Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Аристов, Р. А. Ниязов, Неопределенность в перенормировке кондактанса X -образного контакта между квантовыми проволоками со взаимодействием латтинджерского типа, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 57–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8918>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:37:00

© 2015 г.

Д. Н. Аристов^{*†}, Р. А. Ниязов^{*†}

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ В ПЕРЕНОРМИРОВКЕ КОНДАКТАНСА Х-ОБРАЗНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ КВАНТОВЫМИ ПРОВОЛОКАМИ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЛАТТИНДЖЕРОВСКОГО ТИПА

Исследуется перенормировка контакта четырех полубесконечных проводов в формализме состояний рассеяния. Используется модель бесспиновых фермионов с короткодействующим взаимодействием латтинджеровского типа. Найдена система ренормгрупповых уравнений для кондактансов системы в первом порядке по взаимодействию. В отличие от хорошо известных случаев контакта двух и трех проводов, случай четырех проводов не допускает формулировки уравнений ренормгруппы в терминах только кондактансов. Возникающая неопределенность связана с произволом выбора знаков для элементов S -матрицы, относящихся к одинаковым матрицам кондактанса. Возможная причина этой неопределенности связана с симметрией гамильтониана типа частица–дырка. Показано наличие двух различных потоков ренормгруппы для любой начальной точки в пространстве кондактансов. Обнаруженная неоднозначность не влияет на скейлинговые показатели в стационарных точках.

Ключевые слова: ренормализационная группа, жидкость Латтинжера, электрический кондактанс.

DOI: 10.4213/tmf8918

1. ВВЕДЕНИЕ

Более пятидесяти лет одномерные системы взаимодействующих фермионов служат в качестве игрушечных моделей для теоретиков [1]. Технологические успехи последних двадцати лет выдвинули эти модели на передний фронт современных исследований в области физики на масштабе нанометров. Примерами таких систем могут быть углеродные нанотрубки [2], одномерные краевые состояния в режиме

^{*}Научно-исследовательский центр “Курчатовский Институт”, Петербургский институт ядерной физики, Гатчина, Ленинградская обл., Россия. E-mail: d.aristov@spbu.ru

[†]Физический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: r.niyazov@spbu.ru

квантового эффекта Холла [3] и в топологических диэлектриках [4], [5]. Одномерные проводники и контакты между ними должны быть важными компонентами любых будущих электронных устройств [6]. Хорошо известно, что прозрачность (кондактанс) таких контактов по отношению к электрическому току перенормируется из-за взаимодействия между фермионами в проволоке. В физическом случае электронного отталкивания этот кондактанс при низких температурах и малых напряжениях смещения стремится к нулю по степенному закону с показателем, который определяется силой взаимодействия.

Имеются два подхода, разработанных для описания этой перенормировки кондактанса. В одном подходе используется так называемая техника бозонизации, в которой точно учитывается взаимодействие между электронами в объеме проволоки, а контакт рассматривается как граница [7]. Система описывается в терминах хиральных фермионных плотностей (токов), и на эти токи налагаются граничные условия. Определяются стационарные точки (СТ) воздействия границ, и возмущения вокруг них классифицируются согласно их скейлинговым показателям [8], [9]. Таким образом, можно судить о (не)устойчивости различных СТ, т. е. о предельных значениях кондактанса, получаемых в процессе перенормировки.

Другой подход к перенормировке кондактанса был изначально сформулирован для инфинитезимально малого взаимодействия в объеме. В этом подходе произвольный контакт описывается с помощью унитарной S -матрицы, определенной в отсутствие взаимодействия [10]. Для N полупроволок, соединяющихся в одном контакте, эта матрица принадлежит группе $U(N)$. Фермионные волновые функции задаются в формализме состояний рассеяния, а затем вычисляются поправки к S -матрице [11]. Эти поправки логарифмически расходятся, что в конце концов приводит к уравниванию ренормализационной группы (РГ) для S -матрицы и кондактанса. Данный подход был существенно улучшен в работах [12], [13] с помощью учета высших порядков по взаимодействию и субглавных логарифмов в теории возмущений для кондактанса. С помощью суммирования возникающего ряда было получено непертурбативное уравнение РГ для кондактанса, решения которого прекрасно воспроизводят скейлинговые показатели, точно известные из работ, использующих технику бозонизации.

До сих пор основное внимание при теоретическом анализе было сконцентрировано на более простых случаях $N = 2$ и $N = 3$, которые описывают соответственно примесь в одной проволоке и Y-образный контакт из трех проволок. Случаю четырехпроводочного контакта с $N = 4$ уделялось меньше внимания, частично из-за трудностей при описании S -матрицы и последующего анализа уравнения РГ даже в низшем порядке теории возмущений. Упомянем недавние исследования специальных модельных случаев S -матрицы с $N = 4$ в связи с исследованием регулярных сетей жидкостей Латтинжера [14], сверхпроводящих гибридных контактов [15] и процессов туннелирования между двумя спиральными краевыми состояниями топологических диэлектриков [16].

Заметим, что во всех предыдущих исследованиях двух- и трехпроводочных контактов уравнения РГ, записанные в терминах S -матрицы и матрицы кондактансов (которая определяется с помощью квадратов матричных элементов $|S_{ij}|^2$), были эквивалентны. Такая же эквивалентность имеет место в рассмотренных ранее более простых модельных случаях четырехпроводочных контактов. Однако при $N > 4$

не существует взаимно однозначного соответствия между матрицей кондактансов и S -матрицей даже после удаления тривиальных фазовых факторов. В математике это известно как неопределенность при восстановлении унитарных матриц из унistoхастических [17], [18]. В общем случае эта неопределенность может быть даже непрерывной и трехмерной, в то время как в нашей модели ниже мы находим лишь двойную дискретную неопределенность, которая, как доказано в работе [18], является минимальной неопределенностью для симметричной S -матрицы, принадлежащей группе $U(4)$.

Основная цель нашей статьи заключается в демонстрации этой неопределенности уже в уравнениях РГ первого порядка. Мы показываем, что для конкретного физически обусловленного класса S -матриц описание контакта в терминах кондактансов является неполным. Мы находим два возможных потока РГ, исходящих из любой точки в пространстве кондактансов. Данная неопределенность не влияет на СТ и скейлинговые показатели.

Мы определяем нашу модель в разделе 2, объясняем понятие приведенных кондактансов в разделе 3 и обсуждаем уравнения РГ в разделе 4. Неопределенность уравнений РГ обнаруживается и обсуждается в разделе 5, заключительные замечания представлены в разделе 6.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим модель взаимодействующих бесспиновых фермионов, описывающих две квантовые проволоки, соединенные посередине. В качестве альтернативы можно говорить о четырех полупроволоках, соединенных в единственной точке. В непрерывном пределе, линеаризуя спектр в окрестности энергии Ферми и учитывая взаимодействие типа “рассеяния вперед” с интенсивностью g_j в проволоке j , мы можем написать гамильтониан для жидкости Томонаги–Латтинжера в формализме состояний рассеяния в проволоке j (в представлении фермионных операторов $\psi_{j,\text{in}}$, $\psi_{j,\text{out}}$), см. рис. 1:

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^0 dx [H_j^0 + H_j^{\text{int}}], \quad (1)$$

$$H^0 = v_F \Psi_{\text{in}}^\dagger i \nabla \Psi_{\text{in}} - v_F \Psi_{\text{out}}^\dagger i \nabla \Psi_{\text{out}}, \quad H^{\text{int}} = 2\pi v_F \sum_{j=1}^4 g_j \hat{\rho}_j \hat{\rho}_j \Theta(x; -L, -l).$$

Здесь $\Psi_{\text{in}} = (\psi_{1,\text{in}}, \psi_{2,\text{in}}, \psi_{3,\text{in}}, \psi_{4,\text{in}})$ обозначает векторный оператор налетающих фермионов, а соответствующий векторный оператор рассеянных фермионов выражается с помощью S -матрицы как $\Psi_{\text{out}}(x) = S \Psi_{\text{in}}(-x)$. В хиральном представлении мы используем отрицательную (положительную) полуось, соответствующую приходящим (уходящим) волнам.

Мы рассматриваем квантовые проволоки конечной длины L , контактирующие с резервуарами. Контакт проволоки и резервуара предполагается адиабатическим (т. е. не создает дополнительного потенциального рассеяния). Предполагается что контакт обладает микроскопической протяженностью l порядка длины волны Ферми. Эффектами взаимодействия внутри контакта пренебрегаем. Это моделируется с помощью функции окна $\Theta(x; -L, -l)$, которая равна единице, если $-L < x < -l$, и нулю в других случаях. Таким образом, область $x < -L$ рассматривается как

Рис. 1. Четырехпроводочный контакт квантовых проволок, соответствующий гамильтониану (1).

резервуар или питающий провод, пронумерованный индексом $j = 1, 2, 3, 4$. С этого момента мы считаем, что скорость Ферми $v_F = 1$.

Член в гамильтониане, отвечающий за взаимодействие, выражается в терминах операторов плотности

$$\hat{\rho}_{j,\text{in}} = \Psi^+ \rho_j \Psi = \hat{\rho}_j, \quad \hat{\rho}_{j,\text{out}} = \Psi^+ \tilde{\rho}_j \Psi = \hat{\tilde{\rho}}_j,$$

где $\tilde{\rho}_j = S^+ \rho_j S$, а матрицы плотности задаются с помощью выражений

$$(\rho_j)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j}, \quad (\tilde{\rho}_j)_{\alpha\beta} = S_{\alpha j}^+ S_{j\beta}.$$

S -матрица описывает рассеяние на контакте и принадлежит группе $U(4)$.

3. ПРИВЕДЕННЫЕ КОНДАКТАНСЫ

В режиме линейного отклика наша система характеризуется матрицей кондактансов C , элементы которой задаются равенствами $I_i = \sum_j C_{ij} V_j$, где I_i – ток, протекающий в проволоке i , и V_j – напряжение, приложенное к проволоке j . Условие сохранения тока $\sum_i I_i = 0$ и отсутствие отклика на одинаковое изменение напряжения приводит к правилам Кирхгофа

$$\sum_i C_{ij} = \sum_j C_{ij} = 0.$$

Это наводит на мысль, что можно выбрать более удобные линейные комбинации величин I_i и V_j , уменьшая число независимых компонент в матрице C . В пределе постоянного тока кондактанс получается из формулы Кубо как $C_{ij} = (\delta_{ij} - Y_{ij})/2$, где $Y_{ij} = |S_{ij}|^2$; также можно записать $Y_{ij} = \text{Tr}(\tilde{\rho}_i \rho_j)$ [19].

Подходящее представление для матрицы приведенных кондактансов можно построить с помощью генераторов подалгебры Картана в $U(4)$, которыми являются три бесследовые диагональные матрицы и единичная матрица. Положим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \text{diag}(1, -1, 0, 0), & \mu_2 &= \text{diag}(0, 0, 1, -1), \\ \mu_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(1, 1, -1, -1), & \mu_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{diag}(1, 1, 1, 1), \end{aligned} \quad (2)$$

при этом $\text{Tr}(\mu_j \mu_k) = 2\delta_{jk}$, $j = 1, \dots, 4$. Плотности выражаются как

$$\rho_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k R_{jk} \mu_k,$$

где (4×4) -матрица $\mathbf{R}$ имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

и обладает свойствами $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, $\det \mathbf{R} = 1$.

Амплитуды рассеянных волн выражаются сходным образом, нужно только заменить параметры μ_j на $\tilde{\mu}_j = S^+ \mu_j S$. Это также означает [20], что мы работаем с комбинациями токов и напряжений вида

$$I_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k R_{ik} I_k^{\text{new}}, \quad V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k R_{ik} V_k^{\text{new}}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} I_1^{\text{new}} &= \frac{I_1 - I_2}{2}, & V_1^{\text{new}} &= \frac{V_1 - V_2}{2}, \\ I_2^{\text{new}} &= \frac{I_3 - I_4}{2}, & V_2^{\text{new}} &= \frac{V_3 - V_2}{4}, \\ I_3^{\text{new}} &= \frac{I_1 + I_2 - I_3 - I_4}{\sqrt{8}}, & V_3^{\text{new}} &= \frac{V_1 + V_2 - V_3 - V_4}{\sqrt{8}}, \\ I_4^{\text{new}} &= \sum_j \frac{I_j}{\sqrt{8}}, & V_4^{\text{new}} &= \sum_j \frac{V_j}{\sqrt{8}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Можно было бы использовать более физические комбинации типа $V_1 - V_2$ и пр. без дополнительных множителей $1/2$, $1/\sqrt{8}$ (см. работу [19]), однако для дальнейших вычислений это не имеет значения.

Матрица приведенных кондактансов в таком базисе определяется с помощью выражения $\mathbf{G} = \mathbf{R} \mathbf{C} \mathbf{R}^T$ и имеет блочно-диагональную структуру

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} [\cdot] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где левый верхний блок имеет размер 3×3 . В присутствии взаимодействия структура последнего выражения остается прежней, но элементы изменяются. Основной эффект в пределе постоянного тока может быть описан с помощью перенормировки S -матрицы [19], что приводит к перенормированной величине

$$Y_{ij}^{\text{R}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\mu}_i^{\text{r}} \mu_j), \quad (6)$$

где верхний индекс R показывает, что мы работаем в базисе μ_j вместо ρ_j , а верхний индекс g означает, что величина полностью перенормирована взаимодействиями. Всюду далее мы полагаем, что все величины перенормированы, и опускаем последний верхний индекс.

4. УРАВНЕНИЯ РГ

Перенормировка кондактансов в результате взаимодействий определяется вычислением поправочных членов в каждом порядке теории возмущений по g_j . В частности, мы интересуемся вкладами, зависящими от масштаба и пропорциональными $\Lambda = \ln(L/l)$; здесь L и l – две длины, характеризующие область взаимодействий в проволоках (см. уравнение (1)). Вышеприведенные выражения для Λ соответствуют малой температуре, $T \ll v_F/L$, а для более высоких температур мы должны сделать замену $\Lambda = \ln(l^{-1}/\max[L^{-1}, T/v_F])$. В низшем порядке теории возмущений вклад в кондактансы, зависящий от масштаба, дается выражением [21]

$$G_{jk} = G_{jk}|_{\mathbf{g}=0} + \frac{1}{2} \sum_{l,m} \text{Tr}[\widehat{W}_{jk} \widehat{W}_{lm}] g_{ml} \Lambda, \quad (7)$$

где $G_{jk}|_{\mathbf{g}=0} = \delta_{jk} - Y_{jk}$, а $\widehat{W}_{jk} = [\rho_j, \bar{\rho}_k]$ – набор из шестнадцати (4×4) -матриц (произведения матриц $\widehat{W}$ являются матричными), $g_{ml} = g_m \delta_{ml}$ – элементы матрицы $\mathbf{g}$ констант взаимодействия. Операция взятия следа определяется в пространстве вышеприведенных (4×4) -матриц $\widehat{W}$.

Мы умножаем G_{ij} на $\mathbf{R}^T$ слева и на $\mathbf{R}$ справа и получаем компоненты $\mathbf{Y}^R$ в виде

$$Y_{jk}^R = Y_{jk}^R|_{\mathbf{g}=0} - \frac{1}{2} \sum_{l,m} \text{Tr}[\widehat{W}_{jk}^R \widehat{W}_{lm}^R] g_{ml}^R. \quad (8)$$

Дифференцируя эти выражения по Λ (и затем полагая $\Lambda = 0$), мы находим уравнения РГ в первом порядке по взаимодействию:

$$\frac{d}{d\Lambda} Y_{jk}^R = -\frac{1}{2} \sum_{l,m} \text{Tr}[\widehat{W}_{jk}^R \widehat{W}_{lm}^R] g_{ml}^R, \quad (9)$$

где $g_{ml}^R = (\mathbf{R}^T \mathbf{g} \mathbf{R})_{ml}$. Число ненулевых матриц $\widehat{W}_{jk}^R = \{\mathbf{R}^T \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{R}\}_{jk}$ уменьшается до девяти в самом общем случае, так как $\widehat{W}_{j4}^R = \widehat{W}_{4j}^R = 0$. Матрицы $\widehat{W}_{jk}^R$ можно вычислить с помощью компьютерной алгебры.

5. ЯВЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПОТОКА РГ

Мы продолжаем наш анализ, выбирая подходящим образом взаимодействие g_{ij} и параметризацию S -матрицы. Сначала будем считать, что константы взаимодействия одинаковы для обеих проволок, $\mathbf{g} = \text{diag}(g, g, g, g)$, и параметризуем S -матрицу с помощью трех углов следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} r_1 & t_1 & f_2 & f_2 \\ t_1 & r_1 & f_2 & f_2 \\ f_1 & f_1 & r_2 & t_2 \\ f_1 & f_1 & t_2 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}(e^{-i\alpha_1} + \cos \beta), \quad t_1 = \frac{1}{2}(-e^{-i\alpha_1} + \cos \beta), \\ r_2 &= \frac{1}{2}(e^{-i\alpha_2} + \cos \beta), \quad t_2 = \frac{1}{2}(-e^{-i\alpha_2} + \cos \beta), \\ f_1 &= f_2 = \frac{i}{2} \sin \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Параметризация (10) описывает как пропускание и отражение в каждой проволоке (с помощью параметров α_1, α_2), так и перескок между проволоками (параметр β). Уравнение (7) является инвариантным относительно “изменения фазы”, т. е. умножения S -матрицы с обеих сторон на унитарные матрицы вида $\text{diag}(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}, e^{i\gamma_3}, e^{i\gamma_4})$. Без потери общности мы можем полагать, что $\beta \in [0, \pi/2]$, $\alpha_{1,2} \in [-\pi, \pi]$.

Вычисление матриц приведенных кондактансов (6) дает

$$\mathbf{Y}^R = \text{diag}(\cos \beta \cos \alpha_1, \cos \beta \cos \alpha_2, \cos^2 \beta) = \text{diag}(a_1, a_2, b). \quad (12)$$

Матричная форма уравнения РГ (9) теперь записывается как набор связанных уравнений РГ для компонент матрицы $\mathbf{Y}^R$ в терминах начальных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dY_{11}^R}{d\Lambda} &= g \left(\frac{1}{4} \sin^2 \beta (\cos \alpha_1 (2 \cos \beta + \cos \alpha_2) - 3) + \right. \\ &\quad \left. + 1 - \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \beta - \frac{1}{4} \sin^2 \beta \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \right), \\ \frac{dY_{22}^R}{d\Lambda} &= \frac{dY_{11}^R}{d\Lambda} \Big|_{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2}, \\ \frac{dY_{33}^R}{d\Lambda} &= g \sin^2 \beta \cos \beta \left(\frac{1}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + \cos \beta \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Наше естественное желание заключается в том, чтобы записать эти уравнения полностью в терминах кондактансов, как это было успешно сделано в наших предыдущих работах [12], [22], [13] для случая стыка двух и трех полунитей.

Мы имеем три независимые компоненты матрицы приведенных кондактансов, которые обозначены как a_1, a_2 , и b в формуле (12). Попытка записать правую часть уравнений РГ (13) в терминах a_1, a_2, b наталкивается на проблему неопределенности в члене $\propto \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$. Знак этого члена зависит от диапазона углов: если α_1 и α_2 принадлежат либо интервалу $(0, \pi)$, либо интервалу $(-\pi, 0)$, то $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2$ является положительной величиной, но если α_1 и α_2 принадлежат разным интервалам $(0, \pi)$ и $(-\pi, 0)$, то обсуждаемый член является отрицательным. Заметим, что значения кондактансов a_1 и a_2 не зависят от замены знака $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_1$ и $\alpha_2 \rightarrow -\alpha_2$ соответственно. Это изменение знака соответствует комплексному сопряжению некоторых элементов S -матрицы (10), а именно $r_i \rightarrow r_i^*$ и $t_i \rightarrow t_i^*$, что не может быть скомпенсировано с помощью операций “изменения фазы”.

Можно задать вопрос (см. рис. 2), что означает внутренняя дискретная симметрия, проявляющаяся на уровне уравнений РГ? Чтобы ответить на этот вопрос, мы рассмотрим две несвязанные ($\beta = 0$) жидкости Латтинжера с примесями. Стандартные вычисления [12] показывают, что (по крайней мере в низшем борновском

Рис. 2. Точечный контакт двух проволок показан схематически и иллюстрирует дискретные симметрии S -матрицы (10).

приближении) фаза α_j равна U_{bs}/v_F , где U_{bs} — амплитуда рассеяния назад от примеси в j -й проволоке. Знак амплитуды U_{bs} не имеет значения, так как только ее квадрат $|U_{bs}|^2$ определяет кондактанс [7]. Если допустить перескок между проволоками, то начинает проявляться различие между двумя случаями: когда потенциалы рассеяния в обеих проволоках имеют одинаковые знаки, т. е. в обеих проволоках имеется либо горб, либо впадина, или когда потенциалы рассеяния в проволоках имеют разные знаки, т. е. присутствуют горб на одной и впадина на другой. Другое объяснение проблемы знака в уравнении (13) связано с симметрией гамильтониана (1) типа частица–дырка. На уровне несвязанных проволок знак величины U_{bs} (величины α_j) меняется при переходе к дырочному описанию, $\Psi_{in} \rightarrow \Psi_{in}^\dagger$ и т. д. Тогда можно считать, что проблема знака возникает при попытке произвести преобразование типа частица–дырка в одной проволоке.

Мы видим, что уравнения РГ нельзя определить в терминах только кондактансов. В общем случае мы имеем два разных потока РГ для кондактансов, и выбор между ними должен быть сделан на основе начальных фаз α_1 и α_2 S -матрицы. Дальнейший анализ уравнений РГ показывает, что эта неопределенность не влияет на положение СТ. У нас есть четыре СТ, задающиеся условиями $a_1 = \pm 1$, $a_2 = \pm 1$ и $b = 1$, что отвечает $\alpha_{1,2} = 0$ или $\alpha_{1,2} = \pi$ и $\beta = 0$ в терминах углов. Эти СТ соответствуют простым случаям двух отдельных проволок с полным пропусканием или полным отражением в каждой из них. Пятая СТ определяется равенствами $a_1 = a_2 = b = 0$ и обсуждается ниже.

Для выяснения характера различных СТ мы обобщим наш анализ и рассмотрим различные константы взаимодействия в двух проволоках:

$$\mathbf{g} = \text{diag}(g_1, g_1, g_2, g_2). \quad (14)$$

Представление уравнений РГ только в терминах кондактансов является громоздким, и мы переписываем их в терминах углов [19]:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\Lambda} &= -\frac{1}{4\cos\beta} (g_1(1 + 3\cos^2\beta)\sin\alpha_1 - g_2\sin^2\beta\sin\alpha_2), \\ \frac{d\alpha_2}{d\Lambda} &= \frac{d\alpha_1}{d\Lambda} \Big|_{\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2, g_1 \leftrightarrow g_2}, \\ \frac{d\beta}{d\Lambda} &= -\frac{1}{4}\sin\beta (g_1\cos\alpha_1 + g_2\cos\alpha_2 + (g_1 + g_2)\cos\beta). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь вновь заметна такая же неопределенность уравнений РГ в терминах кондактансов, что и выше. Можно произвести замену, например $\alpha_2 \rightarrow -\alpha_2$, не меняя кондактансы, но изменяя потоки РГ.

Как и прежде, мы наблюдаем четыре универсальные СТ, отвечающие $\alpha_{1,2} = 0$ или $\alpha_{1,2} = \pi$ и $\beta = 0$ (т.е. $a_{1,2} = \pm 1$ и $b = 1$). Только одна из этих четырех точек является устойчивой и определяется знаком взаимодействия в отдельной проволоке. Согласно обычным представлениям [7], [10] мы имеем следующее равенство для устойчивых СТ: $a_j = \text{sgn } g_j$. Кроме того, мы находим пятую неуниверсальную СТ, которая никогда не бывает устойчивой, и уравнения, задающие ее положение, принимают компактную форму в терминах кондактансов:

$$a_1 = -a_2 = \frac{g_2 - g_1}{g_1 + g_2}, \quad b = a_1^2. \quad (16)$$

Эта СТ находится в физической области кондактансов при $|a_1| < 1$, т.е. при $g_1 g_2 > 0$.

Мы демонстрируем наши результаты на рис. 3, где показана совокупность разрешенных значений кондактансов и возможных траекторий РГ, исходящих из одной и той же точки в пространстве кондактансов для различных значений g_1, g_2 . Мы видим, что устойчивая СТ зависит от квадранта плоскости (g_1, g_2) аналогично случаю с Y-образным контактом [21]. Мы также видим, что существуют два возможных потока РГ, ведущих к той же устойчивой СТ (более темная траектория РГ на рисунке соответствует знаку плюс в неопределенности, а более светлая – знаку минус). Можно проверить, что обсуждающаяся неопределенность в знаке не влияет на скейлинговые показатели вблизи СТ. Два возможных потока РГ приводят только к различным префакторам в скейлинговой зависимости кондактансов. Например, для отталкивающего взаимодействия в обеих проволоках ($g_1, g_2 > 0$), если поток РГ начинается вблизи СТ, для которой $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \beta \ll 1$, мы имеем

$$1 - a_{1,2} \sim \beta^2 e^{-(g_1 + g_2)\Lambda} + \alpha_{1,2}^2 e^{-2g_{1,2}\Lambda}, \quad 1 - b \sim 2\beta^2 e^{-(g_1 + g_2)\Lambda}. \quad (17)$$

Две возможные траектории РГ, начинающиеся далеко от окрестности такой СТ, оканчиваются в разных точках α_j, β в (17), но скейлинговый закон такой же.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе мы изучали контакт между четырьмя полубесконечными проволоками со взаимодействием типа бесспиновой жидкости Латтинжера с помощью фермионного представления в формализме состояний рассеяния. Взаимодействие в проволоках приводит к перенормировке кондактансов системы, записанной в терминах абсолютных значений элементов S -матрицы. Уравнение РГ для кондактансов обычно можно сформулировать полностью в терминах кондактансов, что было показано в явном виде для двух- и трехпроводочных контактов общего вида. Мы продемонстрировали, что в случае четырехпроводочного контакта уравнения РГ обладают неопределенностью в знаке, которую нельзя разрешить в терминах кондактансов. С математической точки зрения эта неопределенность является свойством, внутренне присущим группе $U(4)$, и проще всего иллюстрируется выбором знака, который различает левую и правую изоклинные подгруппы $SO(4) \subset U(4)$. С физической точки зрения причину неопределенности можно свести к симметрии нашего

Рис. 3. СТ и траектории РГ в пространстве кондактансов. Две возможные траектории ведут к притягивающей СТ, которая определяется знаками взаимодействия в проволоках. Видно, что потоки РГ кондактансов являются немонотонными функциями скейлинговой переменной. Пятая неуниверсальная СТ появляется при $g_1 g_2 > 0$, и ее положение определяется уравнением (16).

гамильтониана относительно преобразования частица–дырка. Это явление приводит к двум возможным немонотонным зависимостям перенормированных кондактансов как функций скейлинговой переменной.

Если бы в нашем анализе мы использовали подход, связанный с бозонизацией, то мы не заметили бы обсуждающуюся неопределенность. Это связано с тем, что бозонизация начинает анализ вблизи СТ уравнений РГ и изучает скейлинговые размерности возмущений вокруг нее. Мы показали, что конкретная траектория потока РГ не влияет на скейлинговые размерности (показатели) и определяет только префактор в степенной зависимости кондактанса. Это эффект можно наблюдать, лишь изучая поток РГ из удаленных точек в пространстве кондактансов, ведущий в ближайшую окрестность СТ. Мы полагаем, что обсуждавшаяся неопределенность может быть важна для дальнейших теоретических и экспериментальных исследований в области Х-образных контактов между квантовыми проволоками.

Благодарности. Мы благодарны П. Вольфле за полезное обсуждение. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-22-00281).

Список литературы

- [1] T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [2] H. T. Mebrahtu, I. V. Borzenets, H. Zheng, Y. V. Bomze, A. I. Smirnov, S. Florens, H. U. Baranger, G. Finkelstein, *Nature Phys.*, **9**:11 (2013), 732–737.
- [3] S. Jezouin, M. Albert, F. D. Parmentier, A. Anthore, U. Gennser, A. Cavanna, I. Safi, F. Pierre, *Nature Commun.*, **4** (2013), 1802, 8 pp., arXiv:1301.4159.
- [4] M. Z. Hasan, C. L. Kane, *Rev. Modern Phys.*, **82**:4 (2010), 3045–3067.
- [5] X.-L. Qi, S.-C. Zhang, *Rev. Modern Phys.*, **83**:4 (2011), 1057–1110.
- [6] B. I. Halperin, Y. Oreg, A. Stern, G. Refael, J. Alicea, F. von Oppen, *Phys. Rev. B*, **85**:14 (2012), 144501, 16 pp., arXiv:1112.5333.
- [7] C. L. Kane, M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. B*, **46**:23 (1992), 15233–15262.
- [8] M. Oshikawa, C. Chamon, I. Affleck, *J. Stat. Mech.*, **2** (2006), P02008, 102 pp.
- [9] C.-Y. Hou, A. Rahmani, A. E. Feiguin, C. Chamon, *Phys. Rev. B*, **86**:7 (2012), 075451, 13 pp., arXiv:1205.2125.
- [10] D. Yue, L. I. Glazman, K. A. Matveev, *Phys. Rev. B*, **49**:3 (1994), 1966–1975.
- [11] S. Lal, S. Rao, D. Sen, *Phys. Rev. B*, **66**:16 (2002), 165327, 12 pp.
- [12] D. N. Aristov, P. Wölfle, *Phys. Rev. B*, **80**:4 (2009), 045109, 22 pp.
- [13] D. N. Aristov, P. Wölfle, *Phys. Rev. B*, **88**:7 (2013), 075131, 16 pp.
- [14] K. Kazymyrenko, B. Douçot, *Phys. Rev. B*, **71**:7 (2005), 075110, 14 pp., arXiv:cond-mat/0407268.
- [15] A. Saha, *Internat. J. Modern Physics B*, **27**:21 (2013), 1330015, 54 pp., arXiv:1308.0138.
- [16] J. C. Y. Teo, C. L. Kane, *Phys. Rev. B*, **79**:23 (2009), 235321, 22 pp.
- [17] G. Auberson, A. Martin, G. Mennessier, *Commun. Math. Phys.*, **140**:3 (1991), 523–542.
- [18] P. Dita, *Commun. Math. Phys.*, **159**:3 (1994), 581–591.
- [19] D. N. Aristov, P. Wölfle, *Phys. Rev. B*, **84**:15 (2011), 155426, 15 pp.
- [20] D. N. Aristov, *Phys. Rev. B*, **83**:11 (2011), 115446, 9 pp., arXiv:1008.1645.
- [21] D. N. Aristov, P. Wölfle, *Phys. Rev. B*, **86**:3 (2012), 035137, 6 pp., arXiv:1110.1159.
- [22] D. N. Aristov, A. P. Dmitriev, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, D. G. Polyakov, P. Wölfle, *Phys. Rev. Lett.*, **105**:26 (2010), 266404, 4 pp., arXiv:1006.4844.