Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, 3-частичная модель Калоджеро: суперсле́ды и идеалы на алгебре наблюдаемых, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 1, 122–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf892>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 14:57:04

© 1998 г.

С. Е. Конштейн*

3-ЧАСТИЧНАЯ МОДЕЛЬ КАЛОДЖЕРО: СУПЕРСЛЕДЫ И ИДЕАЛЫ НА АЛГЕБРЕ НАБЛЮДАЕМЫХ

Ассоциативная супералгебра наблюдаемых 3-частичной квантовой модели Калоджеро, позволяющая при помощи стандартной фоксовской процедуры получить все волновые функции модели, имеет два независимых суперследа. Показано, что при константе связи ν , имеющей вид $\nu = n \pm 1/3$ или $\nu = n + 1/2$, наличие суперследов ведет к существованию в этой супералгебре нетривиальных двусторонних идеалов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Трехчастичная модель Калоджеро [1] является удобным объектом для изучения некоторых свойств N -частичных моделей Калоджеро, т.к. она уже имеет черты, отличающие многомерные системы от одномерной, но еще остается легко решаемой задачей, допускающей разделение переменных [2].

Хорошо известно, что с помощью преобразования подобия гамильтониан модели Калоджеро может быть сведен к оператору

$$H_{\text{Cal}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i^2 + \nu \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right], \quad (1)$$

который на пространстве симметрических функций совпадает с оператором

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{a_i^0, a_i^1\}. \quad (2)$$

В этом выражении операторы рождения и уничтожения a^α ($\alpha = 0, 1$) [3, 4] выражаются через дифференциально-разностные операторы Данкла $D_i(x)$ [5]

$$a_i^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_i + (-1)^\alpha D_i(x)), \quad (3)$$

*Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма Физического института им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: konstein@td.lpi.ac.ru

где

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \nu \sum_{l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} (1 - K_{il}),$$

а $K_{ij} = K_{ji}$ – операторы элементарных перестановок индексов

$$K_{ij}x_i = x_j K_{ij}, \quad K_{ij}x_k = x_k K_{ij} \quad \text{при } k \neq i, \quad k \neq j. \quad (4)$$

Операторы a^α удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_i^\alpha, a_j^\beta] = \epsilon^{\alpha\beta} \left(\delta_{ij} + \nu \delta_{ij} \sum_{l=1, l \neq i}^N K_{il} - \nu \delta_{i \neq j} K_{ij} \right),$$

где $\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}$, $\epsilon^{01} = 1$, из которых следует [4], что операторы (3) удовлетворяют соотношениям

$$[H, a_i^\alpha] = -(-1)^\alpha a_i^\alpha,$$

и поэтому операторы a_i^1 , действуя на фоксовский вакуум $|0\rangle$ такой, что $a_j^0|0\rangle = 0$ для всех j , дают волновые функции модели (2), а значит, и модели (1). В [6] операторы Переломова [7], описывающие волновые функции модели (1), выражены с помощью этих операторов a_i^α .

Далее *алгеброй наблюдаемых* будет называться алгебра $SH_N(\nu)$ – ассоциативная супералгебра полиномов от операторов a_i^α (3) и K_{ij} , в которой $\mathbb{Z}_2$ -градуировка задается четностью π : $\pi(a_i^\alpha) = 1$, $\pi(1) = \pi(K_{ij}) = 0$. Очевидно, что $SH_N(\nu) = SH_1(0) \otimes SH'_N(\nu)$, где $SH_1(0)$ порождена образующими

$$a^\alpha = \sum_i a_i^\alpha / \sqrt{N},$$

удовлетворяющими соотношениям $[a^\alpha, a^\beta] = \epsilon^{\alpha\beta}$, а $SH'_N(\nu)$ порождена перестановками K_{ij} и линейными комбинациями вида $\sum_i \lambda_i a_i^\alpha$, в которых коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям $\sum_i \lambda_i = 0$.

$SH'_N(\nu)$ содержит в качестве подалгебры групповую алгебру $\mathbb{C}[S_N]$ группы подстановок S_N , порожденную элементарными подстановками K_{ij} . На волновых функциях модели Калоджеро (1) группа S_N действует тривиально, однако для любого ее нетривиального представления существует матричная версия модели Калоджеро, в которой реализуется это представление [8].

Суперследом на произвольной ассоциативной супералгебре $\mathcal{A}$ называется комплекснозначная линейная функция $\text{str}(\cdot)$ на $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условию

$$\text{str}(fg) = (-1)^{\pi(f)\pi(g)} \text{str}(gf) \quad (5)$$

для любых элементов $f, g \in \mathcal{A}$ с определенной четностью. В [9] доказано, что супералгебры $SH_N(\nu)$ имеют нетривиальные суперследы и что размерность пространства суперследов на $SH_N(\nu)$ (количество суперследов) равна числу различных представлений числа N в виде суммы положительных нечетных целых чисел. В частности, на $SH_2(\nu)$ имеется только один суперслед, а на $SH_3(\nu)$ – два различных суперследа. Поскольку $SH_N(\nu) = SH_1(0) \otimes SH'_N(\nu)$ и $SH_1(0)$ имеет один суперслед, то $SH_N(\nu)$ и $SH'_N(\nu)$ имеют одинаковое число суперследов.

Знание суперследов на $SH_N(\nu)$ полезно в различных отношениях. Важно, что они определяют полилинейные инвариантные формы

$$\text{str}(f_1 f_2 \dots f_n),$$

что позволяет, например, строить лагранжианы при работе с динамическими теориями, основанными на этих супералгебрах. В частности, каждый суперслед определяет билинейную форму

$$B_{\text{str}}(f, g) = \text{str}(fg). \quad (6)$$

Так как нуль-векторы инвариантной билинейной формы образуют очевидным образом двусторонний идеал супералгебры, знание суперследов дает инструмент для исследования таких идеалов. Так, в случае $SH'_2(\nu)$, соответствующем обычной двухчастичной модели Калоджеро, единственный суперслед определяет билинейную форму (6), которая вырождена при полупелых значениях ν [10], а значит, супералгебра $SH'_2(\nu)$ имеет идеал при таких ν . При $N \geq 3$ алгебры $SH_N(\nu)$ имеют более одного суперследа. Для конечномерных супералгебр этого было бы достаточно для существования двусторонних идеалов, однако для рассматриваемых бесконечномерных супералгебр существование идеалов в полной мере еще не изучено.

В настоящей работе доказано, что в $SH'_3(\nu)$ при $\nu = n \pm 1/3$ и $\nu = n + 1/2$ существует по одномерному пространству суперследов, у которых соответствующие билинейные формы (6) вырождены, и что при других значениях ν таких суперследов нет. Следует заметить, что если существование суперследов на рассматриваемой супералгебре зависит от выбора $\mathbb{Z}_2$ -градуировки, то существование идеала от градуировки не зависит. Открытыми остались вопросы о виде фактор-алгебры (в случае $SH'_2(\nu)$ при $\nu = n + 1/2$ это Mat_n) и о существовании идеалов, которые не порождены никакими суперследами.

В следующем разделе выписаны образующие и соотношения между ними в ассоциативной супералгебре $SH'_3(\nu)$, затем получены и решены уравнения для производящих функций суперследов, и в последнем разделе найдены все значения ν , при которых $SH'_3(\nu)$ имеет идеал, порожденный суперследом.

2. СУПЕРАЛГЕБРА $SH'_3(\nu)$

Приведем образующие и соотношения между образующими в ассоциативной супералгебре $SH'_3(\nu)$.

Пусть $\lambda = \exp(2\pi i/3)$. Выберем в качестве базиса в $\mathbb{C}[S_3]$ векторы

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{1}{3}(\lambda^k K_{12} + K_{23} + \lambda^{-k} K_{31}), \\ Q_k &= \frac{1}{3}(1 + \lambda^k K_{12}K_{13} + \lambda^{-k} K_{12}K_{23}), \\ L_{\pm} &\stackrel{\text{def}}{=} L_{\pm 1}, \quad Q_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\pm 1} \end{aligned}$$

(индексы k здесь рассматриваются по модулю 3), а вместо образующих a_i^α – векторы

$$\begin{aligned} x^\alpha &= a_1^\alpha + \lambda a_2^\alpha + \lambda^2 a_3^\alpha, & x &\stackrel{\text{def}}{=} x^0, & x^+ &\stackrel{\text{def}}{=} x^1, \\ y^\alpha &= a_1^\alpha + \lambda^2 a_2^\alpha + \lambda a_3^\alpha, & y &\stackrel{\text{def}}{=} y^0, & y^+ &\stackrel{\text{def}}{=} y^1, \end{aligned}$$

получающиеся из a_i^α вычитанием центра масс

$$a^\alpha = \frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} a_i^\alpha.$$

На супералгебре $SH'_3(\nu)$ действует алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2$ внутренних дифференцирований, порожденная генераторами $T^{\alpha\beta}$:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{3}(x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha), \quad (7)$$

с коммутационными соотношениями

$$[T^{\alpha\beta}, T^{\gamma\delta}] = \epsilon^{\alpha\gamma} T^{\beta\delta} + \epsilon^{\alpha\delta} T^{\beta\gamma} + \epsilon^{\beta\gamma} T^{\alpha\delta} + \epsilon^{\beta\delta} T^{\alpha\gamma}, \quad (8)$$

которая действует на образующих элементах x^α и y^α как на $\mathfrak{sl}_2$ -векторах:

$$[T^{\alpha\beta}, x^\gamma] = \epsilon^{\alpha\gamma} x^\beta + \epsilon^{\beta\gamma} x^\alpha, \quad [T^{\alpha\beta}, y^\gamma] = \epsilon^{\alpha\gamma} y^\beta + \epsilon^{\beta\gamma} y^\alpha, \quad (9)$$

и оставляет инвариантной подалгебру $\mathbb{C}[S_3]$: $[T^{\alpha\beta}, K_{ij}] = 0$.

Вся супералгебра $SH'_3(\nu)$ разбивается в прямую сумму неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Так как всякое подпространство пространства $SH'_3(\nu)$, на котором $\mathfrak{sl}_2$ (7) имеет нетривиальное неприводимое представление, состоит из линейных комбинаций векторов вида $[f, T^{\alpha\beta}]$, то всякий суперслед на таком подпространстве равен нулю.

Отличными от нуля суперследеы могут быть только на $H_3^0(\nu) \subset SH_3'(\nu)$ – ассоциативной подалгебре всех $\mathfrak{sl}_2$ -синглетов.

Введем величину

$$m = \frac{1}{4}\{x^\alpha, y_\alpha\},$$

которая является синглетом относительно действия $\mathfrak{sl}_2$ (7) и может быть выражена также в виде

$$m = \frac{1}{2}(x^\alpha y_\alpha + 3 + 9\nu L_0) \quad (10)$$

или эквивалентно

$$m = \frac{1}{2}(y_\alpha x^\alpha - 3 - 9\nu L_0). \quad (11)$$

В этих формулах греческие индексы поднимаются и опускаются при помощи тензора $\epsilon^{\alpha\beta}$: $a^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} a_\beta$. Очевидно, что все остальные синглеты в $H_3^0(\nu)$ являются полиномами от этой величины m с коэффициентами в $\mathbb{C}[S_3]$.

Введенные таким образом образующие $x^\alpha, y^\alpha, Q_i, L_i$ и синглет m удовлетворяют следующим соотношениям:

$$L_i L_j = \delta_{i+j} Q_j, \quad L_i Q_j = \delta_{i-j} L_j, \quad (12)$$

$$Q_i L_j = \delta_{i+j} L_j, \quad Q_i Q_j = \delta_{i-j} Q_j, \quad (13)$$

где $\delta_i = \delta_{i0}$,

$$L_i x^\alpha = y^\alpha L_{i+1}, \quad L_i y^\alpha = x^\alpha L_{i-1}, \quad (14)$$

$$Q_i x^\alpha = x^\alpha Q_{i+1}, \quad Q_i y^\alpha = y^\alpha Q_{i-1}, \quad (15)$$

$$L_i m = -m L_i, \quad Q_i m = m Q_i, \quad (16)$$

$$[x, x^+] = -9\nu L_+, \quad [y, y^+] = -9\nu L_-, \quad [y, x^+] = [x, y^+] = 3 + 9\nu L_0 \quad (17)$$

и

$$\begin{aligned} [m, x^\alpha] &= \frac{3}{2}(x^\alpha + 3\nu x^\alpha L_0 + 3\nu L_0 x^\alpha), \\ [m, y^\alpha] &= -\frac{3}{2}(y^\alpha + 3\nu y^\alpha L_0 + 3\nu L_0 y^\alpha), \end{aligned} \quad (18)$$

из которых следуют соотношения

$$mQ_+x^\alpha Q_- = Q_+x^\alpha Q_- \left(m + \frac{3}{2}\right), \quad (19)$$

$$mQ_-y^\alpha Q_+ = Q_-y^\alpha Q_+ \left(m - \frac{3}{2}\right), \quad (20)$$

$$mQ_-x^\alpha Q_0 = Q_-x^\alpha Q_0 \left(m + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\nu L_0\right), \quad (21)$$

$$mQ_+y^\alpha Q_0 = Q_+y^\alpha Q_0 \left(m - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\nu L_0\right), \quad (22)$$

$$Q_0x^\alpha Q_+m = \left(m - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\nu L_0\right)Q_0x^\alpha Q_+, \quad (23)$$

$$Q_0y^\alpha Q_-m = \left(m + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\nu L_0\right)Q_0y^\alpha Q_-. \quad (24)$$

Как показано в [9], всякий суперслед на $SH'_3(\nu)$ полностью определяется его значениями на $\mathbb{C}[S_3] \subset SH'_3(\nu)$, т.е. значениями $\text{str}(1)$, $\text{str}(K_{12}) = \text{str}(K_{23}) = \text{str}(K_{31})$ и $\text{str}(K_{12}K_{23}) = \text{str}(K_{12}K_{13})$. При этом условие (5) является непротиворечивым и допускает продолжение суперследа с $\mathbb{C}[S_3]$ на всю $SH'_3(\nu)$, только если

$$\text{str}(K_{ij}) = \nu(-2\text{str}(1) - \text{str}(K_{12}K_{23})). \quad (25)$$

Поскольку значение всякого суперследа может быть отличным от нуля только на $\mathfrak{sl}_2$ -синглетных элементах супералгебры, то достаточно найти суперследы лишь на $H_3^0(\nu)$.

3. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе получены и решены уравнения для производящих функций суперследов.

Введем *производящие функции*:

$$F(\xi) = \text{str} \left(\text{sh} \left(\frac{2}{3} \xi m \right) (Q_+ - Q_-) \right), \quad (26)$$

$$\Phi(\xi) = \text{str} \left(\text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m \right) (Q_+ + Q_-) \right), \quad (27)$$

$$\Psi(\xi) = \text{str} \left(\text{ch} \left(\xi \sqrt{\frac{4}{9} m^2 + 9\nu^2} \right) Q_0 \right), \quad (28)$$

которые полностью описывают суперследы на $SH'_3(\nu)$. Действительно, из (16) и (5) следует, что при $k > 0$ имеют место равенства $\text{str}(m^k L_i) = \text{str}(m^{k-1} L_i m) = -\text{str}(m^k L_i)$, поэтому $\text{str}(f(m) L_i) = f(0) \text{str}(L_i)$, а т.к. $\text{str}(m^k Q_0) = \text{str}(m^k L_0^2) = \text{str}(L_0 m^k L_0) = (-1)^k \text{str}(m^k L_0^2)$, то $\text{str}(\text{sh}(\xi m) Q_0) = 0$. Аналогично

$$\text{str} \left(\text{sh} \left(\frac{2}{3} \xi m \right) (Q_+ + Q_-) \right) = 0 \quad \text{и} \quad \text{str} \left(\text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m \right) (Q_+ - Q_-) \right) = 0.$$

Уравнения для производящих функций. Два уравнения для производящей функции суперследов можно получить дифференцированием определения (26) и два — дифференцированием (27). Для получения первого уравнения надо использовать выражение (10) для m в члене mQ_+ и (11) в члене mQ_- . Для получения второго уравнения следует использовать (11) для m в члене mQ_+ и (10) в члене mQ_- . Первое уравнение имеет следующий вид:

$$F'(\xi) = \frac{2}{3} \text{str} \left(\text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m \right) \left(\frac{1}{2} (x^\alpha y_\alpha + 3 + 9\nu L_0) Q_+ - \frac{1}{2} (y_\alpha x^\alpha - 3 - 9\nu L_0) Q_- \right) \right),$$

и при помощи (27), (12), (15), (19), (20) и общих свойств суперследов (5) может быть сведено к виду

$$F'(\xi) = \Phi(\xi) - \frac{1}{3} \text{str} \left(\text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m + \xi \right) y_\alpha x^\alpha Q_- - \text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m - \xi \right) x^\alpha y_\alpha Q_+ \right). \quad (29)$$

Подставив в (29) вместо $x^\alpha y_\alpha$ и $y_\alpha x^\alpha$ их выражения через m из (10) и (11) и разложив выражения

$$\text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m \pm \xi \right),$$

легко получить искомое уравнение

$$\Phi = F' + (\text{sh } \xi \Phi)' - (\text{ch } \xi F)'. \quad (30)$$

Аналогично выводится второе уравнение:

$$F'(\xi) = \frac{2}{3} \text{str} \left(\text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m \right) \left(\frac{1}{2} (y_\alpha x^\alpha - 3 - 9\nu L_0) Q_+ - \frac{1}{2} (x^\alpha y_\alpha + 3 + 9\nu L_0) Q_- \right) \right),$$

из которого при помощи (22), (21), (12) и общих свойств суперследов (5) легко получить

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= -\Phi(\xi) - \frac{1}{3} \text{str} \left(\text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m - \xi - 3\nu \xi L_0 \right) x^\alpha y_\alpha Q_0 - \right. \\ &\quad \left. - \text{ch} \left(\frac{2}{3} \xi m + \xi + 3\nu \xi L_0 \right) y_\alpha x^\alpha Q_0 \right) = \\ &= -\Phi - \frac{1}{3} \text{str} \left(\text{ch } \xi \text{ ch} \left(\frac{2}{3} \xi m - 3\nu \xi L_0 \right) (2m - 3 - 9\nu L_0) Q_0 - \right. \\ &\quad \left. - \text{sh } \xi \text{ sh} \left(\frac{2}{3} \xi m - 3\nu \xi L_0 \right) (2m - 3 - 9\nu L_0) Q_0 - \right. \\ &\quad \left. - \text{ch } \xi \text{ ch} \left(\frac{2}{3} \xi m + 3\nu \xi L_0 \right) (2m + 3 + 9\nu L_0) Q_0 - \right. \\ &\quad \left. - \text{sh } \xi \text{ sh} \left(\frac{2}{3} \xi m + 3\nu \xi L_0 \right) (2m + 3 + 9\nu L_0) Q_0 \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Из соотношения $mL_0 = -L_0m$ следует, что

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\alpha m + \beta L_0)Q_0 &= \left(\operatorname{ch} \sqrt{\alpha^2 m^2 + \beta^2}\right) Q_0, \\ \operatorname{sh}(\alpha m + \beta L_0)Q_0 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 m^2 + \beta^2}} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\alpha^2 m^2 + \beta^2}\right) (\alpha m + \beta L_0)Q_0,\end{aligned}$$

что позволяет привести уравнение (31) к следующему виду:

$$F' = -\Phi + 2 \left(\operatorname{sh} \xi \operatorname{str} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\xi m\right)^2 + (3\nu\xi)^2} \right) Q_0 \right)' + 2 (\operatorname{ch} \xi \operatorname{sh}(3\nu\xi) \operatorname{str} L_0)'.$$

Аналогично выводится вторая пара уравнений.

Окончательно получается система уравнений

$$F' = -\Phi + 2(\operatorname{sh} \xi \Psi)' + 2(\operatorname{ch} \xi \operatorname{sh}(3\nu\xi) \operatorname{str} L_0)', \quad (32)$$

$$\Phi' = -F - 2(\operatorname{ch} \xi \Psi)' - 2(\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(3\nu\xi) \operatorname{str} L_0)', \quad (33)$$

$$\Phi = F' + (\operatorname{sh} \xi \Phi)' - (\operatorname{ch} \xi F)', \quad (34)$$

$$F = \Phi' + (\operatorname{ch} \xi \Phi)' - (\operatorname{sh} \xi F)', \quad (35)$$

в которой уравнения (34) и (35) эквивалентны, со следующими начальными условиями:

$$F(0) = 0,$$

$$\Phi(0) = \operatorname{str}(Q_+ + Q_-),$$

$$\Psi(0) = \operatorname{str}(Q_0).$$

Для этой системы уравнений можно легко найти три интеграла движения. Чтобы найти первый, достаточно вычесть (34) из (32), чтобы найти второй, следует вычесть (35) из (33), и для того чтобы найти третий, достаточно рассмотреть линейную комбинацию $\operatorname{sh} \xi \times$ (уравнение (32)) + $\operatorname{ch} \xi \times$ (уравнение (33)).

Результат всех этих действий имеет вид

$$\begin{aligned}(F(2 - \operatorname{ch} \xi) + \Phi \operatorname{sh} \xi + \Psi(-2 \operatorname{sh} \xi))' &= 2(\operatorname{ch} \xi \operatorname{sh}(3\nu\xi) \operatorname{str}(L_0))', \\ (F(-\operatorname{sh} \xi) + \Phi(2 + \operatorname{ch} \xi) + \Psi(2 \operatorname{ch} \xi))' &= -2(\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(3\nu\xi) \operatorname{str}(L_0))', \\ (F \operatorname{sh} \xi + \Phi \operatorname{ch} \xi + 2\Psi)' &= -2 \operatorname{sh}(3\nu\xi) \operatorname{str}(L_0).\end{aligned}$$

Решение. Решение полученной системы уравнений в терминах производящих функций, более удобных для дальнейшего рассмотрения, выглядит следующим образом:

$$\mathcal{Q}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \text{str} \left(e^{(2/3)\xi m} Q_+ \right) = \frac{P_+}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} P_+ &= 2\nu S_1 \left(\frac{\text{ch}(3\nu\xi)}{3\nu} (-e^{2\xi} + 2e^{-\xi}) + \text{sh}(3\nu\xi) (e^{2\xi} + e^{-\xi}) \right) + \\ &\quad + \frac{S_2}{2} (e^{-2\xi} - 2e^\xi + 3); \\ \mathcal{Q}_- &\stackrel{\text{def}}{=} \text{str} \left(e^{(2/3)\xi m} Q_- \right) = \frac{P_-}{\Delta}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} P_- &= 2\nu S_1 \left(\frac{\text{ch}(3\nu\xi)}{3\nu} (-e^{-2\xi} + 2e^\xi) - \text{sh}(3\nu\xi) (e^{-2\xi} + e^\xi) \right) + \\ &\quad + \frac{S_2}{2} (e^{2\xi} - 2e^{-\xi} + 3); \\ \mathcal{Q}_0^\pm &\stackrel{\text{def}}{=} \text{str} \left(\text{ch} \left(\xi \sqrt{\frac{4}{9}m^2 + 9\nu^2(Q_0 \pm L_0)} \right) \right) = \frac{P_0}{\Delta} \pm \nu S_1 \text{ch}(3\nu\xi), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} P_0 &= 2\nu S_1 \left(-3 \frac{\text{ch}(3\nu\xi)}{3\nu} + \frac{\text{sh}(3\nu\xi)}{2} (-e^{3\xi} + e^{-3\xi}) \right) + \\ &\quad + \frac{S_2}{2} (e^{2\xi} + e^{-2\xi} - 2e^\xi - 2e^{-\xi}); \\ \mathcal{R}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{str}(\text{sh}(\xi m) Q_0) = 0; \\ \mathcal{L}_\pm &\stackrel{\text{def}}{=} \text{str} \left(e^{(2/3)\xi m} L_{\pm 1} \right) = 0; \\ \mathcal{L}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \text{str} \left(e^{(2/3)\xi m} L_0 \right) = \nu S_1. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь $\Delta = \exp(-3\xi)(\exp(3\xi) + 1)^2$, а S_1 и S_2 — произвольные параметры, определяющие суперслед в двумерном пространстве суперследов:

$$S_1 = -2 \text{str}(1) - \text{str}(K_{12}K_{23}), \quad S_2 = \frac{8}{3} \text{str}(1) - \frac{2}{3} \text{str}(K_{12}K_{23}).$$

4. ИДЕАЛЫ

Легко показать, что если некоторый идеал $\mathcal{I} \subset SH'_3(\nu)$ имеет ненулевое пересечение с H_3^0 (которое является идеалом в H_3^0), то $\mathcal{I}$ обладает ненулевым пересечением с одним из подпространств в H_3^0 , состоящих из элементов вида $\{Q_{\pm}f(m)\}$ (случай $P_{\pm}$), либо с одним из подпространств, состоящих из элементов вида $\{(Q_0 \pm L_0)f(m)\}$ (случай P_0).

Сначала будем искать элементы идеала вида $\{Q_+f(m)\}$, т.е. такие полиномиальные функции f , что

$$f\left(\frac{d}{d\xi}\right)Q_+ = 0.$$

Если хоть одна такая функция существует, то (36) есть линейная комбинация экспонент

$$Q_+ = \sum_i p_i e^{b_i \xi},$$

где p_i – некоторые полиномы по переменной ξ .

Из (36) следует, что p_i – на самом деле константы и что такое представление существует тогда и только тогда, когда все нули функции $\Delta(\xi)$ являются нулями функции $P_+(\xi)$ с учетом их кратностей, т.е.

$$P_+\left(\frac{1}{3}(2k+1)\pi i\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (39)$$

$$P_+' \left(\frac{1}{3}(2k+1)\pi i\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (40)$$

Второе из этих условий возникает вследствие того, что все нули функции Δ двойные.

Оказывается, условия (40) удовлетворяются тождественно при всех значениях величин S_1 , S_2 и ν . Условия (39) ведут к системе уравнений

$$\frac{S_1}{3} \cos((2k+1)\pi\nu) + \frac{S_2}{2} \cos\left(\frac{1}{3}(2k+1)\pi\right) = 0, \quad (41)$$

которая имеет нетривиальные решения для S_1 и S_2 тогда и только тогда, когда при произвольных целых значениях k и l величина ν удовлетворяет уравнению

$$\cos((2k+1)\pi\nu) \cos\left(\frac{1}{3}(2l+1)\pi\right) = \cos((2l+1)\pi\nu) \cos\left(\frac{1}{3}(2k+1)\pi\right).$$

Случай $l = 3$, $k = 2$ дает $\cos(7\pi\nu) - \cos(5\pi\nu) = 0$ и, следовательно, $\nu = s/6$, где s – некоторое целое число. Для того чтобы определить s , рассмотрим два случая: k, l и $k+3, l$. Следствием этих двух случаев является соотношение

$$(\cos(s\pi) - 1) \cos\left(\frac{1}{6}(2k+1)s\pi\right) = 0 \quad \forall k,$$

откуда следует, что либо $s = 2n$, либо $\forall k \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{Z}$ такое, что $(2k+1)s = 6n+3$, т.е. $s = 6l+3$ с некоторым целым l .

Окончательно получаем, что подпространство идеала, состоящее из элементов вида $\{Q_+ f(m)\}$ (случай P_+), нетривиально тогда и только тогда, когда

$$\nu = n \pm \frac{1}{3}, \quad \frac{S_1}{3} = -(-1)^n \frac{S_2}{2} \quad \text{или} \quad \nu = n + \frac{1}{2}, \quad S_2 = 0 \quad (42)$$

с целым значением n .

Случаи P_- и P_0 дают в точности эти же значения ν , S_1 и S_2 .

Другие значения ν . Выше было доказано, что подалгебра синглетов $H_3^0(\nu) \subset SH_3'(\nu)$ содержит идеал, порожденный суперследом, тогда и только тогда, когда $\nu = n \pm 1/3$ или $\nu = n + 1/2$. Если $H_3^0(\nu)$ содержит такой идеал, то он очевидным образом продолжается до (собственного) идеала в $SH_3'(\nu)$. Здесь будет доказано, что если все билинейные формы вида $\text{str}(f \cdot g)$ невырождены на $H_3^0(\nu)$, то они невырождены и на всей супералгебре $SH_3'(\nu)$, т.е. что при прочих значениях ν в супералгебре $SH_3'(\nu)$ нет идеалов, порожденных суперследами.

Для этого достаточно доказать, что нетривиальных решений нет ни у одной из систем уравнений

$$\sum_{j=0}^n M_{ij}^n p_j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (43)$$

на $p_j \in H_3^0(\nu)$, в которых

$$M_{ij}^n = (x^i y^{n-i} (x^+)^{n-j} (y^+)^j)_0, \quad (44)$$

а операция $(f)_0$ обозначает выделение синглетной части из полинома f .

Очевидно, что элементы матрицы M^n — это полиномы от m степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{C}[S_3]$:

$$M_{ij}^n = \sum_{k=0}^n c_{ij}^k m^k,$$

причем $c_{ij}^n \in \mathbb{C}$. Очевидно также, что из невырожденности матрицы $\widetilde{M}^n$ с элементами $(\widetilde{M}^n)_{ij} = c_{ij}^n$ следует отсутствие нетривиальных решений у уравнения (43).

Найдем значения c_{ij}^n . Так как m^n с точностью до полиномов от x и y меньшей степени есть линейная комбинация мономов вида $x^i y^{n-i} (x^+)^{n-i} (y^+)^i$, то $c_{ij}^n = 0$ при $i \neq j$. Для нахождения c_{ii}^n заметим, что

$$xy^+ \simeq \frac{3}{2} T^{01} - m, \quad x^+ y \simeq \frac{3}{2} T^{01} + m,$$

где знак $\simeq$ использован для обозначения равенства с точностью до полиномов меньшей степени, и поэтому

$$M_{ii}^n \simeq \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\left(T^{01} - \frac{2}{3}m\right)^i \left(T^{01} + \frac{2}{3}m\right)^{n-i} \right)_0.$$

Ниже будет доказано, что если $f(m, T^{01})$ – произвольный полином, то

$$(f(m, T^{01}))_0 \simeq \frac{1}{2} \int_0^1 \left(f\left(m, \frac{2}{3}m\tau\right) + f\left(m, -\frac{2}{3}m\tau\right) \right) d\tau. \quad (45)$$

Из (45) немедленно следует, что

$$\begin{aligned} M_{ii}^n &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}m\right)^n \int_0^1 ((\tau-1)^i (\tau+1)^{n-i} + (-\tau-1)^i (-\tau+1)^{n-i}) d\tau = \\ &= \frac{(-1)^i}{2} \left(\frac{2}{3}m\right)^n \int_0^1 ((1-\tau)^i (1+\tau)^{n-i} + (1+\tau)^i (1-\tau)^{n-i}) d\tau \end{aligned}$$

и, следовательно, $c_{ii}^n \neq 0$ ($i = 0, \dots, n$), что вместе с $c_{ij}^n = 0$ при $i \neq j$ приводит к невырожденности $\widetilde{M}$, т.е. к тому, что у уравнений (43) нет нетривиальных решений.

Для доказательства (45) достаточно рассмотреть случай $f(m, T^{01}) = t^k$, где для удобства вместо выражения T^{01} использована буква t .

Из цепочки очевидных равенств

$$\begin{aligned} 0 &= ([T^{11}, [T^{00}, t^k]])_0 \simeq ([T^{11}, 2kT^{00}t^{k-1}])_0 \simeq \\ &\simeq (-4k(k-1)t^{k-2}T^{00}T^{11} - 8kt^k)_0 \simeq (-4k(k-1)t^{k-2}(9t^2 - 4m^2) - 8kt^k)_0 \end{aligned}$$

следует

$$(t^k)_0 \simeq \frac{4}{9}m^2 \frac{k-1}{k+1} (t^{k-2})_0 \simeq \begin{cases} \frac{1}{k+1} \left(\frac{2}{3}m\right)^k = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}m\tau\right)^k d\tau & \text{при четных } k, \\ 0 & \text{при нечетных } k, \end{cases}$$

что завершает доказательство.

Автор благодарен М. А. Васильеву за полезные обсуждения.

Настоящая работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01144 и № 96-15-96463.

Список литературы

- [1] *F. Calogero*. J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 2191, 2197; 1971. V. 12. P. 419.
- [2] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov*. Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313.
- [3] *A. Polychronakos*. Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 703.
- [4] *L. Brink, H. Hansson, M. A. Vasiliev*. Phys. Lett. B. 1992. V. 286. P. 109.
- [5] *C. F. Dunkl*. Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 311. P. 167.
- [6] *L. Brink, H. Hansson, S. E. Konstein, M. A. Vasiliev*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 401. P. 591.
- [7] *А. М. Переломов*. ТМФ. 1971. Т. 6. С. 364.
- [8] *М. А. Васильев, О. В. Додлов, С. Е. Конштейн*. Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. С. 911.
- [9] *S. E. Konstein, M. A. Vasiliev*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 2872.
- [10] *М. А. Васильев*. Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 50. В. 8. С. 344; *M. A. Vasiliev*. Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 1115.

Поступила в редакцию 2.XII.1997 г.