Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Кувшинов, Е. Г. Багашов, Конфайнмент цветных состояний в стохастическом вакууме квантовой хромодинамики, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 475–482

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:17:08

© 2015 г.

В. И. Кувшинов*, Е. Г. Багашов*

КОНФАЙНМЕНТ ЦВЕТНЫХ СОСТОЯНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ВАКУУМЕ КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКИ

Показано, что в рамках модели стохастического вакуума квантовой хромодинамики конфайнмент кварков может быть описан как декогеренция цветного состояния частицы в смешанное квантовое состояние с равными вероятностями для разных цветов. Вычислены квантовые характеристики одночастичных и многочастичных состояний: степень чистоты, степень согласованности, энтропия фон Неймана.

Ключевые слова: декогеренция, квантовая оптика, квантовая хромодинамика, кварки, конфайнмент, петля Вильсона, стохастический вакуум.

DOI: 10.4213/tmf8915

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, под конфайнментом понимается явление, при котором в физическом спектре отсутствуют частицы (поля), входящие в фундаментальный лагранжиан [1]. В случае квантовой хромодинамики (КХД) это означает, что кварки, глюоны и другие цветные объекты не могут существовать как отдельные асимптотические состояния. Из-за асимптотической свободы пертурбативный подход справедлив только на малых расстояниях, что подтверждается сравнением теоретических расчетов с результатами экспериментов на ускорителях [2].

Одним из подходов к решению проблемы конфайнмента является использование модели стохастического вакуума КХД [1], [3]–[5], где предполагается, что можно вычислить вакуумные ожидания калибровочно-инвариантных величин с учетом некоторого “хорошо ведущего себя” стохастического слагаемого в гамильтониане системы. В стохастическом вакууме отличны от нуля только корреляторы второго порядка. При этом появляется эффект удержания (конфайнмента), поскольку возникают КХД-струны с постоянным натяжением на больших расстояниях. Данная модель вакуума позволяет успешно описать большое число явлений в КХД [1].

*Государственное научное учреждение “Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны”, Минск, Беларусь.
E-mail: v.kuvshinov@sosny.bas-net.by, bagashov@sosny.bas-net.by

В рамках подхода, использующегося в настоящей работе, стохастический вакуум рассматривается как окружение, в котором находится (и с которым взаимодействует) цветовой заряд.

2. ОДНОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ

2.1. Взаимодействие частицы с вакуумом. Рассмотрим движение бесспиновое массивного кварка по некоторой траектории M . Амплитуду этого процесса можно получить с помощью оператора параллельного переноса [6]–[8]:

$$|\phi(M)\rangle = \mathcal{P} \exp\left(i \int_M dx^\mu \hat{A}_\mu\right) |\phi_{\text{in}}\rangle, \quad (1)$$

где $\mathcal{P}$ – оператор упорядочения по пути и $\hat{A}_\mu$ – калибровочное поле. Введем матрицу плотности

$$\hat{\rho}(M) = |\phi(M)\rangle \langle \phi(M)|. \quad (2)$$

Пусть $\hat{\rho}_1$ – матрица плотности для некоторой реализации стохастического вакуума. Параллельный перенос матрицы $\hat{\rho}_1(M)$ описывается уравнением

$$\partial_\mu \hat{\rho}_1 = i[\hat{A}_\mu, \hat{\rho}_1]. \quad (3)$$

Требуется вычислить среднее матрицы $\hat{\rho}_1$ по всем возможным реализациям стохастического калибровочного поля. В модели стохастического вакуума КХД математические ожидания определены только для калибровочно-инвариантных величин [4], [5]. Это означает, что упорядоченные по пути экспоненты (например, в (1)) также должны быть взяты по замкнутому пути. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что начальная и конечная точки пути совпадают, имея таким образом вместо произвольного M замкнутый путь L (петлю). Физически это значит, что возникает пара частица–античастица, которая распространяется и затем аннигилирует [1].

Матрицу плотности можно разложить на части, которые преобразуются по тривиальному и присоединенному представлениям калибровочной группы [6]:

$$\hat{\rho}_1 = N_c^{-1} \hat{I} + \rho_1^a \hat{T}_a, \quad (4)$$

где $\hat{I}$ – единичный оператор (в цветовом пространстве), N_c – число цветов, а $\hat{T}_a$, где $a = 1, \dots, (N_c^2 - 1)$, – генераторы алгебры Ли $SU(N_c)$, нормированные условием $\text{Tr}(\hat{T}_a \hat{T}_b) = \delta_{ab}$.

После подстановки разложения (4) в (3) и выполнения преобразований, усредняя полученное решение $\hat{\rho}_1$ по реализациям стохастического вакуума, мы можем записать искомую матрицу плотности системы:

$$\hat{\rho}(L) = \langle \langle \hat{\rho}_1 \rangle \rangle = N_c^{-1} \hat{I} + (\hat{\rho}_{\text{in}} - N_c^{-1} \hat{I}) W_{\text{adj}}(L), \quad (5)$$

где через $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ обозначено усреднение по реализациям стохастического вакуума, а $W_{\text{adj}}(L)$ – петля Вильсона в присоединенном представлении. По определению петля Вильсона записывается как [9]

$$W(L) = \text{Tr} \mathcal{P} \exp\left(i \int_L dx^\mu \hat{A}_\mu\right). \quad (6)$$

Если выбрать прямоугольную петлю L таким образом, чтобы она охватывала время T и расстояние R , условие конфайнмента [9] в стохастическом вакууме может быть записано следующим образом:

$$W_{\text{adj}}(L) = \exp(-\sigma_{\text{adj}} RT). \quad (7)$$

Здесь σ_{adj} – натяжение струны КХД в присоединенном представлении [6]. Тогда из (7) получаем

$$\hat{\rho}(L)|_{RT \rightarrow \infty} = N_c^{-1} \hat{I}. \quad (8)$$

2.2. Цветовая суперпозиция. Рассмотрим систему, состоящую из произвольной цветной суперпозиции и окружения, которое представляет вакуум КХД. Обобщенное начальное состояние данной суперпозиции может быть записано как

$$|\phi_{\text{in}}\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|3\rangle, \quad (9)$$

где кет-векторы являются чистыми состояниями, соответствующими всем различным цветам в фундаментальном представлении группы $SU(3)$, а комплексные коэффициенты (представленные греческими буквами) удовлетворяют условию нормировки

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1. \quad (10)$$

Соответствующая (9) матрица плотности в базисе из векторов $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ будет содержать недиагональные элементы:

$$\hat{\rho}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & \alpha\gamma^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 & \beta\gamma^* \\ \alpha^*\gamma & \beta^*\gamma & |\gamma|^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Отличные от нуля недиагональные компоненты определяют фазовые соотношения (интерференцию) между состояниями $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$.

Взаимодействие произвольной цветовой суперпозиции, представленной в виде (9), со стохастическим вакуумом КХД на больших расстояниях приводит к возникновению полностью смешанного состояния вида (8) с равными вероятностями для различных цветов и к исчезновению недиагональных членов в соответствующей матрице плотности. В начальном базисе (состоящем из векторов $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$) это означает следующее:

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & \alpha\gamma^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 & \beta\gamma^* \\ \alpha^*\gamma & \beta^*\gamma & |\gamma|^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N_c^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & N_c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & N_c^{-1} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

2.3. Степень чистоты, степень согласованности, энтропия фон Неймана. Взаимодействие цветных состояний с вакуумом КХД можно проанализировать с использованием величин, применяющихся в квантовой оптике [10], [11].

Рассмотрим величину, которая называется степень чистоты (purity). Степень чистоты P определяется как $P = \text{Tr } \hat{\rho}^2$ и по физическому смыслу является мерой близости квантового состояния к чистому. Для конечного состояния $\hat{\rho}(L)$, представленного выражением (5), получим

$$P = N_c^{-1} + (1 - N_c^{-1})W_{\text{adj}}^2(L). \quad (13)$$

При $RT \rightarrow \infty$ получаем $P = N_c^{-1}$. Это соответствует полностью смешанному состоянию.

Начальное состояние в силу условия нормировки и идемпотентности матрицы плотности имеет единичную степень чистоты,

$$P = \text{Tr } \hat{\rho}_{\text{in}}^2 = \text{Tr } \hat{\rho}_{\text{in}} = 1,$$

и это означает, что состояние является чистым. Отметим, что, принимая $RT \rightarrow 0$ и, таким образом, $W_{\text{adj}}(L) \rightarrow 1$ в (13), мы получим $P = 1$.

Рассмотрим степень согласованности (fidelity). Она определяется как [12], [13]

$$F(\omega, \tau) = \text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\omega} \tau \sqrt{\omega}} \right) \quad (14)$$

и представляет собой квадратный корень из вероятности перехода между состояниями, описываемыми матрицами плотности ω и τ (или, в операциональном смысле, максимальной вероятностью изменения одного состояния на другое путем измерения в большей квантовой системе). Если одно из состояний является чистым, то степень согласованности равна квадратному корню из области перекрытия этих квантовых состояний [14]. Для конечного состояния $\hat{\rho}(L)$ и для начального состояния $\hat{\rho}_{\text{in}}$ мы получим

$$F(\hat{\rho}_{\text{in}}, \hat{\rho}(y)) = \text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_{\text{in}}} \hat{\rho}(y) \sqrt{\hat{\rho}_{\text{in}}}} \right) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_{\text{in}} \sqrt{N_c^{-1} + (1 - N_c^{-1}) W_{\text{adj}}(L)} \right). \quad (15)$$

Когда $W_{\text{adj}}(L) \rightarrow 0$, степень согласованности $F \rightarrow N_c^{-1/2}$.

Условие $W_{\text{adj}}(L) \rightarrow 1$ приводит нас к начальному состоянию: $F = 1$. Квадрат степени согласованности (14), как показано в работе [15], для чистых состояний можно переписать в виде $F^2 = \langle l|m \rangle \langle m|l \rangle$, где $|m\rangle, |l\rangle$ – векторы состояния. Таким образом, величину (14) можно рассматривать просто как скалярное произведение векторов состояния. Если определить степень согласованности как скалярное произведение векторов состояния возмущенной и невозмущенной системы [16], то она будет описывать стабильность квантового движения частиц [16]–[19].

Рассмотрим энтропию фон Неймана. Она показывает, какая доля квантовой информации теряется в системе при ее переходе из чистого состояния [20]:

$$S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}). \quad (16)$$

В начальном состоянии мы, очевидно, получаем нулевую энтропию, поскольку состояние является чистым, и его матрица плотности идемпотентна. В конечном состоянии в случае $RT \rightarrow \infty$ (см. формулу (8)) имеем

$$S = -\text{Tr}(N_c^{-1} \hat{I} \ln(N_c^{-1} \hat{I})) = \ln N_c. \quad (17)$$

В промежуточных случаях (при небольших отличных от нуля RT) можно переписать выражение (16) как [7]

$$S = (1 - N_c^{-1}) \left(1 - \ln \frac{\ln W_{\text{adj}}(L)}{N_c} \right) + O(\ln W_{\text{adj}}(L)). \quad (18)$$

Таким образом, взаимодействие произвольной цветовой суперпозиции со стохастическим вакуумом КХД на больших расстояниях или при больших промежутках времени приводит к декогеренции и возникновению полностью смешанного цветного состояния с равными вероятностями каждого из цветов.

3. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим поведение систем, состоящих из нескольких частиц, и их взаимодействие со стохастическим вакуумом.

3.1. Двухчастичный случай. Рассмотрим систему, состоящую из двух кварков. Будем рассматривать каждый из них как отдельную подсистему и обозначим эти подсистемы через A и B . Также будем считать, что возможных цветных состояний кварков всего два: “цвет” (условно обозначим эти состояния как $|A\rangle$ и $|B\rangle$ для подсистем A и B соответственно) и “антицвет” (обозначим как $|\bar{A}\rangle$, $|\bar{B}\rangle$). Таким образом, в данном случае количество возможных цветов $N_c = 2$.

Рассмотрим следующие возможные состояния (и их эволюцию в стохастическом вакууме):

- по чистоте – чистое, смешанное,
- по сепарабельности – сепарабельное, несепарабельное (перепутанное).

Вектор чистого и сепарабельного состояния общей системы из двух кварков можно представить в виде

$$|\phi\rangle = |a\rangle|b\rangle, \quad (19)$$

где $|a\rangle$ и $|b\rangle$ – некоторые векторы состояния подсистем (кварков) A и B . Можно рассматривать эволюцию каждого кварка по отдельности, пользуясь рассуждениями из предыдущих разделов и положив при этом $\gamma = 0$, $N_c = 2$. В случае смешанного сепарабельного состояния система в целом будет описываться матрицей плотности, а не вектором состояния. Эта матрица плотности всей системы имеет вид

$$\rho_{AB} = \rho_A \rho_B, \quad (20)$$

где матрицы плотности ρ_A и ρ_B соответствуют состояниям кварков A и B . Каждое из этих состояний в свою очередь может рассматриваться независимо, и его взаимодействие со стохастическим вакуумом будет определяться уже описанным механизмом, начиная с введения формализма матрицы плотности в выражении (2).

Что касается чистого несепарабельного (перепутанного) состояния, выберем в качестве примера состояние вида

$$|\phi\rangle = \alpha|A\rangle|\bar{B}\rangle + \beta|\bar{A}\rangle|B\rangle. \quad (21)$$

Это состояние является обобщением (по весовым коэффициентам) состояния Белла. Матрица плотности данного состояния записывается в виде

$$\rho_{AB} = |\alpha|^2 |A\bar{B}\rangle\langle\bar{B}A| + \alpha\beta^* |A\bar{B}\rangle\langle B\bar{A}| + \alpha^*\beta |\bar{A}B\rangle\langle\bar{B}A| + |\beta|^2 |\bar{A}B\rangle\langle B\bar{A}|. \quad (22)$$

В базисе из соответствующих векторов эта матрица будет выглядеть так:

$$\rho_{AB} = \begin{matrix} & \langle BA| & \langle B\bar{A}| & \langle \bar{B}A| & \langle \bar{B}\bar{A}| \\ \begin{matrix} |AB\rangle \\ |\bar{A}B\rangle \\ |A\bar{B}\rangle \\ |\bar{A}\bar{B}\rangle \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 & \alpha^*\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta^* & |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (23)$$

В процессе эволюции и взаимодействия с вакуумом это состояние превратится в состояние вида (8), которое можно записать в данном базисе при условии $W(L) \rightarrow 0$ как

$$\rho_{AB} = \begin{matrix} & \langle BA| & \langle B\bar{A}| & \langle \bar{B}A| & \langle \bar{B}\bar{A}| \\ \begin{matrix} |AB\rangle \\ |\bar{A}B\rangle \\ |A\bar{B}\rangle \\ |\bar{A}\bar{B}\rangle \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (24)$$

Мы можем видеть, что перепутанность в данном случае исчезает, поскольку полученную матрицу плотности можно представить в виде $\sum_i k_i \rho_{i1} \rho_{i2}$, где k_i – некоторый весовой коэффициент, ρ_{i1} и ρ_{i2} – некоторые матрицы плотности.

Смешанное перепутанное состояние достаточно сложно в описании. В общем случае самые разные состояния могут быть отнесены к этому классу. По-видимому, для целей наглядности проще всего получить состояние данного типа из уже имеющегося состояния вида (23) путем модификации недиагональных членов. В конечном итоге (после взаимодействия с вакуумом) мы вновь придем к состоянию вида (24).

3.2. Многочастичный случай. Матрица плотности совокупной системы непосредственно зависит от числа ее степеней свободы и, в частности, от числа частиц. Соответственно разница между уже рассмотренным (в предыдущем пункте) случаем эволюции суперпозиционного состояния одной частицы и случаем эволюции состояния нескольких частиц заключается в том, что матрица плотности будет иметь размерность не $N_c \times N_c$, а $N_c^{N_p} \times N_c^{N_p}$, где N_p – число частиц. Таким образом, мы можем условно рассматривать это как увеличение числа возможных цветных состояний системы с N_c (в одночастичном случае) до $N_c^{N_p}$ (в случае N_p частиц). Необходимо, таким образом, внести во все выражения соответствующие изменения. На физическом уровне это можно понимать следующим образом: петля Вильсона обходится по контуру N_p раз – по одному разу на каждую частицу в системе, и столько же раз выполняется функциональное интегрирование (мы можем заменить такую операцию простым возведением в степень ввиду однородности стохастического вакуума). Таким образом, выражение (5) примет вид

$$\hat{\rho}(L) = N_c^{-N_p} \hat{I} + (\hat{\rho}_{\text{in}} - N_c^{-N_p} \hat{I}) W_{\text{adj}}(L). \quad (25)$$

Выражение (8) запишется как

$$\hat{\rho}(L)|_{RT \rightarrow \infty} = N_c^{-N_p} \hat{I}. \quad (26)$$

Тогда степень чистоты (13) примет вид

$$P = N_c^{-N_p} + (1 - N_c^{-N_p}) W_{\text{adj}}^2(L), \quad (27)$$

а степень согласованности (15) – вид

$$F(\hat{\rho}_{\text{in}}, \hat{\rho}(y)) = \text{Tr} \left(\hat{\rho}_{\text{in}} \sqrt{N_c^{-N_p} + (1 - N_c^{-N_p}) W_{\text{adj}}^2(L)} \right). \quad (28)$$

Энтропия фон Неймана (16) в данном случае равна

$$S = N_p \ln N_c. \quad (29)$$

Таблица 1. Общий вид степени чистоты и энтропии различных состояний многочастичной системы до взаимодействия с вакуумом.

Состояние	чистое сепарабельное	смешанное сепарабельное	чистое перепутанное	смешанное перепутанное
P	1	$N_c^{-N_p} \leq P < 1$	1	$N_c^{-N_p} \leq P < 1$
S	0	$0 < S \leq N_p \ln N_c$	0	$0 < S < N_p \ln N_c$

Таблица 2. Общий вид степени чистоты, энтропии и степени согласованности различных состояний многочастичной системы после взаимодействия с вакуумом.

Состояние	чистое сепарабельное	смешанное сепарабельное	чистое перепутанное	смешанное перепутанное
P	$N_c^{-N_p}$	$N_c^{-N_p}$	$N_c^{-N_p}$	$N_c^{-N_p}$
S	$N_p \ln N_c$	$N_p \ln N_c$	$N_p \ln N_c$	$N_p \ln N_c$
F	$N_c^{-N_p/2}$	$N_c^{-N_p/2} < F \leq 1$	$N_c^{-N_p/2}$	$N_c^{-N_p/2} < F < 1$

В табл. 1 приведены квантово-оптические характеристики упомянутых четырех типов состояний до взаимодействия с вакуумом, а в табл. 2 – после взаимодействия.

В последней колонке табл. 2 неравенства строгие, поскольку полностью смешанное состояние не может быть перепутанным.

Из приведенных таблиц можно сделать вывод, что свойства конечного состояния в данном случае целиком определяются размерностью системы (числом частиц и их возможных цветов). Видим, в частности, что во всех возможных случаях энтропия возрастает до максимального значения, т.е. информация теряется, как и в случае квантовой суперпозиции.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной работе было показано, что взаимодействие произвольной цветовой суперпозиции со стохастическим вакуумом КХД на больших расстояниях или при больших промежутках времени приводит к декогеренции и возникновению полностью смешанного цветного состояния с равными вероятностями каждого из цветов. Информация, которая содержалась в недиагональных компонентах начальной матрицы плотности, стирается.

Вычислены квантово-оптические характеристики: степень согласованности, степень чистоты и энтропия фон Неймана, позволяющие проводить оценки потери информации и характеризовать происходящие процессы.

Помимо поведения в вакууме, для цветовой суперпозиции были рассмотрены случаи эволюции систем из двух частиц и их обобщения на произвольное количество частиц. Рассмотрено взаимодействие несепарабельных (перепутанных) состояний

цветных частиц с вакуумом КХД. Показано, что в ходе взаимодействия со стохастическим вакуумом КХД состояния данных систем вырождаются в полностью смешанные, а описывающие их матрицы плотности становятся пропорциональными единичной.

Список литературы

- [1] Ю. А. Симонов, *УФН*, **166**:4 (1996), 337–362.
- [2] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics. An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Sci., Singapore, 2010.
- [3] Д. С. Кузьменко, Ю. А. Симонов, В. И. Шевченко, *УФН*, **174**:1 (2004), 3–18.
- [4] J. Ambjørn, P. Olesen, *Nucl. Phys. B*, **170**:1 (1980), 60–78.
- [5] A. D. Giacomo, H. Dosch, V. I. Shevchenko, Y. A. Simonov, *Phys. Rep.*, **372**:4 (2002), 319–368, arXiv: hep-ph/0007223.
- [6] V. I. Kuvshinov, P. V. Buividovich, *Nonlin. Phenom. Complex Syst.*, **8**:3 (2005), 313–316.
- [7] V. I. Kuvshinov, P. V. Buividovich, *Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl.*, **1**:3 (2008), 579–582.
- [8] В. И. Кувшинов, А. В. Кузьмин, *Калибровочные поля и теория детерминированного хаоса*, Белорусская наука, Минск, 2006.
- [9] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D*, **10**:8 (1974), 2445–2459.
- [10] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, Berlin, 1991.
- [11] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Fundamental Theories of Physics, **72**, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [12] M. Hübner, *Phys. Lett. A*, **163**:4 (1992), 239–242.
- [13] A. Uhlmann, *Rep. Math. Phys.*, **9**:2 (1976), 273–279.
- [14] J. A. Miszczak, Z. Puchala, P. Horodecki, A. Uhlmann, K. Życzkowski, *Quant. Inf. Comput.*, **9**:1–2 (2009), 103–130.
- [15] A. Gilchrist, N. K. Langford, M. A. Nielsen, *Phys. Rev. A*, **71**:6 (2005), 062310, 14 pp., arXiv: quant-ph/0408063.
- [16] V. I. Kuvshinov, A. V. Kuzmin, *Phys. Lett. A.*, **316**:6 (2003), 391–394, arXiv: quant-ph/0310069.
- [17] V. I. Kuvshinov, P. V. Buividovich, *Acta Phys. Pol. B*, **36**:2 (2005), 195–200, arXiv: hep-th/0502234.
- [18] P. Reineker, *Exciton Dynamics in Molecular Crystals and Aggregates*, Springer, Berlin, 1991.
- [19] V. I. Kuvshinov, *Nonlin. Phenom. Complex Syst.*, **16**:1 (2013), 1–6.
- [20] И. Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, М., 1964.