Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, Полиномы Чебышёва для трехмерной алгебры, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 118–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8916>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:37:15

© 2015 г.

В. Д. Ляховский*

ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Используется прямое соответствие между антиинвариантными функциями Вейля и мультивариантными полиномами Чебышёва, что позволило получить сами полиномы Чебышёва. Полученные результаты иллюстрируются полиномами для алгебры C_3 .

Ключевые слова: неприводимые представления алгебр, сингулярные элементы, полиномы Чебышёва.

DOI: 10.4213/tmf8916

1. ВВЕДЕНИЕ

Полиномы Чебышёва от многих переменных образуют полный ортонормированный базис для функций из пространства $\mathcal{L}^2$ на деформированных треугольниках, тетраэдрах и симплексах высших размерностей. Их применяют в квантовой физике [1], [2] и в численном анализе [3].

В работе Корнвиндера [4] была развита идея сведения характеров A_2 -модулей к ортогональным многочленам Чебышёва. Было получено, что их область определения представляет собой искривленный треугольник, ограниченный так называемой гипоциклоидой Штайнера. Систематическое исследование A_n -полиномов Чебышёва от многих переменных было проведено в работе Бирендса [5], где была построена соответствующая мера для пространства $\mathcal{L}_{A_n}^2$.

Важно отметить, что большинство полезных свойств полиномов Чебышёва обусловлено их тесной связью с теорией групп. Свойства симметрии в явном виде могут быть выражены через неприводимые представления алгебр. С учетом этого мы полагаем, что характеры неприводимых модулей старшего веса содержат важную информацию об исходной симметрии. При этом многочлены, возникающие из специализированных характеров, представляют наибольший интерес.

В работе Ляховского и Уварова [6] было найдено простое выражение для меры, определяющей скалярное произведение в пространстве $\mathcal{L}_g^2(X)$. Она обеспечивает ортогональность и нормировку для набора полиномов Чебышёва $\{U_g^\mu(X)\}$.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lyakvladimir@yandex.ru

В настоящей работе мы продолжаем исследование этих мультивариантных полиномов, используя свойства сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$. Предложен метод разложения тензорных произведений фундаментальных модулей в ряд полиномов Чебышёва. В явном виде получены полиномы Чебышёва для алгебры C_3 .

Введем некоторые определения и соотношения:

$\mathfrak{g}$ – полупростые алгебры Ли;

r – ранг $\mathfrak{g}$;

$\Delta_{\mathfrak{g}}$ – корневая система для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$;

$W_{\mathfrak{g}}$ – группа Вейля для системы $\Delta_{\mathfrak{g}}$ со знаковой функцией $\epsilon(w) := \det(w) = (-1)^{\text{length}(w)}$, $w \in W_{\mathfrak{g}}$;

$C^{(0)}$ – фундаментальная камера Вейля, $\overline{C^{(0)}}$ – ее замыкание;

α_i – i -й простой корень для $\mathfrak{g}$, $i = 0, \dots, r$;

ω_i – i -й фундаментальный вес для $\mathfrak{g}$;

$\rho_{\mathfrak{g}}$ – вектор Вейля;

L^{μ} – интегрируемый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом μ ;

$L_{\mathfrak{g}}^{\omega_i}$ – i -й фундаментальный модуль;

$\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho}$ – сингулярный элемент для $\mathfrak{g}$ -модуля L^{μ} ;

$\Phi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho)}$ – несдвинутый сингулярный элемент;

$R_{\mathfrak{g}} := \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+} (1 - e^{-\alpha}) = \Psi_{\mathfrak{g}}^{(0)}$ – знаменатель в формуле Вейля.

2. ПЕРЕХОД К МЕРЕ

Перейдем к полиномам Чебышёва. Мы представляем мультивариантные полиномы Чебышёва, которые образуют ортогональный и нормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^r$. Здесь $a(x)$ – это спиновая плотность на торе в терминах угловых переменных x :

$$a(x) := 2\pi i \sum_{j=1}^r \alpha^j x_j, \quad (1)$$

Рассмотрим характеры полиномов $\text{ch}(L_{\mathfrak{g}}^{\mu})$

$$U_{\mathfrak{g}}^{\mu}(x) := \text{ch}(L^{\mu; a(x)}) = \sum_{\nu \in P} c_{\nu}^{(\mu)} e^{(\nu, a(x))}, \quad (2)$$

где коэффициенты $c_{\nu}^{(\mu)}$ – это весовые множественности для L^{μ} . Фундаментальные модули L^{ω_j} , $j = 1, \dots, r$,

$$\{X^j\} := \{U_{\mathfrak{g}}^{\omega_j}(x)\}_{j=1, \dots, r} \quad (3)$$

дают набор независимых переменных при переходе $X \leftrightarrow x$.

Функции Чебышёва определены как специализированные характеры на полном наборе неприводимых конечномерных модулей $L_{\mathfrak{g}}$. Тогда система $\{U_{\mathfrak{g}}^{\mu}\}_{|\mu \in P^{++}}$ образует базис в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_{\mathfrak{g}})$. Этот базис дает нам выражения для характеров $\{U^{\mu}\}$, образуя набор следующих полиномов: $\{U_{\mathfrak{g}}^{\mu}\}_{|\mu \in P^{++}}$.

Таким образом, удастся определить нормированное инвариантное скалярное произведение для функций $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}$ и найти соответствующую меру μ .

Фундаментальная область $F_{\mathfrak{g}} \subset \overline{C_{\mathfrak{g}}^{(0)}} \subset \mathcal{LP}_{\mathfrak{g}}$ содержит точки ν фундаментальной камеры Вейля $(\nu, \vartheta_{\mathfrak{g}}) \leq 1$, а именно: $F_{\mathfrak{g}} = \text{Conv}\{0, 1/q_1, 2/q_2, \dots, r/q_r\}$. Это значит, что $F_{\mathfrak{g}}$ является замыканием алькова. В угловых переменных фундаментальная область зависит от выбора специализированного вектора $a(x)$. Набор несдвинутых

сингулярных функций на $F_{\mathfrak{g}}(x)$ является ортогональным и нормированным. В формуле

$$\frac{1}{|F_{\mathfrak{g}}(x)||W_{\mathfrak{g}}|} \int_{F_{\mathfrak{g}}(x)} \Phi^{\mu; \alpha(x)} \overline{\Phi^{\lambda; \alpha(x)}} dx^1 \dots dx^r = \delta^{\mu\lambda} \quad (4)$$

$|F_{\mathfrak{g}}(x)|$ и $|W_{\mathfrak{g}}|$ являются объемами фундаментальной области и группы $W_{\mathfrak{g}}$.

Из известной формулы Вейля мы выводим формальные характеры

$$\text{ch}(L^{\mu}) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho} \Big/ \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}}. \quad (5)$$

Затем мы меняем переменные $X \leftrightarrow x$. В результате получим функцию, т.е. меру

$$\frac{\Phi^{0; a(x(X))} \overline{\Phi^{0; a(x(X))}}}{|F_{\mathfrak{g}}(x(X))||W_{\mathfrak{g}}| |\partial X_i / \partial x_j|} dX^1 \dots dX^n = \gamma_{\mathfrak{g}}(X) dX^1 \dots dX^r. \quad (6)$$

В работе [6] было продемонстрировано, что для любой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует уникальная функция $\gamma_{\mathfrak{g}}$, которая может быть выражена в терминах сингулярного элемента $\Phi_{\mathfrak{g}}^{0; a(x(X))}$:

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(X) = \frac{\overline{\Phi_{\mathfrak{g}}^{0; a(x(X))}}}{(2\pi i)^r |F_{\mathfrak{g}}(x(X))| |W_{\mathfrak{g}}|}. \quad (7)$$

Числитель в этой формуле не может быть разложен в линейную комбинацию характеров. Напротив, элемент $(\Phi^{0; a(x(X))})^2$ будет W -инвариантным и может быть выражен в терминах $U^{\nu}(X)$.

Информация, в которой мы нуждаемся, чтобы представить такое разложение, — это достаточный набор полиномов $U^{\nu}(X)$. В частности, нужно разложить W -инвариант $(\Phi^{0; a(X)})^2 = b_{I(p)} X^{I(p)}$. Затем ввести следующие факторы: $\Phi^{0; \alpha(X)} = \sqrt{b_{I(p)}} X^{I(p)}$, $q_{\mathfrak{g}}$ и $(-1)^{\text{maxlength}(W)}$. Второй фактор является числом альковов в области $F(x)$. Третий фактор зависит от свойств сингулярных элементов в соответствии со следующим сопряжением:

$$\gamma_{\mathfrak{g}}(X) = \sqrt{b_{I(p)} X^{I(p)}} \frac{q_{\mathfrak{g}} (-1)^{\text{maxlength}(W)}}{(2\pi i)^r |F_{\mathfrak{g}}(x(X))| |W_{\mathfrak{g}}|}. \quad (8)$$

Таким образом, получена формула для меры.

3. ПОЛИНОМЫ

Рассмотрим тензорное произведение $(L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_2})^{\otimes p_2} \otimes \dots \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r}$ с $\{p_j\} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ и его специализацию $(X^1)^{p_1} \dots (X^r)^{p_r}$. Введем частичное упорядочение в решетке доминантных весов, проецируя вектор $\sum_i p_i \omega_i$ на соответствующий тестовый вектор. Собирая члены с фиксированным доминантным весом $\mu \in P^{++}$, мы получаем положительные целые коэффициенты $m_{\nu}^{I(p)}$. Эти коэффициенты образуют треугольную матрицу $M_{\mathfrak{g}}$, в которой на главной диагонали стоят единицы. При этом нужно зафиксировать область определения для функций в переменных $\{X_j\}$, чтобы найти соответствующую меру μ .

ТЕОРЕМА 1. *Тензорные коэффициенты из разложения $(L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_2})^{\otimes p_2} \otimes \dots \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r}$ в интегрируемом $\mathfrak{g}$ -модуле $L_{\mathfrak{g}}^{(\sum_j l_j \omega_j)}$ имеют вид*

$$\begin{aligned} m_{(\sum_i^{\otimes, r} p_i \omega_i)(\sum_j^r l_j \omega_j)} &= \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 (L_{\mathfrak{g}}^{2\pi i x^1})^{\otimes p_1} \dots (L_{\mathfrak{g}}^{2\pi i x^r})^{\otimes p_r} \Psi_{\mathfrak{g}}^{(0)}(x) \Big|_{\overline{C^{(0)}}} \exp \left[- \sum_i^r 2\pi i l_i x^i \right] dx^1 \dots dx^r. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Характеру мы сопоставляем множители m :

$$\begin{aligned} (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r} &= \\ &= \sum_{\mu \in P_g} m^{(\sum_{i=1}^{\otimes, r} p_i w_i)(\mu)} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho} \Bigg/ \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}) = \\ &= \sum_{\mu \in P_g} m^{(\sum_{i=1}^{\otimes, r} p_i w_i)(\mu)} \frac{\Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}}{\Phi_{\mathfrak{g}}^{(0)} e^{-\rho}}. \end{aligned}$$

Затем умножаем на вектор Вейля, при этом формула $\Phi_{\mathfrak{g}}^{(0)} e^{-\rho} = \Psi_{\mathfrak{g}}^{(0)}$ упрощается,

$$(L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \otimes \dots \otimes (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r} \Phi_{\mathfrak{g}}^{(0)} e^{-\rho} = \sum_{\mu \in P_g} m^{(\sum_{i=1}^{\otimes, r} p_i w_i)(\mu)} \Psi_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}.$$

При переходе к замыканию камеры Вейля

$$(L_{\mathfrak{g}}^{\omega_1})^{\otimes p_1} \dots (L_{\mathfrak{g}}^{\omega_r})^{\otimes p_r} \Phi_{\mathfrak{g}}^{(0)} e^{-\rho} \Big|_{\overline{C(0)}} = \sum_{\mu \in P_g} m^{(\sum_{i=1}^{\otimes, r} p_i w_i)(\mu)} \sum_{w \in W} e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho} \Big|_{\overline{C(0)}}$$

выражение будет содержать один элемент $e^{w \circ (\mu + \rho) - \rho} \Big|_{\overline{C(0)}}$ для каждого μ . Тогда нормированное инвариантное скалярное произведение примет следующий вид:

$$\{1, e^{-\omega_1}, e^{-\omega_2}, \dots, e^{-\omega_r}, e^{-2\omega_1}, e^{-2\omega_2}, \dots, e^{-2\omega_r}, e^{-\omega_1 - \omega_2}, e^{-2\omega_1 - \omega_2}, \dots\}.$$

Затем мы переходим в спиновую плотность в угловых переменных x^j , при этом спиновая плотность момента $\omega_j := 2\pi i x^j$. После интегрирования получается конкретное число:

$$\begin{aligned} m^{(\sum_{i=1}^{\otimes, r} 2\pi i p_i x^i)(\sum_j^r 2\pi i l_j x^j)} &= \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 (L_{\mathfrak{g}}^{2\pi i x^1})^{\otimes p_1} \dots (L_{\mathfrak{g}}^{2\pi i x^r})^{\otimes p_r} \Psi_{\mathfrak{g}}^{(0)}(x) \Big|_{\overline{C(0)}} \exp \left[- \sum_i^r 2\pi i l_i x^i \right] dx^1 \dots dx^r. \end{aligned}$$

Это важный результат работы. Теорема 1 напоминает о формуле Верлинде [7]. Предложенное решение годится для всех алгебр, для которых справедлива формула Вейля (5), и имеет всеобщий характер.

4. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ АЛГЕБРЫ C_3

Рассмотрим алгебру C_3 . Простые корни и фундаментальные веса для этой алгебры показаны на рис. 1.

Фундаментальные веса для алгебры C_3 имеют вид

$$\begin{aligned} L_{C_3}^{\omega_1} &:= e^{\omega_1} + e^{-\omega_1} + e^{(-\omega_1 + \omega_2)} + e^{(-\omega_2 + \omega_3)} + e^{(\omega_2 - \omega_3)} + e^{(\omega_1 - \omega_2)}, \\ L_{C_3}^{\omega_2} &:= e^{\omega_2} + e^{-\omega_2} + e^{(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)} + e^{(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)} + e^{(-\omega_1 + \omega_3)} + e^{(2\omega_1 - \omega_2)} - \\ &\quad - e^{(-\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3)} + 2 + e^{(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)} + e^{(-2\omega_1 + \omega_2)} + e^{(\omega_1 - \omega_3)} + \\ &\quad + e^{(-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)} + e^{(-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)}, \\ L_{C_3}^{\omega_3} &:= e^{\omega_3} + e^{-\omega_3} + e^{(2\omega_2 - \omega_3)} + e^{\omega_1} + e^{(2\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)} + e^{(-\omega_1 + \omega_2)} + e^{(2\omega_1 - \omega_3)} + \\ &\quad + e^{(-\omega_2 + \omega_3)} + e^{(\omega_2 - \omega_3)} + e^{(-2\omega_1 + \omega_3)} + e^{(\omega_1 - \omega_2)} + e^{(-2\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3)} + \\ &\quad + e^{-\omega_1} + e^{(-2\omega_2 + \omega_3)}. \end{aligned}$$

Знаменатель Вейля показан на рис. 2.

Рис. 1. Простые корни α (жирные векторы) и фундаментальные веса ω (тонкие векторы) для алгебры C_3 .

Знаменатель Вейля может быть представлен в виде суммы экспонент:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{C_3}^{(0)} := & +e^{(4\omega_1-3\omega_2+2\omega_3)} + e^{(\omega_1-2\omega_2+3\omega_3)} + e^{(-\omega_1+4\omega_2-\omega_3)} + e^{(2\omega_1+3\omega_2-2\omega_3)} - \\
 & - e^{(\omega_1+3\omega_2+\omega_3)} - e^{(2\omega_1-\omega_2+2\omega_3)} + e^{(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} - e^{(-\omega_1+2\omega_2+\omega_3)} - \\
 & - e^{(\omega_1+4\omega_2-3\omega_3)} - e^{(-\omega_1-\omega_2+3\omega_3)} - e^{(-2\omega_1+5\omega_2-2\omega_3)} - e^{(3\omega_1-4\omega_2+3\omega_3)} + \\
 & + e^{(-2\omega_1+\omega_2+2\omega_3)} - e^{(-5\omega_1+4\omega_2-\omega_3)} - e^{(\omega_1-5\omega_2+3\omega_3)} - e^{(-5\omega_1+\omega_2+\omega_3)} - \\
 & - e^{(4\omega_1-5\omega_2+2\omega_3)} - e^{(3\omega_1+\omega_2-3\omega_3)} - e^{(-3\omega_1-2\omega_2+3\omega_3)} - e^{(5\omega_1-2\omega_2-\omega_3)} - \\
 & - e^{(-3\omega_1+5\omega_2-3\omega_3)} + e^{(5\omega_1-\omega_2-\omega_3)} + e^{(-4\omega_1+5\omega_2-2\omega_3)} + e^{(5\omega_1-4\omega_2+\omega_3)} + \\
 & + e^{(-\omega_1+5\omega_2-3\omega_3)} + e^{(3\omega_1-5\omega_2+3\omega_3)} + e^{(3\omega_1+2\omega_2-3\omega_3)} + e^{(-3\omega_1-\omega_2+3\omega_3)} - \\
 & - e^{(4\omega_1+\omega_2-2\omega_3)} - e^{(-4\omega_1+\omega_2+2\omega_3)} - e^{(-\omega_1-\omega_2-\omega_3)} + e^{(\omega_1-2\omega_2-\omega_3)} + \\
 & + e^{(-\omega_1-3\omega_2+\omega_3)} + e^{(-2\omega_1+\omega_2-2\omega_3)} - e^{(-\omega_1+2\omega_2-3\omega_3)} - e^{(-4\omega_1+3\omega_2-2\omega_3)} - \\
 & - e^{(\omega_1-4\omega_2+\omega_3)} - e^{(2\omega_1-\omega_2-2\omega_3)} - e^{(-2\omega_1-3\omega_2+2\omega_3)} + e^{(\omega_1+\omega_2-3\omega_3)} + \\
 & + e^{(-\omega_1-4\omega_2+3\omega_3)} + e^{(-4\omega_1-\omega_2+2\omega_3)} + e^{(4\omega_1-\omega_2-2\omega_3)} + e^{(-3\omega_1+4\omega_2-3\omega_3)} + \\
 & + e^{(-5\omega_1+2\omega_2+\omega_3)} + e^{(-5\omega_1+3\omega_2-\omega_3)} + e^{(2\omega_1-5\omega_2+2\omega_3)} - e^{(5\omega_1-3\omega_2+\omega_3)}.
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Несдвинутый знаменатель Вейля для алгебры C_3 (48 точек, черные и белые кубики, один белый кубик спрятался за xy -гранью). Фундаментальная камера Вейля $C^{(0)}$ содержит вектор Вейля (черный кубик).

При переходе к координатам угловых переменных $\omega_j = 2\pi i x_j$ знаменатель Вейля становится суммой синусов:

$$\begin{aligned} \Phi_{C_3}^{(0)}(x) := & -2i(\sin(2\pi(3x_1 - x_2 - 2x_3)) - \sin(2\pi(3x_1 - 2x_2 - x_3)) + \\ & + \sin(2\pi(3x_1 + x_2 + 2x_3)) + \sin(2\pi(3x_1 + 2x_2 - x_3)) + \\ & + \sin(2\pi(2x_1 + 3x_2 + x_3)) - \sin(2\pi(3x_1 + 2x_2 + x_3)) - \\ & - \sin(2\pi(2x_1 - x_2 - 3x_3)) + \sin(2\pi(x_1 + 3x_2 - 2x_3)) - \\ & - \sin(2\pi(2x_1 + x_2 + 3x_3)) + \sin(2\pi(x_1 - 3x_2 + 2x_3)) - \\ & - \sin(2\pi(2x_1 - 3x_2 + x_3)) - \sin(2\pi(x_1 + 3x_2 + 2x_3)) - \\ & - \sin(2\pi(2x_1 + 3x_2 - x_3)) + \sin(2\pi(x_1 - 2x_2 - 3x_3)) + \\ & + \sin(2\pi(3x_1 - 2x_2 + x_3)) + \sin(2\pi(2x_1 - x_2 + 3x_3)) + \\ & + \sin(2\pi(2x_1 + x_2 - 3x_3)) + \sin(2\pi(2x_1 - 3x_2 - x_3)) - \\ & - \sin(2\pi(x_1 - 2x_2 + 3x_3)) + \sin(2\pi(x_1 + 2x_2 + 3x_3)) - \\ & - \sin(2\pi(x_1 - 3x_2 - 2x_3)) - \sin(2\pi(3x_1 - x_2 + 2x_3)) - \\ & - \sin(2\pi(x_1 + 2x_2 - 3x_3)) - \sin(2\pi(3x_1 + x_2 - 2x_3))). \end{aligned}$$

Используя полученное выражение, мы можем записать необходимое разложение просто с помощью умножения и специализации переменных $(X_1)^{p_1} \dots (X_r)^{p_r}$. Введем частичное упорядочение, проецируя вектор $\sum_i^r p_i \omega_i$ на соответствующий “положительный” тестовый вектор. Это приводит к упорядочению в наборе моментов $\{X_{I(p)}\}$ и в наборе полиномов Чебышёва.

В терминах сингулярных элементов $\Phi^{(\omega_j)}$ мы получаем произведение тензорных степеней в матрице M_{C_3} , из которого можно получить коэффициенты в полиномах, нормируя 1, x_1 , x_2 , x_3 , и т. д.

Обычно многочлены Чебышёва строятся как решения системы рекуррентных соотношений [8]. Приближение рекуррентных соотношений подобно методу, использованному в тривиальном A_1 -случае. Для любой простой алгебры Ли разложения тензорного произведения дают переход к набору рекуррентных соотношений. Коэффициенты в рекуррентном соотношении могут быть получены либо с помощью алгоритма таблиц умножения Янга (по крайней мере, для рядов A , B и D), либо с помощью алгоритма Климыка (см. [9]). Таким образом, при решении рекуррентных соотношений в наборе можно построить список полиномов Чебышёва.

Наша задача состоит в том, чтобы рассмотреть обратную матрицу к M_{C_3} . Обратная матрица $M_{C_3}^{-1}$ дает нам явные выражения для многочленов Чебышёва $U_{H(p)} = (M_{C_3}^{-1})_{H(p)}^{I(p)} X_{I(p)}$.

Выпишем конкретные коэффициенты в полиномах Чебышёва. В явном виде рассчитаны наборы коэффициентов в полиномах:

$$\begin{aligned}
U_{0,0,0} &:= 1, & U_{1,0,0} &:= X_1, & U_{0,1,0} &:= X_2, & U_{0,0,1} &:= X_3, \\
U_{2,0,0} &:= -1 - X_2 + X_1^2, & U_{1,1,0} &:= X_1 X_2 - X_1 - X_3, & U_{1,0,1} &:= -X_2 + X_1 X_3, \\
U_{0,2,0} &:= X_2 - X_1^2 + X_2^2 - X_1 X_3, & U_{3,0,0} &:= -2X_1 X_2 - X_1 + X_3 + X_1^3, \\
U_{0,1,1} &:= -X_1 X_2 + X_3 + X_2 X_3, & U_{2,1,0} &:= 1 - X_1^2 - X_2^2 - X_1 X_3 + X_1^2 X_2, \\
U_{2,0,1} &:= -X_1 X_2 + X_1 - X_3 - X_2 X_3 + X_1^2 X_3, & U_{0,0,2} &:= -X_2^2 + X_3^2 + X_1 X_3, \\
U_{1,2,0} &:= X_1 X_2 + X_1 - X_1^3 - X_2 X_3 - X_1^2 X_3 + X_1 X_2^2, \\
U_{1,1,1} &:= X_1^2 - X_3^2 - X_1^2 X_2 + X_1 X_2 X_3, \\
U_{4,0,0} &:= X_2 - X_1^2 + X_2^2 + X_1^4 + 2X_1 X_3 - 3X_1^2 X_2, \\
U_{3,1,0} &:= X_1 X_2 + X_1 + X_3 - X_1^3 + 2X_2 X_3 - X_1^2 X_3 - 2X_1 X_2^2 + X_1^3 X_2, \\
U_{1,0,2} &:= X_1 X_2 - X_3 - X_2 X_3 + X_1^2 X_3 - X_1 X_2^2 + X_1 X_3^2, \\
U_{3,0,1} &:= -1 + X_2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_1 X_3 - X_1^2 X_2 + X_1^3 X_3 - 2X_1 X_2 X_3, \\
U_{0,3,0} &:= -1 - X_2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_2^3 + X_1 X_3 - X_1^2 X_2 - 2X_1 X_2 X_3, \\
U_{0,2,1} &:= -X_1 X_2 - X_1 + X_3 + X_1^3 + 3X_2 X_3 - X_1^2 X_3 - X_1 X_2^2 - X_1 X_3^2 + X_2^2 X_3, \\
U_{2,2,0} &:= X_1^2 - X_2^2 - X_1^4 - X_2^3 + X_1 X_3 + 2X_1^2 X_2 - X_1^3 X_3 + X_1^2 X_2^2, \\
U_{2,1,1} &:= X_1 X_2 - X_1 + X_1^2 X_2 X_3 + X_1^3 - X_2 X_3 + X_1 X_2^2 - X_1^3 X_2 - X_1 X_3^2 - \\
&\quad - X_2^2 X_3, \\
U_{0,1,2} &:= X_2 - X_1^2 + X_3^2 - X_2^3 - X_1 X_3 + X_1^2 X_2 + X_2 X_3^2, \\
U_{2,0,2} &:= -X_2 + X_2^2 - X_3^2 + X_2^3 - X_1 X_3 + X_1^2 X_2 + X_1^3 X_3 - X_1^2 X_2^2 - X_2 X_3^2 + \\
&\quad + X_1^2 X_3^2 - 2X_1 X_2 X_3, \\
U_{5,0,0} &:= 2X_1 X_2 - 2X_3 - X_1^3 + X_1^5 - 2X_2 X_3 + 3X_1^2 X_3 + 3X_1 X_2^2 - 4X_1^3 X_2, \\
U_{1,3,0} &:= -X_1 X_2 - X_1 - X_3 - 2X_1^2 X_2 X_3 + X_1^3 - 2X_2 X_3 + 3X_1^2 X_3 + X_1 X_2^2 - \\
&\quad - X_1^3 X_2 + 2X_1 X_3^2 - X_2^2 X_3 + X_1 X_2^3, \\
U_{4,1,0} &:= -2X_2 + X_1^2 - X_3^2 - X_1^4 + X_2^3 + 2X_1^2 X_2 - X_1^3 X_3 - 3X_1^2 X_2^2 + X_1^4 X_2 + \\
&\quad + 4X_1 X_2 X_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{1,2,1} &:= 1 + X_1 X_2^2 X_3 - 2X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + X_1^4 + X_1 X_3 - X_1^3 X_3 - X_1^2 X_2^2 - \\
&\quad - X_2 X_3^2 - X_1^2 X_3^2 + 4X_1 X_2 X_3, \\
U_{4,0,1} &:= -2X_1 - 3X_1^2 X_2 X_3 + X_1^3 - X_1^2 X_3 + 2X_1 X_2^2 - X_1^3 X_2 + 2X_1 X_3^2 + \\
&\quad + X_2^2 X_3 + X_1^4 X_3, \\
U_{0,0,3} &:= 2X_1 X_2 - X_3 - X_1^3 + X_3^3 - 2X_2 X_3 + X_1 X_2^2 + 2X_1 X_3^2 - 2X_2^2 X_3, \\
U_{3,2,0} &:= -2X_1 X_2 + X_1^2 X_2 X_3 + X_1^3 - X_1^5 + 2X_2 X_3 - 2X_1 X_2^2 + 3X_1^3 X_2 - \\
&\quad - X_1 X_3^2 + 2X_2^2 X_3 - 2X_1 X_2^3 - X_1^4 X_3 + X_1^3 X_2^2, \\
U_{1,1,2} &:= -X_1 X_2 + X_1 + X_3 - X_1^3 - X_3^3 - X_1^2 X_3 + X_1 X_2^2 + X_1^3 X_2 - X_1 X_3^2 + \\
&\quad + X_2^2 X_3 - X_1 X_2^3 + X_1 X_2 X_3^2, \\
U_{3,1,1} &:= X_1^3 X_2 X_3 - 2X_1 X_2^2 X_3 - 2X_1^2 + 2X_3^2 + X_1^4 + 2X_1^2 X_2^2 + \\
&\quad + 2X_2 X_3^2 - X_1^2 X_3^2 - X_1^4 X_2 - 2X_1 X_2 X_3, \\
U_{0,4,0} &:= -X_2 - 3X_1 X_2^2 X_3 - X_2^2 + X_3^2 + X_2^3 + X_2^4 - 2X_1 X_3 + X_1^2 X_2 + \\
&\quad + 2X_1^3 X_3 - X_1^2 X_2^2 + 2X_2 X_3^2 + X_1^2 X_3^2 - 2X_1 X_2 X_3, \\
U_{3,0,2} &:= -2X_1 X_2 - 3X_1^2 X_2 X_3 + X_3^3 + 2X_2 X_3 - X_1^2 X_3 + X_1^3 X_2 + 2X_1 X_2^3 + \\
&\quad + X_1^4 X_3 - X_1^3 X_2^2 + X_1^3 X_3^2 - 2X_1 X_2 X_3^2, \\
U_{0,3,1} &:= X_1 - X_3 - X_1^3 + X_3^3 + 2X_2 X_3 - X_1^2 X_3 - 3X_1 X_2^2 + 2X_1^3 X_2 + \\
&\quad + 3X_2^2 X_3 - X_1 X_2^3 + X_2^3 X_3 - 2X_1 X_2 X_3^2, \\
U_{2,3,0} &:= 2X_2 - 2X_1^3 X_2 X_3 + X_1 X_2^2 X_3 - X_1^2 + 2X_2^2 - X_3^2 + X_1^4 - X_2^3 - \\
&\quad - X_2^4 - 2X_1 X_3 - 3X_1^2 X_2 + 3X_1^3 X_3 + 2X_1^2 X_2^2 - X_2 X_3^2 + \\
&\quad + 2X_1^2 X_3^2 - X_1^4 X_2 + X_1^2 X_2^3 - 2X_1 X_2 X_3, \\
U_{5,0,0} &:= 2X_1 X_2 - 2X_3 - X_1^3 + X_1^5 - 2X_2 X_3 + 3X_1^2 X_3 + 3X_1 X_2^2 - 4X_1^3 X_2, \\
U_{1,0,3} &:= -X_2 - 2X_1 X_2^2 X_3 + X_1^2 - X_3^2 - X_1^4 + X_2^3 + X_1^2 X_2 + X_1^2 X_2^2 - \\
&\quad - X_2 X_3^2 + 2X_1^2 X_3^2 + X_1 X_3^3 - 2X_1 X_2 X_3, \\
U_{2,2,1} &:= 2X_1 X_2 + 2X_1 + 5X_1^2 X_2 X_3 - 3X_1^3 + X_1^5 - 2X_2 X_3 + X_1^2 X_3 - \\
&\quad - X_1^3 X_2 - 3X_2^2 X_3 + X_1 X_2^3 - X_1^4 X_3 - X_1^3 X_2^2 - X_1^3 X_3^2 - \\
&\quad - X_2^3 X_3 + X_1^2 X_2^2 X_3, \\
U_{6,0,0} &:= X_2 - X_2^2 + X_3^2 - X_1^4 - X_2^3 + X_1^6 - 4X_1 X_3 + 3X_1^2 X_2 + 4X_1^3 X_3 + \\
&\quad + 6X_1^2 X_2^2 - 5X_1^4 X_2 - 6X_1 X_2 X_3
\end{aligned}$$

и т. д.

Итак, получены полиномы для алгебры C_3 – это бесконечный ряд (мультивариантная функция Чебышёва).

При переходе к формуле меры можно записать элемент

$$\begin{aligned}
b_{I(p)} X^{I(p)} &= X_1^2 X_2^2 X_3^2 + 18X_1 X_2 X_3^3 + 86X_1^2 X_2 X_3^2 - 96X_1 X_2^3 X_3 + \\
&\quad + 94X_1^3 X_2 X_3 + 22X_1^3 X_2^2 X_3 - 738X_1 X_2 X_3 - 216X_1 X_2^2 X_3 + \\
&\quad + 256X_2 + 298X_2^2 + 95X_1^4 + 59X_1^2 - 32X_2^4 + 443X_3^2 - \\
&\quad - 107X_2^3 + 16X_2^5 + 15X_1^6 - 27X_3^4 - 414X_1^2 X_2 + 374X_1^2 X_2^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12X_1^5X_3 - 7X_1^4X_2^2 - 20X_1^4X_3^2 - 122X_1^2X_3^2 - 144X_1X_3^3 + \\
& + 384X_2X_3^2 + 36X_1^2X_2^3 + 132X_2^2X_3^2 - 4X_1^2X_2^4 - 4X_2^3X_3^2 + \\
& + 220X_1^3X_3 - 157X_1^4X_2 + 30X_1X_3 - 4X_1^3X_3^3 - 512,
\end{aligned}$$

который W -инвариантен и может быть выражен в терминах функций Чебышёва.

Таким образом, получена формула для меры

$$\gamma_{C_3}(X) = \sqrt{b_{I(p)} X^{I(p)}} \frac{q_{C_3}(-1)^{\text{maxlength}(W)}}{(2\pi i)^r |F_{C_3}| |W_{C_3}|}. \quad (9)$$

Все полиномы Чебышёва для алгебры C_3 определены формулой $U_{H(p)}$.

Благодарности. Я благодарен Юрию Викторовичу Новожилову, моему Учителю. Он верил, что любой человек может быть творческим. Я также благодарен Организационному комитету Международной конференции “В поисках фундаментальных симметрий” за возможность представить работу. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-03148).

Список литературы

- [1] G. Dupont, *Algebr. Represent. Theor.*, **15**:3, 527–549.
- [2] В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 379–387.
- [3] G. von Gehlen, S.-S. Roan, “The superintegrable chiral Potts quantum chain and generalized Chebyshev polynomials”, *Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory* (Kiev, 2000), NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, **35**, eds. S. Pakuliak, G. von Gehlen, Kluwer, Dordrecht, 2001, 155–172, arXiv: hep-th/0104144.
- [4] T. H. Koornwinder, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **77** (1974), 48–66; 357–381.
- [5] R. J. Beerends, “Chebyshev polynomials in several variables and the radial part Laplace–Beltrami operator”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **328**:2 (1991), 779–814.
- [6] V. D. Lyakhovsky, Ph. V. Uvarov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:12 (2013), 125201, 22 pp.
- [7] E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **300**:3 (1988), 360–376.
- [8] B. Ryland, “Multivariate Chebyshev approximation”, *Manifolds and Geometric Integration Colloquia MaGIC-2008* (Renon, Bolzano, Italy, February 18–21, 2008), www.math.ntnu.no/num/magic/2008.
- [9] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Springer, Berlin, 1997.