Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Zubov, Е. В. Prokhorov, М. Ю. Malyshev,
Предельный переход к световому фронту в квантовой
хромодинамике и кварк-антикварковое приближение,
ТМФ, 2015, том 184, номер 3, 456–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8919>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:59:51

© 2015 г. Р. А. Zubov*, Е. В. Прохвятилов*, М. Ю. Малышев*

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД К СВЕТОВОМУ ФРОНТУ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ И КВАРК-АНТИКВАРКОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассматривается предельный переход к квантовой хромодинамике на световом фронте от теорий, квантованных на пространственноподобных плоскостях, которые приближаются к световому фронту. При этом предельный переход совершается по-разному для нулевых и ненулевых мод полей. Это ведет к появлению полуфеноменологического параметра, который можно использовать для описания эффектов конфайнмента. В качестве иллюстрации рассматривается задача о связанных состояниях кварк-антикварковой пары в $2 + 1$ измерениях. Используется решеточная калибровочно-инвариантная регуляризация в поперечном пространстве и в результате получается аналог уравнения 'т Хоофта. Также обсуждается возможность вычисления спектра связанных состояний в $3 + 1$ измерениях.

Ключевые слова: гамильтонов подход, квантовая хромодинамика, спектр масс, световой фронт.

DOI: 10.4213/tmf8919

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что теория возмущений в КХД хорошо описывает результаты экспериментов при высоких энергиях. Однако для описания адронов как связанных состояний квантовых полей требуются непertурбативные методы. Наиболее прямолинейный из них основан на введении пространственной решетки, которая регуляризует теорию в ультрафиолетовой области и учитывает калибровочную симметрию. Этот подход действительно указывает на эффекты конфайнмента для сильно взаимодействующих кварков и глюонов.

К задаче о связанных состояниях применим и другой непertурбативный подход, а именно гамильтонов подход на световом фронте (СФ) [1]. Квантование теории на СФ означает квантование в координатах [2]

$$x^{\pm} = \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}, \quad x^{\perp} = (x^1, x^2, \dots),$$

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: roman.zubov@hep.phys.spbu.ru, evgeni.prokhvat@pobox.spbu.ru, mimalysh@yandex.ru

где x^0 , x^3 , $x^\perp$ – это лоренцевы координаты, а x^+ играет роль времени. Подобная формулировка широко используется для описания рассеяния элементарных частиц высоких энергий. Ее основное преимущество заключается в отождествлении вакуума с состоянием, имеющим импульс $p_- = 0$. Здесь и далее через $p_\pm = (p_0 \pm p_3)/\sqrt{2}$ обозначены импульсы, сопряженные $x^\pm$, и для состояний с неотрицательным квадратом массы $p_\pm \geq 0$. Однако этот гамильтонов формализм на СФ содержит явные сингулярности для мод полей с $p_- = 0$. Простое обрезание $|p_-| \geq \varepsilon$ может нарушать эквивалентность между обычной ковариантной теорией возмущений в лоренцевых координатах и ее аналогом, отталкивающимся от квантования на СФ [3]. Восстановление эквивалентности требует введения в канонический гамильтониан на СФ новых членов, в том числе нелокальных по x^- [4]–[6]. Непертурбативное применение этого гамильтонова подхода на СФ основано на надежде, что удастся упростить описание вакуума и использовать фоксовское пространство СФ в качестве базиса для описания связанных состояний.

Однако, когда мы используем обрезание $|p_-| \geq \varepsilon$ в качестве регуляризации, мы теряем такие важные вакуумные эффекты, как конденсаты. Другая трансляционно-инвариантная регуляризация – это обрезание по x^- : $|x^-| \leq L$ с периодическими граничными условиями по x^- для полей (DLCQ-регуляризация). Она делает импульс p_- дискретным ($p_- = \pi n/L$, $n = 0, 1, 2, \dots$) и отделяет нулевую моду ($n = 0$). Эта нулевая мода оказывается канонически нединамической и выражается через сложные связи, которые к тому же нелинейны по полям и поэтому определены в квантовой теории неединственным образом. Такое рассмотрение нулевых мод может быть недостаточным еще и из-за периодических граничных условий по светоподобной координате x^- .

Данная проблема была рассмотрена с точки зрения предельного перехода к гамильтониану на СФ, начиная с теории, квантованной на пространственноподобных гиперплоскостях, приближающихся к СФ [7]–[9]. В таком подходе используются нелоренцевы координаты

$$y^0 = x^+ + \frac{\eta^2}{2} x^-, \quad y^3 = x^-, \quad y^\perp = x^\perp, \quad (1)$$

в дальнейшем называемые η -координатами. Они совпадают с координатами x^+ и x^- СФ в пределе $\eta \rightarrow 0$. Пространственноподобные гиперплоскости квантования определяются уравнением $y^0 = 0$. Соответствующие импульсы в этих координатах выглядят так:

$$p_0 = p_+, \quad p_3 = p_- - \frac{\eta^2}{2} p_+. \quad (2)$$

Для отделения динамики нулевой моды ($p_3 = 0$) также используется ограничение $|y^3| \leq L$ с периодическими граничными условиями для полей по y^3 .

Для простейшего примера калибровочной теории, квантовой электродинамики в $1 + 1$ измерениях (т.е. массивной модели Швингера), точный ответ был получен в работах [7], [8], где спектр масс зависел от значения нетривиального вакуумного конденсата. Было обнаружено, что правильное значение вакуумного конденсата и правильный спектр масс можно получить, только если предел $L \rightarrow \infty$ берется до взятия предела $\eta \rightarrow 0$. Предел $\eta \rightarrow 0$ при фиксированном L дает нулевое значение

конденсата, в то время как оба предела при фиксированном $L\eta > 0$ дают ненулевое значение, которое можно использовать как приближение к истинному.

Если мы приближаемся к гамильтониану на СФ от теории в η -координатах с отброшенной нулевой модой, мы получаем в точности канонический гамильтониан на СФ без нулевых мод в пределе $\eta \rightarrow 0$ и фиксированном L . Более того, было замечено [10], что приближение к спектру масс и значению вакуумного конденсата можно также получить, если взять вышеуказанные пределы в два этапа: сначала взять предел $\eta \rightarrow 0$ при фиксированном L , но “заморозив” параметр η (положив $\eta = \eta_0$) в членах гамильтониана (или лагранжиана), содержащих чисто нулевые моды; затем взять пределы $L \rightarrow \infty$ (и $\eta_0 \rightarrow 0$) при фиксированном значении $L\eta_0$, которое параметризует конденсат.

Попытка сформулировать подобное полуфеноменологическое приближение была предпринята в работе [7], правда, без должного обсуждения проблемы ультрафиолетовой регуляризации. В работе [11] предлагается калибровочно-инвариантная регуляризация КХД с помощью решетки по поперечным координатам $x^\perp$ и отдельного рассмотрения нулевых мод глюонного поля (в η -координатах и в калибровке, соответствующей светоподобной в пределе $\eta \rightarrow 0$) в виде “реберных” переменных на решетке, представленных унитарными матрицами U . Однако была выполнена только первая часть предельного перехода, и поэтому полученный эффективный гамильтониан на СФ все еще зависел от L , η_0 и параметра решетки a .

В настоящей работе мы продолжаем реализацию указанной выше программы и рассматриваем способы выполнить второй шаг предельного перехода. Мы применяем нашу модель к вычислению спектра масс мезона, рассматривая для простоты КХД в $2+1$ измерениях и сужая гамильтониан до состояний с кварком и антикварком, взаимодействующими только с нулевой модой поперечной компоненты глюонного поля, т. е. с “реберными” матрицами U .

Из-за нарушения лоренцевой симметрии, которое обусловлено различным рассмотрением нулевой и ненулевых мод, спектр масс в пределе $L \rightarrow \infty$ может зависеть от того, насколько правильно в обычном выражении для квадрата массы учитывается тот факт, что динамика нулевых мод относится к теории в η -координатах, а динамика ненулевых мод – к теории в координатах СФ. Мы рассматриваем вариант, соответствующий фиксации $L\eta_0$ (при $L \rightarrow \infty$), и вводим специальную перенормировку параметров в эффективном выражении для гамильтониана. Такое рассмотрение приводит к появлению потенциала конфайнмента между кварком и антикварком в поперечном направлении. Помимо этого, мы формулируем аналог уравнения ’т Хоофта для волновых функций, которое содержит этот потенциал. В данной формулировке можно также говорить о конфайнменте в x^- направлении.

2. МОДЕЛЬ МЕЗОНА В $2+1$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Для простоты в нашей работе рассматривается модель мезона в $2+1$ измерениях, т. е. теперь в теории присутствует только одна поперечная координата $x^\perp \equiv x$. Мы ограничиваем число узлов $K_\perp$ в этом поперечном пространстве и вводим периодические граничные условия на интервале $0 \leq x \leq L_\perp$, где $L_\perp = K_\perp a$. В отличие от работы [11] мы налагаем антипериодические граничные условия для фермионных полей. Также мы сужаем фоксовское пространство так, чтобы в нем присутствовали состояния только с одним кварком и одним антикварком. Далее мы считаем,

что отсутствуют возбуждения ненулевых мод глюонного поля, т.е. фермионы взаимодействуют только с нулевыми модами $U_\perp \equiv U$. В этой упрощенной модели гамильтониан из работы [11] можно записать так:

$$\begin{aligned} H = \sum_x \int_{-L}^L dx^- \left\{ \frac{g^2 a}{8L^2 \eta_0^2} \pi^2(x) + \frac{g^2 a}{2} \partial_-^{-1} \left(\chi^\dagger(x) \frac{\lambda^a}{2} \chi(x) \right) \partial_-^{-1} \left(\chi^\dagger(x) \frac{\lambda^a}{2} \chi(x) \right) - \right. \\ - \frac{i}{8a} [\chi^\dagger(x-a) \sigma_1 U^\dagger(x) - \chi^\dagger(x+a) U(x+a) \sigma_1 + 2m_q a \chi^\dagger(x)] \times \\ \times \partial_-^{-1} [U(x) \sigma_1 \chi(x-a) - \sigma_1 U^\dagger(x+a) \chi(x+a) + 2m_q a \chi(x)] + \\ \left. + \frac{g^2 a}{2} \frac{2L}{4a^2 L^2} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \sum_{\substack{m>0, \\ m \in \mathbb{Z}+1/2}} [b_m^\dagger(x) b_m(x) + d_m^\dagger(x) d_m(x)] q_m \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$q_m = \sum_{\substack{k>0, \\ k \in \mathbb{Z}+1/2, \\ k \neq m}}^{\infty} \left[\frac{1}{(p_m - p_k)^2} - \frac{1}{(p_m + p_k)^2} \right], \quad (4)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2aL}} \sum_{\substack{m>0, \\ m \in \mathbb{Z}+1/2}} [b_m(x) e^{-ip_m x^-} + d_m^\dagger(x) e^{ip_m x^-}], \quad (5)$$

$\pi^a(x)$ и $U(x)$ – канонические переменные, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (при $x^0 = x^{0'}$)

$$[\pi^a(x), U(x')] = -\delta_{xx'} \frac{\lambda^a}{2} U(x), \quad (6)$$

$$[\pi^a(x), \pi^b(x')] = i\delta_{xx'} f^{abc} \pi^c(x), \quad (7)$$

а операторы рождения кварка и антикварка $b_m^\dagger, d_m^\dagger$ удовлетворяют равенствам

$$\{b_m(x), b_{m'}^\dagger(x')\} = \delta_{mm'} \delta_{xx'}, \quad (8)$$

$$\{d_m(x), d_{m'}^\dagger(x')\} = \delta_{mm'} \delta_{xx'}. \quad (9)$$

Также здесь использовано обозначение $\mathbb{Z} + 1/2$ для множества полупелых чисел $k = 1/2, 3/2, \dots$.

Чтобы удовлетворить условие калибровочной инвариантности теории, мы рассматриваем состояния, в которых кварк и антикварк связаны цепочкой матриц U . Считая, что система имеет полный импульс

$$p_3 \equiv p_n = \frac{\pi n}{L} \quad (10)$$

и вводя обозначения $m + \tilde{m} \equiv n$ и

$$U_{x,x'} \equiv \begin{cases} U^\dagger(x+a) U^\dagger(x+2a) \dots U^\dagger(x'), & \text{если } x < x', \\ U(x) U(x-a) \dots U(x'+a), & \text{если } x > x', \\ I, & \text{если } x = x', \end{cases} \quad (11)$$

базис фоковского пространства, состоящий из этих калибровочно-инвариантных состояний, можно записать так:

$$| \begin{smallmatrix} l \\ m \end{smallmatrix} \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{NK_{\perp}}} \sum_x b_m^{\dagger}(x) U_{x, x+la} d_m^{\dagger}(x+la) |0\rangle, \quad \langle \begin{smallmatrix} l_2 \\ m_2 \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} l_1 \\ m_1 \end{smallmatrix} \rangle = \delta_{m_2 m_1} \delta_{l_2 l_1}, \quad (12)$$

где l – это “длина” цепочки базисного состояния в единицах a и $-K_{\perp} \leq l \leq K_{\perp}$. Суммирование по x гарантирует, что состояние трансляционно-инвариантно в поперечном направлении, т. е. что $p_{\perp} = 0$.

Теперь необходимо обсудить вопрос о вычислении массы в этой модели. Из-за того что мы совершаем предельный переход на СФ по-разному для нулевых и ненулевых мод, мы должны правильно описать вклады этих мод в выражение для квадрата массы. При $p_{\perp} = 0$

$$M^2 = 2P_+ P_- = 2P_0 P_3 + \eta^2 P_0^2, \quad (13)$$

где при конечном L мы используем только эффективные выражения для $P_+ = P_0$ и $P_- = P_3 + (\eta^2/2)P_+$, полученные в работе [11]. В них можно отделить вклад, соответствующий чисто нулевой моде. Этот вклад в выражение для M^2 имеет вид

$$M_0^2 = \eta_0^2 H_0^2, \quad (14)$$

где H_0 – это часть гамильтониана, связанная только с нулевой модой. Вклад ненулевых мод имеет тот же вид, что и на СФ, т. е.

$$M_{\emptyset}^2 = 2H_{\emptyset} P_3, \quad H_{\emptyset} = P_0 - H_0, \quad (15)$$

где $H_{\emptyset}$ – это часть гамильтониана без чисто нулевых мод. На рассматриваемых нами состояниях вклады M_0^2 и $M_{\emptyset}^2$ оказываются конечными (и “буст”-инвариантными) при $L \rightarrow \infty$ (при условии $L\eta_0 = \text{const}$). Однако вклад части H_0 в член $2H_0 P_3$, содержащийся в выражении для M^2 , оказывается растущим, как L , поэтому мы вынуждены ввести специальную перенормировку безразмерного параметра $g^2 a$ в этом члене,

$$L\eta_0 = a_0, \quad g^2 a = \bar{g}^2(a_0) \frac{a}{a_0} \frac{1}{p_3 L}, \quad (16)$$

т. е. ввести зависимость от $p_3 L$. Чтобы сохранить вклад M_0^2 в пределе $L \rightarrow \infty$, надо потребовать

$$g^2 a \rightarrow g_0^2 a = \bar{g}_0^2(a_0) \frac{a}{a_0}. \quad (17)$$

Кроме того, в $M_{\emptyset}^2$ требуется эффективная перенормировка вида

$$g^2 a \rightarrow g_{\emptyset}^2 a = \bar{g}_{\emptyset}^2(a_0) \frac{a^2}{a_0^2}. \quad (18)$$

Здесь $\bar{g}^2(a_0)$, $\bar{g}_0^2(a_0)$ и $\bar{g}_{\emptyset}^2(a_0)$ – новые конечные феноменологические параметры теории. Можно рассчитывать, что таким полуфеноменологическим путем удастся скомпенсировать вышеуказанные нарушения симметрии и искажение теории, вызванное ограничением пространства состояний.

3. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГАМИЛЬТОНИАНА

Чтобы начать вычисление спектра масс, нужно получить матрицу гамильтониана в указанном базисе и решить задачу на собственные значения. Для этого мы рассмотрим действие гамильтониана на произвольное состояние $|\frac{l}{m}\rangle$ в этом базисе. Начнем с действия оператора π^2 , который соответствует части гамильтониана, связанной с чисто нулевой модой глюонного поля. Используя соотношения (6), (7) и обозначения (11), можно увидеть, что если $x \in [x_1, x_2]$, то

$$\begin{aligned}\pi^2(x)U_{x_1, x_2}|0\rangle &= \pi^a(x)\pi^a(x)U_{x_1, x_2}|0\rangle = \pi^a(x)\pi^a(x)U_{x_1, x}U_{x, x_2}|0\rangle = \\ &= U_{x_1, x}\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^a}{2}U_{x, x_2}|0\rangle = \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right)U_{x_1, x_2}|0\rangle,\end{aligned}\quad (19)$$

и $\pi^2(x)U_{x_1, x_2}|0\rangle = 0$ в противном случае. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\sum_x \pi^2(x)|\frac{l}{m}\rangle &\propto \sum_x \sum_{x'} \pi^a(x)\pi^a(x)b_m^\dagger(x')U_{x', x'+la}d_m^\dagger(x'+la)|0\rangle = \\ &= \sum_x \sum_{x'} \pi^a(x)\pi^a(x)b_m^\dagger(x')U_{x', x}U_{x, x'+la}d_m^\dagger(x'+la)|0\rangle = \\ &= \sum_{x \in [x', x'+la]} \sum_{x'} b_m^\dagger(x')U_{x', x}\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^a}{2}U_{x, x'+la}d_m^\dagger(x'+la)|0\rangle = \\ &= \frac{|l|}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right)\sum_{x'} b_m^\dagger(x')U_{x', x'+la}d_m^\dagger(x'+la)|0\rangle.\end{aligned}\quad (20)$$

Таким образом,

$$2H_0P_3|\frac{l}{m}\rangle = \frac{g^2ap_3}{2L\eta_0^2}\frac{|l|}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right)|\frac{l}{m}\rangle, \quad p_3 = p_n = \frac{\pi n}{L}, \quad (21)$$

$$M_0^2|\frac{l}{m}\rangle = l^2\left[\frac{g^2a}{4L\eta_0}\frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right)\right]^2|\frac{l}{m}\rangle. \quad (22)$$

Теперь обсудим четырехфермионный оператор из гамильтониана,

$$\begin{aligned}\frac{g^2a}{2}\int_{-L}^L dx^- \partial_-^{-1}\left(\chi^\dagger(x)\frac{\lambda^a}{2}\chi(x)\right)\partial_-^{-1}\left(\chi^\dagger(x)\frac{\lambda^a}{2}\chi(x)\right) = \\ = -\frac{g^2a}{2}\iint_{-L}^L dx^- dx'^-\left(\chi^\dagger(x)\frac{\lambda^a}{2}\chi(x)\right)|x^- - x'^-|\left(\chi^\dagger(x)\frac{\lambda^a}{2}\chi(x)\right),\end{aligned}$$

который обычно связан с появлением эффектов конфайнмента на СФ из-за множителя $|x^- - x'^-|$. Во-первых, можно заметить, что этот член должен содержать два оператора рождения и два оператора уничтожения, так как в противном случае его проекция на кварк-антикварковые состояния равна нулю. Во-вторых, эти операторы локальны по x , поэтому единственные состояния, на которых этот член не равен нулю, имеют длину ноль ($l = 0$). Чтобы этот четырехфермионный оператор

действовал на состояния с произвольной длиной l , мы предлагаем его модификацию

$$\sum_{l=-l_{\max}}^{l_{\max}} \partial_{-1}^{-1} \left(\chi^{\dagger}(x) U_{x,x'} \frac{\lambda^a}{2} U_{x',x} \chi(x) \right) \times \\ \times \partial_{-1}^{-1} \left(\chi^{\dagger}(x+la) U_{x+la,x'} \frac{\lambda^a}{2} U_{x',x+la} \chi(x+la) \right), \quad (23)$$

которая делает этот оператор нелокальным. Здесь мы хотим заметить, что эта модификация – часть нашей эффективной модели. Она вводится только для того, чтобы исправить неудовлетворительное действие четырехфермионного оператора на нашем “усеченном” фоксовском пространстве. На уровне лагранжиана эта модификация сводится к введению нелокального взаимодействия поля A_+ с фермионным током (похожая процедура применяется в работе [12]). В результате удастся ввести достаточно хорошую феноменологию. Действительно, как мы увидим далее, такая модификация приводит к появлению аналога хорошо известного уравнения ’т Хоофта, которое само по себе широко используется в полуфеноменологических моделях и голографии (см. работу [13] и ссылки в ней).

С этими оговорками запишем действие оператора $H_{\emptyset}$ на базисные состояния:

$$H_{\emptyset} |^l_m\rangle = -\frac{g^2}{2aL} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \sum_{\substack{k>0, \\ k \in \mathbb{Z}+1/2, \\ k \neq m}}^{n-1/2} \frac{1}{(p_k - p_m)^2} |^l_k\rangle + \\ + \frac{1}{8a^2} \left(\frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_{\bar{m}}} \right) (-\Delta_l^2 + (2m_q a)^2) |^l_m\rangle + \frac{g^2}{4aL} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) (q_m + q_{\bar{m}}) \cdot |^l_m\rangle, \quad (24)$$

где

$$\Delta_l^2 |^l_m\rangle \equiv |^{l+2}_m\rangle - 2|^l_m\rangle + |^{l-2}_m\rangle \quad (25)$$

есть дискретный аналог второй производной. Последний член в (24) можно упростить, используя равенство

$$q_m + q_{\bar{m}} = \sum_{\substack{k>0, \\ k \in \mathbb{Z}+1/2, \\ k \neq m}}^{n-1/2} \frac{1}{(p_k - p_m)^2}. \quad (26)$$

Таким образом с учетом формул (15), (21) и (22) получаем для полного оператора квадрата массы следующее выражение:

$$M^2 |^l_m\rangle = \frac{g^2 a p_n}{2L \eta_0^2} \frac{|l|}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) |^l_m\rangle + l^2 \left[\frac{g^2 a}{4L \eta_0} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \right]^2 |^l_m\rangle + \\ + \frac{p_n}{4a^2} \left(\frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_{\bar{m}}} \right) (-\Delta_l^2 + (2m_q a)^2) |^l_m\rangle - \\ - \frac{g^2 p_n}{aL} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \sum_{\substack{k>0, \\ k \in \mathbb{Z}+1/2, \\ k \neq m}}^{n-1/2} \frac{|^l_k\rangle - |^l_m\rangle}{(p_k - p_m)^2}. \quad (27)$$

Отсюда можно легко вычислить матричные элементы.

Интереснее, однако, рассмотреть действие этого оператора на самое общее состояние с полным импульсом p_n :

$$|f_n\rangle \equiv |p_n; p_\perp\rangle_{p_\perp=0} = \sum_{m,l} f_m^l |m\rangle^l, \quad (28)$$

где f_m^l – волновая функция состояния. Получаем уравнение на собственные значения оператора квадрата массы:

$$\begin{aligned} \langle m | M^2 | f_n \rangle = M^2 f_m^l = & \left[\frac{g^2 a p_n}{2 L \eta_0^2} \frac{|l|}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) + l^2 \left(\frac{g^2 a}{4 L \eta_0} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \right)^2 + \right. \\ & + \frac{p_n}{4 a^2} \left(\frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_{\bar{m}}} \right) (-\Delta_l^2 + (2 m_q a)^2) \Big] f_m^l - \\ & - \frac{g^2 p_n}{a L} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \sum_{\substack{k>0, \\ k \in \mathbb{Z}+1/2, \\ k \neq m}}^{n-1/2} \frac{f_k^l - f_m^l}{(p_k - p_m)^2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Delta_l^2 f_m^l \equiv f_m^{l+2} - 2 f_m^l + f_m^{l-2}. \quad (30)$$

Это есть не что иное, как дискретизированный аналог уравнения 'т Хоофта. После перенормировки (16)–(18) в пределе непрерывного пространства оно принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{M}^2 f(\xi, \bar{l}) = & \left[\frac{\bar{g}^2}{2} \frac{|\bar{l}|}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) + \bar{l}^2 \left(\frac{\bar{g}_0^2}{4} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \right)^2 + \right. \\ & + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi} \right) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \bar{l}^2} + \bar{m}_q^2 \right) \Big] f(\xi, \bar{l}) - \\ & - \frac{\bar{g}_0^2}{\pi} \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \text{P} \int_0^1 d\xi' \frac{f(\xi', \bar{l}) - f(\xi, \bar{l})}{(\xi' - \xi)^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\bar{M}$, $\bar{l}$, $\bar{m}_q$ и ξ – новые безразмерные величины,

$$\bar{M} = M a_0, \quad \bar{l} = \frac{l a}{a_0}, \quad \bar{m}_q = m_q a_0, \quad \xi = \frac{p_m}{p_n}, \quad (32)$$

$a_0 = L \eta_0$ и $f(\xi, \bar{l})$ – волновая функция связанного кварк-антикваркового состояния, а интеграл понимается в смысле главного значения.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели применение подхода, предложенного в работе [11], к простой модели мезона в $2+1$ измерениях. Мы построили необходимый базис в фоковском пространстве и вычислили матричные элементы гамильтониана в этой модели. Оказалось, что в пределе перехода от решетки к непрерывному пространству эта модель сводится к аналогу уравнения 'т Хоофта, в котором дополнительно присутствует нетривиальный вклад, связанный с поперечными степенями свободы.

В заключение хочется рассмотреть возможность вычисления спектра в более реальной $(3+1)$ -мерной теории. В ней базис можно ввести сходным образом, а именно рассматривать на двумерной решетке калибровочно-инвариантные состояния кварка и антикварка, соединенных по кратчайшему пути. В тех же приближениях и ограничениях, что и в $(2+1)$ -мерной модели, можно получить аналогичное уравнение 'т Хоофта (31). Теперь в нем вместо второй производной $\partial^2/\partial \bar{l}^2$ по $\bar{l}$ будет стоять двумерный лапласиан $\Delta^2 = \partial^2/\partial \bar{l}_1^2 + \partial^2/\partial \bar{l}_2^2$, а потенциал будет зависеть от расстояния $\sqrt{\bar{l}_1^2 + \bar{l}_2^2}$ между фермионами в двумерном поперечном пространстве.

Общим свойством полученных спектров является их дискретность, т. е. наличие только связанных состояний кварка и антикварка, и, следовательно, наличие конфайнмента по всем пространственным направлениям. Это дает надежду правильно описать реальный спектр масс мезонов с помощью рассматриваемой $(3+1)$ -мерной модели, спектр которой можно получить численно. Такое исследование – предмет нашей дальнейшей работы.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.189.2014).

Список литературы

- [1] B. L. G. Bakker, A. Bassetto, S. J. Brodsky, W. Broniowski, S. Dalley, T. Frederico, S. D. Glazek, J. R. Hiller, C.-R. Ji, V. Karmanov, D. Kulshreshtha, J.-F. Mathiot, W. Melnitchouk, G. A. Miller, J. Papavassiliou, W. N. Polyzou, N. G. Stefanis, J. P. Vary, A. Ilderton, T. Heinzl, *Nucl. Phys. B. – Proc. Suppl.*, **251–252** (2014), 165–174, arXiv:1309.6333.
- [2] P. A. M. Dirac, *Rev. Modern Phys.*, **21:3** (1949), 392–398.
- [3] V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, “Quantization of field theory on the light front”, *Focus on Quantum Field Theory*, ed. O. Kovras, Nova Science Publ., New York, 2005, 23–81, arXiv: hep-th/0404031.
- [4] M. Burkardt, A. Langnau, *Phys. Rev. D*, **44:4** (1991), 1187–1197.
- [5] M. Burkardt, A. Langnau, *Phys. Rev. D*, **44:12** (1991), 3857–3867.
- [6] С. А. Пастон, В. А. Франке, *ТМФ*, **112:3** (1997), 399–416, arXiv: hep-th/9901110.
- [7] Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, *ЯФ*, **49:4** (1989), 1109–1117.
- [8] E. V. Prokhvatilov, H. W. L. Naus, H.-J. Pirner, *Phys. Rev. D*, **51:6** (1995), 2933–2942, arXiv: hep-ph/9406275.
- [9] Е. М. Ильгенфриц, С. А. Пастон, Г. Ю. Пирнер, Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, *ТМФ*, **148:1** (2006), 89–101, arXiv: hep-th/0610020.
- [10] Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, *ЯФ*, **47** (1988), 882–883.
- [11] М. Ю. Малышев, Е. В. Прохвятилов, *ТМФ*, **169:2** (2011), 272–284.
- [12] H. M. Fried, P. H. Tsang, Y. Gabellini, T. Grandou, Y. M. Sheu, *Ann. Phys.*, **359** (2015), 1–19, arXiv: 1412.2072.
- [13] S. S. Chabysheva, J. R. Hiller, *Ann. Phys.*, **337**, 143–152, arXiv: 1207.7128.