Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Письменский, Расчет критического индекса η для теории φ^3 методом конформного бутстрапа, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 179–185

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8921>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:42:56

© 2015 г.

А. Л. Письменский*

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОГО ИНДЕКСА η ДЛЯ ТЕОРИИ φ^3 МЕТОДОМ КОНФОРМНОГО БУТСТРАПА

Предлагается метод расчета ϵ -разложения в модели скалярного поля со взаимодействием φ^3 , основанный на уравнениях конформного бутстрапа. Проводятся вычисления индекса η в трехпетлевом приближении. Результат совпадает с результатом, полученным ранее методом уравнений ренормгруппы на основе расчета большего числа диаграмм Фейнмана.

Ключевые слова: конформный бутстрап, теория φ^3 , критический индекс.

DOI: 10.4213/tmf8921

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач теории критического поведения является вычисление критических индексов. Весьма эффективными для ее решения оказались уравнения ренормгруппы. С их помощью для критических индексов оказалось возможным построение ϵ -разложений, т. е. степенных рядов по отклонению ϵ размерности пространства от логарифмической. Для описания поведения системы в критической точке, кроме уравнений ренормгруппы, использовались уравнения самосогласования, которые получаются в результате отбрасывания затравок в скелетных уравнениях для функций Грина [1]–[4]. Эти уравнения применялись для построения $(1/n)$ -разложения критических индексов в $O(n)$ -симметричной модели $(\varphi^2)^2$. Основным преимуществом этого подхода является значительное уменьшение числа диаграмм Фейнмана, которые нужно вычислить для решения задачи. Уравнения самосогласования для полного пропагатора и полной тройной вершины являются основой метода конформного бутстрапа, который использовался для расчета $(1/n^3)$ -поправки для индекса η в модели $(\varphi^2)^2$ [4]. В настоящей работе мы предлагаем использовать метод конформного бутстрапа для построения ϵ -разложения в модели φ^3 .

*Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: artem5085@mail.ru

2. МЕТОД КОНФОРМНОГО БУТСТРАПА ДЛЯ ТЕОРИИ φ^3

Мы исследуем модель безмассового скалярного поля $\varphi(x)$ со взаимодействием φ^3 в критической точке в евклидовом пространстве размерности $d = 6 - \epsilon$ в рамках метода конформного бутстрапа. Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{\lambda}{3!}\varphi^3.$$

В критической точке при $\epsilon \neq 0$ пропагатор является степенной функцией координат:

$$D(x, y) = \frac{A}{(x - y)^{2\alpha}}, \quad \alpha = \frac{d}{2} - 1 + \frac{\eta}{2},$$

где η – критический индекс. Наша задача – найти η в виде ϵ -разложения

$$\eta = \eta_1\epsilon + \eta_2\epsilon^2 + \eta_3\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Система уравнений конформного бутстрапа имеет вид [1]

$$V(\alpha, u; \omega)|_{\omega=0} = 1, \quad 2p(\alpha) = uS(\alpha) \frac{\partial V(\alpha, u; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}, \quad (1)$$

где

$$p(\alpha) = \pi^{-d} H(\alpha - d/2, d/2 - \alpha), \quad S(\alpha) = \pi^{2d} \frac{H(\alpha, \alpha, \alpha, a, a, a, d/2 + a - \alpha)}{\Gamma(d/2)},$$

$a = (d - \alpha)/2$ – показатель степени вершинной функции,

$$H(z_1, z_2, \dots) = H(z_1)H(z_2)\dots, \quad H(z) = \frac{\Gamma(d/2 - z)}{\Gamma(z)},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, а $u = C^2 A^3$ – ренорм-инвариантная комбинация амплитуд.

Функция $V(\alpha, u; \omega)$ определяется условием

$$\text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} + \dots = V(\alpha, u; \omega) \text{diagram}.$$

Здесь кружок – вершинная функция, кружок со значком ω – регуляризованная вершинная функция:

$$-\text{diagram} = \frac{\alpha}{a} \text{diagram}, \quad \omega\text{-diagram} = \alpha + 2\omega \text{diagram}.$$

Для вычисления коэффициента η_3 нам потребуется следующее приближение для функции V :

$$\text{diagram} + \frac{1}{2} \text{diagram} + \text{diagram} + 3 \text{diagram} + \dots = V \text{diagram}.$$

Обозначим диаграммы в левой части равенства как $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{31}, \gamma_{32}$:

$$V = \gamma_1 u + \frac{1}{2} \gamma_2 u^2 + (\gamma_{31} + 3\gamma_{32}) u^3 + \dots$$

Имеются три основные формулы вычисления безмассовых диаграмм:

петля: = ,

цепочка: = $\pi^{d/2} H(z_1, z_2, d - z_1 - z_2)$,

уникальная тройная вершина:

= $\pi^{d/2} H(z_1, z_2, z_3)$, $z_1 + z_2 + z_3 = d$

где линия с индексом z — это $\frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1 - x_2)^{2z}}$

Во всех диаграммах, рассмотренных выше, все вершины интегрирования уникальны, и для них удобно применить преобразование инверсии с базой в одной из трех наружных вершин. Диаграмма γ_1 сводится к следующей:

Таким образом, вычисление треххвостых диаграмм свелось к вычислению двуххвостых.

Вычисление γ_1 :

Введем обозначение $\Psi(\alpha; \omega) \equiv \pi^d H(\alpha, \alpha, a + \omega, a + \alpha' - \omega)$, а оставшийся граф обозначим как γ'_1 , т. е. $\gamma_1 = \Psi \gamma'_1$. Функция Ψ имеет следующую особенность:

$$\Psi|_{\omega=0} \sim \frac{1}{\epsilon}, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} \sim \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Диаграмма γ'_1 имеет полюс второго порядка по ϵ , и дифференцирование по ω не увеличивает сингулярность. Таким образом, чтобы вычислить три члена разложения

для $\gamma_1|_{\omega=0}$, надо рассчитать три члена для $\gamma'_1|_{\omega=0}$, а чтобы найти три члена для

$$\left. \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \gamma'_1 + \Psi \frac{\partial \gamma'_1}{\partial \omega} \right]_{\omega=0},$$

достаточно найти три члена для $\gamma'_1|_{\omega=0}$ и два для $\frac{\partial \gamma'_1}{\partial \omega}|_{\omega=0}$.

Рассмотрим следующую комбинацию:

Вторая и третья диаграммы считаются явно. При $\omega = 0$ и $\epsilon = 0$ указанная комбинация обращается в нуль. Это позволяет найти γ_1 с нужной точностью. В результате имеем

$$\begin{aligned} \gamma_1|_{\omega=0} = & \frac{8\pi^{18}}{(-1+3\eta_1)^3\epsilon^3} + \frac{3\pi^{18}[(-1+3\eta_1)(3\eta_1+13-8\tau)-24\eta_2]}{(1-3\eta_1)^4\epsilon^2} + \\ & - \frac{\pi^{18}}{4(-1+3\eta_1)^5\epsilon} [4(\pi^2-36\tau^2)(1-3\eta_1)^2 + 36\tau(-1+3\eta_1)(9\eta_1^2+36\eta_1-13-24\eta_2) - \\ & - 3(81\eta_1^4+522\eta_1^3+24\eta_1^2(35-9\eta_2)-2\eta_1(373+684\eta_2+144\eta_3) + \\ & + 480\eta_2+576\eta_2^2+96\eta_3+135)] + \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = & - \frac{32\pi^{18}}{(1-3\eta_1)^4\epsilon^4} + \frac{8\pi^{18}[(-1+3\eta_1)(12\tau-3\eta_1-20)+48\eta_2]}{(-1+3\eta_1)^5\epsilon^3} + \\ & + \frac{\pi^{18}}{(1-3\eta_1)^6\epsilon^2} [4(\pi^2-36\tau^2)(1-3\eta_1)^2 + 24\tau(-1+3\eta_1)(9\eta_1^2+57\eta_1-20-48\eta_2) - \\ & - 9(96\eta_1^3+33\eta_1^4+\eta_1^2(354-72\eta_2)+320\eta_2^2-16\eta_1(39\eta_2+8\eta_3))+2456\eta_1 - \\ & - 3(143+648\eta_2+128\eta_3) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \end{aligned}$$

где $\tau \equiv \gamma_E + \ln \pi$, $\gamma_E = -\Gamma'(1)$ – постоянная Эйлера.

Рассмотрим диаграмму γ_2 . В ней нужно рассчитать два члена. Аналогичным образом выносится функция Ψ :

$$\gamma_2 = \Psi \gamma'_2.$$

При этом граф γ'_2 получается следующий:

Этот граф имеет полюс четвертого порядка по ϵ , и дифференцирование по ω не увеличивает сингулярности. Нужно вычислить два члена для $\gamma'_2|_{\omega=0}$ и один для $\frac{\partial \gamma'_2}{\partial \omega}|_{\omega=0}$. Способом, аналогичным вычислению γ_1 , мы сводим расчет γ'_2 к вычислению диаграммы типа “петля с перекладиной”:

Эта диаграмма является конечной. Для наших вычислений требуется при $\omega = 0$ разложить ее до линейного по ϵ вклада, а при $\epsilon = 0$ – до линейного по ω вклада. Вычисления проводятся с помощью методов, изложенных в работах [1]–[8]. В результате имеем

$$\begin{aligned} \gamma_2|_{\omega=0} &= \frac{32\pi^{36}}{(-1+3\eta_1)^5\epsilon^5} - \\ &- \frac{4\pi^{36}[(-1+3\eta_1)(-71+48\tau-12\zeta(3)+9\eta_1(-5+4\zeta(3)))+120\eta_2]}{(1-3\eta_1)^6\epsilon^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^3}\right), \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} &= -\frac{128\pi^{36}}{(1-3\eta_1)^6\epsilon^6} + \\ &+ \frac{32\pi^{36}[(-1+3\eta_1)(-113+72\tau-48\eta_1+12(-1+3\eta_1)\zeta(3))+216\eta_2]}{3(-1+3\eta_1)^7\epsilon^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^4}\right), \end{aligned}$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана.

Перейдем к вычислению диаграмм γ_{31} и γ_{32} . Для них нужно вычислить только ведущую асимптотику. Имеем

$$\gamma_{31} = \Psi\gamma'_{31}, \quad \gamma_{32} = \Psi\gamma'_{32}$$

и

После аналогичных вычислений получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \gamma_{31}|_{\omega=0} &= \frac{128\pi^{54}}{(-1+3\eta_1)^7\epsilon^7} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^6}\right), & \gamma_{32}|_{\omega=0} &= \frac{128(3\zeta(3)-1)\pi^{54}}{3(-1+3\eta_1)^7\epsilon^7} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^6}\right), \\ \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} &= -\frac{512\pi^{54}}{(-1+3\eta_1)^8\epsilon^8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^7}\right), & \frac{\partial \gamma_{32}}{\partial \omega}\Big|_{\omega=0} &= -\frac{512(3\zeta(3)-1)\pi^{54}}{3(-1+3\eta_1)^8\epsilon^8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^7}\right). \end{aligned}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

После подстановки найденных выражений для γ_1 , γ_2 , γ_{31} , γ_{32} в систему уравнений (1) получаем

$$\eta = -\frac{1}{9}\epsilon - \frac{43}{729}\epsilon^2 + \left(-\frac{8375}{2^2 3^{10}} + \frac{16\zeta(3)}{3^5}\right)\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

что совпадает с уже известным аналитическим результатом для критического индекса η с трехпетлевой точностью, полученным методом уравнения ренормгруппы [9], [10]. В работе [11] также получен численно следующий четырехпетлевой результат:

$$\eta = -0.1111\epsilon - 0.0588\epsilon^2 + 0.0436\epsilon^3 - 0.081\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5).$$

В настоящей статье новых результатов нет, но есть надежда, что методом конформного бутстрапа удастся рассчитать аналитически четыре (или более) петли.

Кроме критического индекса η , мы нашли ренорм-инвариантную комбинацию u :

$$u = -\frac{8}{27\pi^{18}}\epsilon^3 + \frac{4(217 - 162\tau)}{3^6\pi^{18}}\epsilon^4 - \frac{4814 + 81\pi^2 - 7812\tau + 2916\tau^2 - 720\zeta(3)}{3^7\pi^{18}}\epsilon^5 + \mathcal{O}(\epsilon^6).$$

Выражение для u связано с координатой g_* нуля бета-функции ($\beta(g_*) = 0$) в специальной схеме ренормировок:

$$g_* \equiv \pi^d H^2(a, a, \alpha) \sqrt[3]{u} = -\frac{2}{3}\epsilon - \frac{107}{243}\epsilon^2 + \left(-\frac{5386}{3^9} + \frac{20\zeta(3)}{81}\right)\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Первый член инвариантен: равенство $g_* = -2\epsilon/3 + \dots$ верно в любой схеме, а последующие члены уже зависят от схемы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидным достоинством метода конформного бутстрапа является сокращение количества диаграмм Фейнмана, которые требуется рассчитать для получения результата. Но непосредственно он применим только для моделей с тройными затраповыми вершинами и конформной инвариантностью критических режимов.

Хотя этот метод удалось применить для расчета критического индекса η в теории $(\varphi^2)^2$ в рамках $(1/n)$ -разложения [4], для построения ϵ -разложения этого сделать не удалось.

Было бы интересно модифицировать метод конформного бутстрапа теории φ^3 так, чтобы его можно было применять непосредственно и в логарифмической размерности ($d = 6$), где конформная инвариантность заведомо нарушается.

Перечислим возможные физические приложения теории φ^3 : фазовые переходы первого рода [12], критическое поведение вблизи края Янга–Ли [13], [14], некоторые интересные формальные аспекты кубических моделей [15]. Можно также надеяться, что подобные методы окажутся полезными для исследования инфракрасных асимптотик в теории калибровочных полей Янга–Миллса.

Благодарности. Автор хотел бы поблагодарить Ю. М. Письмака, М. В. Компанийца, Л. Ц. Аджемяна за интересные дискуссии, а также выразить свою благодарность организаторам конференции “В поисках фундаментальных симметрий”, посвященной 90-летию со дня рождения Ю. В. Новожилова. Настоящая работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] А. Н. Васильев, *Квантовополе́вая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [2] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ*, **46**:2 (1981), 157–171.
- [3] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 291–306.
- [4] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ*, **50**:2 (1982), 195–206.
- [5] T. Huber, D. Maître, *Comput. Phys. Commun.*, **178**:10 (2008), 755–776, arXiv:0708.2443.
- [6] Д. И. Казаков, *ТМФ*, **62**:1 (1985), 127–135.
- [7] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, *Nucl. Phys. B*, **837**:3 (2010), 186–220, arXiv:1004.1153.
- [8] K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, *Nucl. Phys. B*, **192**:1 (1981), 159–204.
- [9] O. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham, A. J. McKane, *J. Phys A: Math. Gen.*, **13**:7 (1980), L247–L251.
- [10] O. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham, A. J. McKane, *J. Phys A: Math. Gen.*, **14**:9 (1981), 2391–2413.
- [11] Л. Ц. Аджемян, М. В. Компаниец, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 100–111.
- [12] F. Zhong, Q. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:17 (2005), 175701, 4 pp.
- [13] M. Fisher, *Phys. Rev. Lett.*, **40**:25 (1978), 1610–1613.
- [14] M. Breuer, H.-K. Janssen, *Z. Phys. B: Cond. Mat.*, **41**:1 (1981), 55–64.
- [15] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:25 (2004), 251601, 4 pp., arXiv: hep-th/0402011.