &= \int d\mathbf{k} \sum_{r=1}^3 [a_{\mathbf{k},r} u_{\mathbf{k},r}^\mu(x) + a_{\mathbf{k},r}^\dagger u_{\mathbf{k},r}^{\mu*}(x)], \quad \partial_\mu A_{\text{PS}}^\mu(x) = 0, \\ B(x) &= m \int d\mathbf{k} [b_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + b_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)], \\ u_{\mathbf{k},r}^\nu(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} e_r^\nu(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}x^0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad r = 1, 2, 3, \\ u_{\mathbf{k}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}x^0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где операторы рождения и уничтожения удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям. Три линейных вещественных вектора поляризации ортонормированы и на массовой поверхности $k^2 = m^2$ подчиняются следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} k_\mu e_r^\mu(\mathbf{k}) &= 0, \quad -g_{\mu\nu} e_r^\mu(\mathbf{k}) e_s^\nu(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \\ \sum_{r=1}^3 e_r^\mu(\mathbf{k}) e_r^\nu(\mathbf{k}) &= -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

в то время как векторные функции плоской волны удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \partial_\mu u_{\mathbf{k},r}^\mu(x) &= 0 \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \quad r = 1, 2, 3, \\ (u_{\mathbf{k},r}^\mu, u_{\mathbf{p},s}^\nu) &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) e_r^\mu(\mathbf{k}) e_s^\nu(\mathbf{p}) = -(u_{\mathbf{k},r}^{\mu*}, u_{\mathbf{p},s}^{\nu*}), \\ (u_{\mathbf{k},r}^{\mu*}, u_{\mathbf{p},s}^\nu) &= (u_{\mathbf{k},r}^\mu, u_{\mathbf{p},s}^{\nu*}) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, общее решение при $\zeta \cdot x < 0$, где свободное квантовое поле Максвелла–Черна–Саймонса имеет место, было тщательно рассмотрено и применено в работах [23], [17] для массивного случая и в работе [25] для безмассового случая. Кратко опишем эти решения.

Сначала напомним, как получаются так называемые киральные или двулучепреломляющие векторы поляризации для векторного поля Максвелла–Черна–Саймонса. Мы строим векторы поляризации, используя проектор на плоскость, который ортогонален векторам k_μ , ζ_ν [23]:

$$\begin{aligned} S_\lambda^\nu &\equiv \delta_\lambda^\nu D + k^\nu k_\lambda \zeta^2 + \zeta^\nu \zeta_\lambda k^2 - \zeta \cdot k (\zeta_\lambda k^\nu + \zeta^\nu k_\lambda), \\ D &\equiv (\zeta \cdot k)^2 - \zeta^2 k^2 = \frac{1}{2} S_\nu^\nu. \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью последнего равенства можно обнаружить, что

$$S^{\mu\lambda} \varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \zeta^\alpha k^\beta = D \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}^\mu \zeta^\alpha k^\beta. \quad (12)$$

Теперь, преследуя нашу цель, удобно ввести два ортонормированных одномерных эрмитовых проектора

$$\pi_{\pm}^{\mu\nu} \equiv \frac{S^{\mu\nu}}{2D} \pm \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \zeta_{\alpha} k_{\beta} D^{-1/2} = (\pi_{\pm}^{\nu\mu})^* = (\pi_{\mp}^{\mu\nu})^*, \quad D > 0. \quad (13)$$

Пара киральных векторов поляризации для поля Максвелла–Черна–Саймонса может быть построена с помощью постоянных тетрад ϵ_{ν} :

$$\varepsilon_{\pm}^{\mu*}(k) \equiv \pi_{\pm}^{\mu\lambda} \epsilon_{\mu}. \quad (14)$$

Их свойства были подробно рассмотрены в [23].

Теперь, чтобы получить нормальные моды распространения квантового поля Максвелла–Черна–Саймонса, введем кинетическую эрмитову (4×4) -матрицу K с элементами

$$K_{\lambda\nu} \equiv g_{\lambda\nu}(k^2 - m^2) + i\varepsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} \zeta^{\alpha} k^{\beta}, \quad K_{\lambda\nu} = K_{\nu\lambda}^*. \quad (15)$$

Мы получаем общее решение для $\zeta \cdot x < 0$ из соотношений (13), (14):

$$\begin{aligned} K_{\nu}^{\mu} \varepsilon_{\pm}^{\nu}(k) &= [\delta_{\nu}^{\mu}(k^2 - m^2) + \sqrt{D}(\pi_{+\nu}^{\mu} - \pi_{-\nu}^{\mu})] \varepsilon_{\pm}^{\nu}(k) = \\ &= (k^2 - m^2 \pm \sqrt{D}) \varepsilon_{\pm}^{\mu}(k). \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы завершить построение базиса, введем еще пару ортонормированных векторов поляризации, называемых соответственно скалярной и продольной поляризациями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_S^{\mu}(k) &\equiv \frac{k^{\mu}}{\sqrt{k^2}}, & k^2 > 0, \\ \varepsilon_L^{\mu}(k) &\equiv (Dk^2)^{-1/2}(k^2 \zeta^{\mu} - k^{\mu} \zeta \cdot k), & k^2 > 0 \vee D > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

которые по построению удовлетворяют следующим равенствам

$$\begin{aligned} k_{\mu} \varepsilon_L^{\mu}(k) &= 0, & k_{\mu} \varepsilon_S^{\mu}(k) &= \sqrt{k^2}, & k^2 > 0, \\ g_{\mu\nu} \varepsilon_S^{\mu}(k) \varepsilon_S^{\nu}(k) &= 1, & g_{\mu\nu} \varepsilon_L^{\mu}(k) \varepsilon_L^{\nu}(k) &= -1, \\ g_{\mu\nu} \varepsilon_S^{\mu}(k) \varepsilon_L^{\nu}(k) &= g_{\mu\nu} \varepsilon_S^{\mu}(k) \varepsilon_{\pm}^{\nu}(k) = g_{\mu\nu} \varepsilon_L^{\mu}(k) \varepsilon_{\pm}^{\nu}(k) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Значит, в нашем распоряжении для любого k^{μ} при $k^2 > 0 \vee D > 0$ имеется полный и ортонормированный киральный набор из четырех векторов поляризации,

$$\varepsilon_A^{\mu}(k) = \begin{cases} \frac{k^{\mu}}{\sqrt{k^2}}, & A = S, \\ \frac{k^2 \zeta^{\mu} - k^{\mu} \zeta \cdot k}{\sqrt{Dk^2}}, & A = L, \\ \varepsilon_{\pm}^{\mu}(k_{\pm}), & A = \pm, \end{cases} \quad k^2 > 0 \vee D > 0. \quad (19)$$

Теперь, чтобы полностью осуществить каноническое квантование массивного векторного поля Максвелла–Черна–Саймонса для простого случая $\varkappa = 1$, удобно ввести поляризованные плоские волны

$$v_{\mathbf{k}A}^{\nu}(x) = [(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}A}]^{-1/2} \varepsilon_A^{\nu}(k) e^{-i\omega_{\mathbf{k}A} x^0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (20)$$

где дисперсионные соотношения для скалярной и продольной поляризаций совпадают,

$$\omega_{\mathbf{k}S} = \omega_{\mathbf{k}L} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \equiv \omega_{\mathbf{k}},$$

поэтому можно написать

$$k_\nu \varepsilon_S^\nu(k) = m, \quad i\partial_\nu v_{\mathbf{k}S}^\nu(x) = u_{\mathbf{k}}(x). \quad (21)$$

Отсюда следует, что общее решение уравнений Эйлера–Лагранжа (7) для квантового массивного векторного поля в случае, когда $\varkappa = 1$ и $\zeta \cdot x < 0$, принимает вид

$$\begin{aligned} A^\nu(x) &= A_{\text{CS}}^\nu(x) - \frac{\partial^\nu B(x)}{m^2}, \\ A_{\text{CS}}^\nu(x) &= \int d\mathbf{k} \sum_{A=\pm, L} [c_{\mathbf{k}, A} v_{\mathbf{k}A}^\nu(x) + c_{\mathbf{k}, A}^\dagger v_{\mathbf{k}A}^{\nu*}(x)], \\ B(x) &= m \int d\mathbf{k} [b_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(x) + b_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(x)], \end{aligned} \quad (22)$$

где для операторов u и v выполняются канонические коммутационные соотношения. Оказывается, физические массивные кванты Максвелла–Черна–Саймонса рождаются из фоковского вакуума как составляющая часть квантованного массивного векторного поля Максвелла–Черна–Саймонса $A_{\text{CS}}^\nu(x)$ со стандартными каноническими коммутационными соотношениями

$$[c_{\mathbf{k}, A}, c_{\mathbf{k}', A'}^\dagger] = \delta_{AA'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad A, A' = L, \pm,$$

все остальные коммутаторы равны нулю.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БОГОЛЮБОВА

Векторное поле Прока–Штюкельберга и массивное векторное поле Максвелла–Черна–Саймонса встречаются на гиперповерхности $\zeta \cdot x = 0$. Как было показано в работе [24], для сшивки решений на границе удобно ввести следующие объекты: $\hat{k} = (\omega, k_2, k_3)$, $\hat{x} = (x_0, x_2, x_3)$ и их произведение $\hat{k} \cdot \hat{x} = -\omega x_0 + k_2 x_2 + k_3 x_3$. Условия сшивки для векторного поля при этом на границе принимают следующий вид:

$$\int d\hat{\mathbf{k}} \left\{ \sum_A [c_{\hat{\mathbf{k}}, A} v_{\hat{\mathbf{k}}, A}^\mu(\hat{x}) + c_{\hat{\mathbf{k}}, A}^\dagger v_{\hat{\mathbf{k}}, A}^{\mu*}(\hat{x})] - \sum_{r=1}^3 [a_{\hat{\mathbf{k}}, r} u_{\hat{\mathbf{k}}, r}^\mu(\hat{x}) + a_{\hat{\mathbf{k}}, r}^\dagger u_{\hat{\mathbf{k}}, r}^{\mu*}(\hat{x})] \right\} = 0. \quad (23)$$

Они могут быть выполнены, если мы произведем преобразования Боголюбова

$$v_{\hat{\mathbf{k}}, A}^\nu(\hat{x}) = \sum_{s=1}^3 [\alpha_{sA}(\hat{\mathbf{k}}) u_{\hat{\mathbf{k}}, s}^\nu(\hat{x}) - \beta_{sA}(\hat{\mathbf{k}}) u_{\hat{\mathbf{k}}, s}^{\nu*}(\hat{x})], \quad (24)$$

где комплексные числовые коэффициенты $\alpha_{sA}(\hat{\mathbf{k}})$, $\beta_{sA}(\hat{\mathbf{k}})$ могут быть определены для конкретного вида вектора ζ . К примеру, пространственный вектор ζ обсуждался в работе [24].

Мы также можем выписать операторные равенства

$$a_{\hat{k},r} = \sum_{A=\pm,L} [\alpha_{rA}(\hat{k})c_{\hat{k},A} - \beta_{rA}^*(\hat{k})c_{\hat{k},A}^\dagger], \quad (25)$$

$$c_{\hat{k},A} = \sum_{r=1}^3 [\alpha_{Ar}^*(\hat{k})a_{\hat{k},r} + \beta_{Ar}^*(\hat{k})a_{\hat{k},r}^\dagger]. \quad (26)$$

Мы имеем два различных фоковских вакуумных состояния, а именно

$$a_{\hat{k},r}|0\rangle = 0, \quad c_{\hat{k},A}|\Omega\rangle = 0,$$

причем из (26) следует

$$c_{\hat{k},A}|0\rangle = \sum_{r=1}^3 \beta_{Ar}^*(\hat{k})a_{\hat{k},r}^\dagger|0\rangle,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle 0|a_{\hat{p},s}c_{\hat{k},A}^\dagger|0\rangle &= \langle 0|a_{\hat{p},s}\sum_{r=1}^3 [\alpha_{Ar}(\hat{k})a_{\hat{k},r}^\dagger + \beta_{Ar}(\hat{k})a_{\hat{k},r}]|0\rangle = \\ &= \sum_{r=1}^3 \alpha_{Ar}(\hat{k})\langle 0|a_{\hat{p},s}a_{\hat{k},r}^\dagger|0\rangle = \delta(\hat{k}-\hat{p})\alpha_{As}(\hat{k}). \end{aligned}$$

Величина $\alpha_{As}(\hat{k})$ может быть интерпретирована как амплитуда вероятности того, что частица с массой m , частотой ω , волновым вектором $(K_A > 0, k_y, k_z)$ и киральным вектором поляризации $\varepsilon_A^\mu(\hat{k})$ переходит из левого полупространства в правое через гиперповерхность $x = 0$ и превращается в частицу Прока–Штюкельберга с той же массой m , частотой ω , волновым вектором $(K > 0, k_y, k_z)$ и вектором поляризации $e_s^\mu(\hat{k})$. Эффект этого перехода, в частности, заключается в том, что первая компонента волнового вектора массивной частицы меняется с $K_\pm$ на K либо, в случае продольной поляризации, волновой вектор остается неизменным.

4. АЛГЕБРА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СЖАТЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим пару безразмерных сжатых операторов рождения и уничтожения для векторного поля Черна–Саймонса, возникшего в присутствии фонового поля, нарушающего четность, а именно

$$\begin{aligned} \Pi(z) &\equiv \sum_{j \in \Omega} \frac{1}{2} z_j c_j^2 = \sum_{j \in \Omega} \frac{1}{2} z_j \Pi_j, \\ \Pi^\dagger(\bar{z}) &\equiv \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} \bar{z}_i c_i^{\dagger 2} = \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} \bar{z}_i \Pi_i^\dagger, \end{aligned} \quad (27)$$

где мы используем для краткости обозначения

$$\sum_{i \in \Omega} = \int \frac{d\hat{k}}{(2\pi)^3} \sum_{A=\pm,L}, \quad \hat{k} \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $z_i \equiv z(\hat{\mathbf{k}}, A)$ – комплекснозначные безразмерные функции такие, что

$$\mathcal{V} \sum_{i \in \Omega} z_i \bar{z}_i = \nu_o$$

является числом, которое мы назовем *характеристическим числом* функции распределения данной сжатой пары $z(\hat{\mathbf{k}}, A)$, где $\mathcal{V}$ – объем очень большого симметричного куба в трехмерном евклидовом пространстве. Операторы рождения и уничтожения для векторных частиц Черна–Саймонса ($c_i, c_j^\dagger$) и векторных частиц Прок–Штюкельберга ($a_i, a_j^\dagger$) удовлетворяют обычным каноническим коммутационным соотношениям.

В общем виде, если мы обозначим через Q_a , $a = 1, 2, \dots, n$, каждый из n сохраняющихся зарядов системы, которые позволены конфигурацией фонового поля, нарушающего четность, т. е.

$$Q_a = \sum_{j \in \Omega} q_{aj} c_j^\dagger c_j,$$

где, например, q_{aj} , $a = 1, 2, \dots, n$, – это заряды сжатых состояний с определенными квантовыми числами $j \in \Omega$, тогда для любого сжатого состояния $\Pi_i^\dagger |0\rangle$ с определенными квантовыми числами мы находим

$$Q_a \Pi_i^\dagger |\Omega\rangle = 2q_{ai} \Pi_i^\dagger |\Omega\rangle \quad \forall i \in \Omega \vee a = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\Pi(z), \Pi^\dagger(\bar{z})] &= \frac{1}{4} \sum_{i \in \Omega} z_i \sum_{j \in \Omega} \bar{z}_j [c_i c_j, c_j^\dagger c_i^\dagger] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega} z_i \sum_{j \in \Omega} \bar{z}_j (c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i) \delta_{ij} (2\pi)^3 = \\ &= \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} z_i \bar{z}_i \{c_i, c_i^\dagger\} \equiv 2N(\bar{z}z), \end{aligned} \quad (29)$$

в которых

$$\begin{aligned} N(\bar{z}z) &\equiv \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{4} z_i \bar{z}_i (c_i^\dagger c_i + c_i c_i^\dagger) = N^\dagger(z\bar{z}) = \\ &= \frac{1}{4} \nu_o + \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} z_i \bar{z}_i c_i^\dagger c_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Наконец, для $\nu_i \in \mathbb{R}$ ($\forall i \in \Omega$) мы получаем

$$\begin{aligned} [N(\nu), \Pi(z)] &= \frac{1}{8} \sum_{j \in \Omega} \nu_j \sum_{i \in \Omega} z_i [c_j^\dagger c_j + c_j c_j^\dagger, c_i c_i] = - \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} \nu_i z_i \Pi_i = -\Pi(z\nu), \\ [N(\nu), \Pi^\dagger(\bar{z})] &= \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} \nu_i \bar{z}_i \Pi_i^\dagger = \Pi^\dagger(\nu\bar{z}). \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда следует, что три оператора N , Π , $\Pi^\dagger$ удовлетворяют хорошо известным коммутационным соотношениям

$$[N(\nu), \Pi^\dagger(\bar{z})] = \Pi^\dagger(\nu\bar{z}), \quad [\Pi(z), N(\nu)] = \Pi(\nu z), \quad [\Pi^\dagger(\bar{z}), \Pi(z)] = 2N(\bar{z}z), \quad (32)$$

в которых

$$\Pi(z) = J_-(z) = J_1(z) - iJ_2(z), \quad \Pi^\dagger(\bar{z}) = J_+(\bar{z}) = J_1(\bar{z}) + iJ_2(\bar{z}), \quad N(\nu) = J_3(z\bar{z}), \quad (33)$$

где тройка операторов

$$J_1(z, \bar{z}) \equiv \frac{1}{2}(\Pi(z) + \Pi^\dagger(\bar{z})), \quad J_2(z, \bar{z}) \equiv \frac{1}{2i}(\Pi^\dagger(\bar{z}) - \Pi(z)), \quad J_3(z\bar{z}) = N(\nu) \quad (34)$$

является базисом эрмитовых генераторов, подчиняющихся хорошо известным свойствам алгебры Ли $SU(2)$

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (35)$$

Теперь, например, оказывается, что квантовое состояние $|\bar{z}\rangle$, которое представляет сжатую пару частиц Черна–Саймонса общего вида с функцией распределения импульса $\bar{z}_i$, $i \in \Omega$, удовлетворяет равенствам

$$|\bar{z}\rangle = \Pi^\dagger(\bar{z})|\Omega\rangle, \quad \langle z| = \langle\Omega|\Pi(z) \quad (36)$$

и демонстрирует инфракрасно-регуляризованную нормировку

$$\langle z|\bar{z}\rangle = \langle\Omega|[\Pi(z), \Pi^\dagger(\bar{z})]|\Omega\rangle = -2\langle\Omega|N(\bar{z}z)|\Omega\rangle = \nu_o. \quad (37)$$

4.1. Алгебраический подход к описанию процессов прохождения и отражения от границы. Общей особенностью, которая характеризует сжатые парные процессы рождения и уничтожения массивных векторных частиц в пространстве с нарушенной четностью, является существование несингулярного преобразования Боголюбова $\mathcal{S}$, генератор которого в согласии с соотношениями (25) и (26) действует на фоковское пространство в соответствии с правилами

$$\begin{aligned} a_i &= \mathcal{S}^{-1}c_i\mathcal{S} \equiv \sum_{j \in \Omega} (\alpha_{ij}c_j - \beta_{ij}^*c_j^\dagger), \\ c_i^\dagger &= \mathcal{S}^{-1}a_i^\dagger\mathcal{S} \equiv \sum_{j \in \Omega} (\alpha_{ij}a_j^\dagger + \beta_{ij}a_j), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &\equiv \alpha_{r,A}(\hat{k}, \hat{p}) = \alpha_{r,A}(\hat{k})\delta(\hat{k} - \hat{p})(2\pi)^3, \\ \beta_{ij} &\equiv \beta_{r,A}(\hat{k}, \hat{p}) = \beta_{r,A}(\hat{k})\delta(\hat{k} - \hat{p})(2\pi)^3, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \Omega} \alpha_{ij}^* \alpha_{i\kappa} - \beta_{ij}^* \beta_{i\kappa} &= \delta_{j\kappa}, \\ \sum_{i \in \Omega} \alpha_{ij} \beta_{i\kappa}^* - \alpha_{ij}^* \beta_{i\kappa} &= 0, \end{aligned} \quad i, j, \kappa \in \Omega,$$

так что канонические коммутационные соотношения

$$[c_i, c_j^\dagger] = \delta_{ij} = [a_i, a_j^\dagger] \quad \text{и т. д.}$$

остаются неизменными благодаря свойству подобия несингулярного преобразования $\mathcal{S}$. Таким образом, мы получаем два фоковских пространства $\mathfrak{F}_{\text{PS}}$ и $\mathfrak{F}_{\text{CS}}$, которые образованы циклическими вакуумными состояниями, нормированными на единицу и определенными следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i |0\rangle &= 0 = \langle 0 | a_i^\dagger & \forall i \in \Omega, \\ c_j |\Omega\rangle &= 0 = \langle \Omega | c_j^\dagger & \forall j \in \Omega. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь, например, мы имеем

$$\begin{aligned} c_i a_\varkappa^\dagger |0\rangle &= \sum_{j \in \Omega} (\alpha_{ij}^* a_j a_\varkappa^\dagger |0\rangle + \beta_{ij}^* a_j^\dagger a_\varkappa^\dagger |0\rangle) = \\ &= \alpha_{i\varkappa}^* |0\rangle + \sum_{j \in \Omega} \beta_{ij}^* a_j^\dagger a_\varkappa^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (41)$$

так что

$$\langle 0 | c_i a_j^\dagger |0\rangle = \alpha_{ij}^* \quad \forall i, j \in \Omega, \quad (42)$$

откуда следует, как и ожидалось, что коэффициент Боголюбова $\alpha_{r,A}^*(\hat{\mathbf{k}})$ является не чем иным, как амплитудой вероятности того, что пара частиц Прока–Штюкельберга не родилась из вакуума $|0\rangle$, т. е. является относительной амплитудой вероятности стабильности вакуума Прока–Штюкельберга. Таким же образом, используя вакуумное среднее, получаем

$$\mathcal{V}^{-1} \langle 0 | a_\varkappa c_j^\dagger \Pi_i |0\rangle = \sum_{\ell \in \Omega} \beta_{j\ell}^* \langle 0 | \frac{1}{2} a_i^2 a_\ell^\dagger a_\varkappa^\dagger |0\rangle \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}^{-1} \beta_{ji}^* \delta_{\varkappa i} \quad \forall i, \varkappa \in \Omega. \quad (43)$$

Также ясно, что мы можем понимать коэффициент Боголюбова β_i как амплитуду вероятности создания сжатой пары Прока–Штюкельберга из вакуума или поглощения пары вакуумом.

Чтобы продолжить дальше, рассмотрим, к примеру, квантовое векторное поле Черна–Саймонса и определим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\theta, \hat{\mathbf{n}}) &\equiv e^{-i\theta \cdot \mathbf{T}(z, \bar{z}, \nu)}, \\ \theta \cdot \mathbf{T}(z, \bar{z}, \nu) &\equiv \Pi^\dagger(\theta \bar{z}) + \Pi(z\theta) + 2N(\theta\nu), \end{aligned} \quad (44)$$

где θ_ℓ ($\forall \ell \in \Omega$) – вещественный функциональный параметр, в то время как функциональный единичный вектор $\hat{\mathbf{n}}_i$ связан с функциональными параметрами $z_i, \bar{z}_i, \nu_i$ посредством соотношения

$$\hat{\mathbf{n}}_i^2 = \nu_i^2 - z_i \bar{z}_i = 1 \quad \forall i \in \Omega.$$

Например, подходящий функциональный вид параметров представляет пару гиперболических и тригонометрических переменных v_i и ϕ_i таких, что

$$v_i = \text{ch } v_i, \quad z_i = \text{sh } v_i e^{-i\phi_i}, \quad v_i \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \phi_i < 2\pi, \quad \forall i \in \Omega.$$

Из базовых коммутационных соотношений

$$[T(z, \bar{z}, \nu), c_i] = -\bar{z}_i c_i^\dagger - \nu_i c_i, \quad [T(z, \bar{z}, \nu), c_i^\dagger] = z_i c_i + \nu_i c_i^\dagger \quad (45)$$

мы получим

$$[T, [T, c_i]] = c_i, \quad [T, [T, c_i^\dagger]] = c_i^\dagger. \quad (46)$$

Как следствие, мы получаем наиболее общие преобразования Боголюбова в виде

$$\begin{aligned} a_i &= c_i + i\theta_i [T, c_i] + \frac{1}{2!} (i\theta_i)^2 [T, [T, c_i]] + \frac{1}{3!} (i\theta_i)^3 [T, [T, [T, c_i]]] + \dots = \\ &= (\cos \theta_i - i\nu_i \sin \theta_i) c_i - i c_i^\dagger \bar{z}_i \sin \theta_i = \\ &= \alpha_i c_i - \beta_i^* c_i^\dagger, \\ a_j^\dagger &= c_j^\dagger + i\theta_j [T, c_j^\dagger] + \frac{1}{2!} (i\theta_j)^2 [T, [T, c_j^\dagger]] + \frac{1}{3!} (i\theta_j)^3 [T, [T, [T, c_j^\dagger]]] + \dots = \\ &= (\cos \theta_j + i\nu_j \sin \theta_j) c_j^\dagger + i c_j z_j \sin \theta_j = \\ &= \alpha_j^* c_j^\dagger - \beta_j c_j, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_j &\equiv \cos \theta_j - i\nu_j \sin \theta_j, & \beta_j^* &\equiv i\bar{z}_j \sin \theta_j, \\ \hat{\mathbf{n}}_j^2 &= \nu_j^2 - \bar{z}_j z_j = 1, & |\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 &= 1. \end{aligned} \quad (48)$$

Отсюда следует, что функциональный унитарный оператор

$$\mathcal{S}(\theta, z, \nu) = \mathcal{S}(\theta, \hat{\mathbf{n}}) = \mathcal{S}(\alpha, \beta), \quad \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^\dagger, \quad (49)$$

генерирует преобразования подобия Боголюбова, которые связывают векторные поля Прока–Штюкельберга и Максвелла–Черна–Саймонса с соответствующими определениями

$$A_{\text{PS}}^\nu(x) = \mathcal{S}^{-1} A_{\text{CS}}^\nu(x) \mathcal{S}, \quad |\text{PS}\rangle = \mathcal{S} |\text{CS}\rangle. \quad (50)$$

Более того, мы получаем

$$\begin{aligned} A_{\text{PS}}^\nu(x) &= \sum_{i \in \Omega} \mathcal{S}^{-1} [c_i v_i(x) + c_i^\dagger v_i^*(x)] \mathcal{S} = \sum_{j \in \Omega} [a_j u_j(x) + a_j^\dagger u_j^*(x)], \\ A_{\text{CS}}^\nu(x) &= \sum_{i \in \Omega} \mathcal{S} [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)] \mathcal{S}^{-1} = \sum_{j \in \Omega} [c_j v_j(x) + c_j^\dagger v_j^*(x)], \end{aligned} \quad (51)$$

где для области с нарушенной четностью и четырехмерного пространства Минковского мы, например, имеем

$$u_i(x) \equiv u_{\mathbf{k},r}^\nu(x, \hat{\mathbf{x}}), \quad v_j(x) \equiv v_{\mathbf{p},A}^\nu(x, \hat{\mathbf{x}}).$$

Значит, самый общий вид преобразований Боголюбова есть не что иное, как функциональное вращение в фоковском пространстве с параметрами $(\theta, z, \nu) = (\theta, \hat{\mathbf{n}}) = (\alpha, \beta)$, генераторами которого являются операторы излучения сжатой пары $\Pi^\dagger(\theta \bar{z})$, поглощения сжатой пары $\Pi(\theta z)$ и количества сжатых пар $N(\theta \nu)$, которые действительно удовлетворяют функциональным коммутационным соотношениям, возникающим в алгебре Ли $SU(2)$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача распространения векторных частиц между пространством с нарушенной четностью и вакуумом представляется достаточно интересной, поскольку может возникать и в физике тяжелых ионов, и в астрофизике. Нами ранее были исследованы различные эффекты описываемой в настоящей работе модели на классическом уровне. В частности, коэффициенты прохождения и отражения для различных случаев были найдены в работах [26], а в работе [27] было показано возможное влияние этих эффектов на скорость остывания нейтронных звезд.

Результат настоящей работы позволяет описывать прохождение частиц через границу областей с разными уравнениями поля в более общем виде. Тот факт, что преобразования Боголюбова могут быть переписаны как функциональное вращение в фоковском пространстве, полезен не только для решения задач, связанных с электродинамикой Максвелла–Черна–Саймонса в конечном объеме, но и для всех исследований, имеющих дело с различными фоковскими пространствами и возможностью перехода между ними.

Благодарности. Работа А. А. Андрианова и С. С. Колеватова поддержана РФФИ (грант № 13-02-00127), а также Санкт-Петербургским государственным университетом (грант № 11.38.660.2013). С. С. Колеватов также благодарен фонду “Династия”.

Список литературы

- [1] S. M. Carroll, G. B. Field, R. Jackiw, *Phys. Rev. D*, **41**:4 (1990), 1231–1240.
- [2] A. A. Andrianov, R. Soldati, *Phys. Rev. D*, **51**:10 (1995), 5961–5964, arXiv: hep-th/9405147.
- [3] D. Colladay, V. A. Kostelecký, *Phys. Rev. D*, **55**:11 (1997), 6760–6774, arXiv: hep-ph/9703464.
- [4] S. R. Coleman, S. L. Glashow, *Phys. Lett. B*, **405**:3–4 (1997), 249–252, arXiv: hep-ph/9703240.
- [5] R. C. Myers, M. Pospelov, *Phys. Rev. Lett.*, **90**:21 (2003), 211601, 4 pp., arXiv: hep-ph/0301124.
- [6] R. Montemayor, L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D*, **72**:4 (2005), 045018, 24 pp., arXiv: hep-ph/0505135.
- [7] V. A. Kostelecký, M. Mewes, *Phys. Rev. D*, **66**:5 (2002), 056005, 24 pp., arXiv: hep-ph/0205211.
- [8] G. M. Shore, *Contemp. Phys.*, **44**:6 (2003), 503–521, arXiv: gr-qc/0304059.
- [9] H.-C. Cheng, M. A. Luty, S. Mukohyama, J. Thaler, *JHEP*, **05** (2006), 076, 51 pp., arXiv: hep-th/0603010.
- [10] A. A. Andrianov, R. Soldati, L. Sorbo, *Phys. Rev. D*, **59**:2 (1999), 025002, 13 pp., arXiv: hep-th/9806220.
- [11] N. Arkani-Hamed, H.-C. Cheng, M. A. Luty, S. Mukohyama, *JHEP*, **05** (2004), 074, 36 pp., arXiv: hep-th/0312099.
- [12] L. Abbott, P. Sikivie, *Phys. Lett. B*, **120**:1–3 (1983), 133–136.
- [13] M. Kuster, G. Raffelt, B. Beltrán (eds.), *Axions: Theory, Cosmology and Experimental Searches*, Lecture Notes in Physics, **741**, Springer, Berlin, 2008.
- [14] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Frontiers in Physics, **69**, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990; Y. Sofue, V. Rubin, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **39** (2001), 137–174; S. J. Asztalos, E. Daw, H. Peng, L. J. Rosenberg, D. B. Yu, C. Hagmann, D. Kinion, W. Stoeffl, K. van Bibber, J. LaVeigne, P. Sikivie, N. S. Sullivan, D. B. Tanner F. Nezrick, D. M. Moltz, *Astrophys. J.*, **571**:1 (2002), L27–L30.

- [15] K. O. Lapidus, V. M. Emel'yanov, *Phys. Part. Nucl.*, **40**:1 (2009), 29–48.
- [16] I. Tserruya, “Electromagnetic Probes”, *Relativistic Heavy Ion Physics*, Elementary Particles, Nuclei and Atoms, **23**, ed. R. Stock, Springer, Heidelberg, 2010, 176–207 pp., [arXiv: 0903.0415](#).
- [17] A. A. Andrianov, D. Espriu, P. Giacconi, R. Soldati, *JHEP*, **09** (2009), 057, 15 pp., [arXiv: 0907.3709](#).
- [18] A. A. Andrianov, D. Espriu, *Phys. Lett. B*, **663**:5 (2008), 450–455, [arXiv: 0709.0049](#); A. A. Andrianov, D. Espriu, V. A. Andrianov, *Phys. Lett. B*, **678**:4 (2009), 416–421.
- [19] D. Kharzeev, R. D. Pisarski, M. H. G. Tytgat, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:3 (1998), 512–515, [arXiv: hep-ph/9804221](#); K. Buckley, T. Fugleberg, A. Zhitnitsky, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:21 (2000), 4814–4817, [arXiv: hep-ph/9910229](#); D. Kharzeev, *Phys. Lett. B*, **633**:2–3 (2006), 260–264, [arXiv: hep-ph/0406125](#); D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, H. J. Warringa, *Nucl. Phys. A*, **803**:3 (2008), 227–253, [arXiv: 0711.0950](#).
- [20] P. Buividovich, M. Chernodub, E. Luschevskaya, M. Polikarpov, *Phys. Rev. D*, **80**:5 (2009), 054503, 14 pp., [arXiv: 0907.0494](#).
- [21] B. I. Abelev, M. M. Aggarwal, Z. Ahammed et al. [STAR Collab.], *Phys. Rev. Lett.*, **103**:25 (2009), 251601, 7 pp., [arXiv: 0909.1739](#); S. A. Voloshin, *J. Phys. Conf. Ser.*, **230**:1 (2010), 012021, 8 pp., [arXiv: 1003.1127](#).
- [22] A. Gorsky, M. B. Voloshin, *Phys. Rev. D*, **82**:8 (2010), 086008, 6 pp., [arXiv: 1006.5423](#).
- [23] J. Alfaro, A. A. Andrianov, M. Cambiaso, P. Giacconi, R. Soldati, *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:16 (2010), 3271–3306; *Phys. Lett. B*, **639**:5 (2006), 586–590, [arXiv: hep-th/0604164](#).
- [24] A. A. Andrianov, S. S. Kolevaton, R. Soldati, *JHEP*, **11** (2011), 007, 27 pp., [arXiv: 1109.3440](#).
- [25] A. A. Andrianov, P. Giacconi, R. Soldati, *JHEP*, **02** (2002), 030, 25 pp., [arXiv: hep-th/0110279](#).
- [26] A. A. Андрианов, С. С. Колеватов, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 357–369, [arXiv: 1212.5723](#); S. S. Kolevaton, A. A. Andrianov, *AIP Conf. Proc.*, **1606**:1 (2014), 243–255.
- [27] A. A. Andrianov, D. Espriu, S. S. Kolevaton, *Effects of pseudoscalar condensation on the cooling of neutron stars*, [arXiv: 1501.03484](#).