Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Ю. Письмак, Ю. М. Письмак, Моделирование взаимодействия материальной плоскости со спинорным полем в рамках подхода Симанзика, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 505–519

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8922>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:53:53

© 2015 г.

Д. Ю. Письмак*, Ю. М. Письмак*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ СО СПИНОРНЫМ ПОЛЕМ В РАМКАХ ПОДХОДА СИМАНЗИКА

Предлагается модель взаимодействия спинорного поля с материальной плоскостью, построенная на основе подхода Симанзика. Исследованы процессы рассеяния дираковских частиц на плоскости и свойства локализованных вблизи нее состояний. Модель может найти применение для широкого класса явлений, возникающих при взаимодействии полей квантовой электродинамики с двумерными материалами.

Ключевые слова: эффект Казимира, электродинамика в пространстве с макроскопическими неоднородностями, потенциал Черна–Саймонса, нанофизика, взаимодействие дираковских полей с двумерными объектами.

DOI: 10.4213/tmf8922

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантово-полевые модели элементарных частиц обычно рассматриваются в однородном и изотропном пространстве-времени [1]. Это вполне естественно при изучении различных процессов с простейшими возбуждениями вакуума. Однако, если свойства вакуума существенно меняются в результате взаимодействий квантовых полей с макроскопическими объектами, такой подход неприменим. В этом случае в динамике материальных тел могут возникать квантовые макроэффекты, не объяснимые в рамках классической физики.

Теоретически эта проблема была впервые рассмотрена в 1948 году Казимиром [2]. Он показал, что вследствие флуктуаций квантового вакуума возникает притяжение между двумя идеально проводящими пластинами плоского незаряженного конденсатора. Это явление, которое получило название эффекта Казимира (ЭК), наблюдается экспериментально, и полученные для хорошо проводящих материалов эмпирические результаты с высокой степенью точности согласуются с теоретическими [3]–[6].

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: dashap2@gmail.com, ypismak@yahoo.com

На характерных для ЭК расстояниях 10–1000 нм как классические, так и квантовые свойства системы оказываются существенными, что формирует особую нанофизику, исследование которой представляет не только теоретический интерес. Понимание ее закономерностей важно также для разработки новых технических устройств из-за все возрастающей тенденции к их миниатюризации.

Хотя теоретическим исследованиям ЭК посвящено много работ [6], [7], однако в них часто используются упрощенные модели свободной скалярной теории поля или свободного электромагнитного поля с фиксированными граничными условиями. Они применимы для исследования только отдельных аспектов ЭК, и многие важные особенности квантовой электродинамики в них не учитываются. Такие модели непригодны для полного описания широкого круга нанофизических явлений, возникающих в системе в результате взаимодействия ее квантовых степеней свободы с материальными телами.

Основой представленных в настоящей работе исследований служит подход Симанзика [8], в котором взаимодействия квантованных полей с пространственной неоднородностью (дефектами) моделируются дополнительным функционалом действия (действием дефекта), сосредоточенным в той области пространства, где эта неоднородность – макроскопический объект – находится. Важным предположением является также выполнение обычных требований, предъявляемых к квантово-полевым моделям (локальность, перенормируемость, симметричные свойства).

В связи с последними достижениями в области физики двумерных материалов особое внимание уделяется квантово-полевым моделям с двумерными пространственными неоднородностями. В квантовой электродинамике (КЭД) взаимодействие фотонов с двумерным дефектом полностью определяется требованиями локальности, калибровочной инвариантности, перенормируемости и описывается функционалом действия Черна–Саймонса с одной безразмерной константой, характеризующей свойства материала [9]. От нее зависит сила Казимира, которая оказывается тем самым неуниверсальной и для плоского конденсатора может быть не только притягивающей, но и отталкивающей [9].

В рамках этой модели было также показано, что при взаимодействии плоского дефекта с электрическим зарядом возникает магнитное поле, а постоянный ток, параллельный плоскости, генерирует электрическое поле [9]. Расчеты потенциала Казимира–Полдера для нейтрального атома вблизи плоской поверхности позволили найти нарушающую четность поправку к ранее известным результатам [10].

Взаимодействие электромагнитных волн с двумерными плоскими дефектами в модели с потенциалом Черна–Саймонса исследовалось в работах [11], [12], где было показано, что взаимодействие Черна–Саймонса не меняет закон Снеллиуса, однако меняет коэффициенты прохождения и отражения, которые зависят от величины константы связи. Кроме того, оно приводит к перемешиванию параллельных и перпендикулярных компонент поляризации (ТЕ- и ТМ-мод) электромагнитных волн и изменяет соотношение между частотой и волновым вектором для волн, распространяющихся в промежутке между двумя полностью отражающими средами. Это дает возможность, в частности, определить оптическими методами константу взаимодействия Черна–Саймонса, через которую выражается холловская проводимость.

При конечной константе потенциал Черна–Саймонса нарушает пространственную четность и инвариантность относительно обращения времени. Это имеет место также в модели взаимодействия фотонов с полем Дирака размерности $2 + 1$, используемой для исследования свойств двумерных материалов [13], [14]. В этой модели не представлены реальные дираковские поля в $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени, поэтому она пригодна для описания процессов с электронами и позитронами только внутри материальной плоскости, что существенно ограничивает область применения модели.

В настоящей работе для моделирования взаимодействия двумерного материального объекта с дираковским полем предлагается использовать подход Симанзика в обычной КЭД в $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени. Подобная задача для спинорного поля рассматривалась в работах [15]. В качестве функционала действия дефекта, кроме фотонного действия Черна–Саймонса, требуется учесть чисто дираковский вклад, соответствующий базисным принципам КЭД. В рамках этой модели мы исследуем процессы рассеяния спинорных частиц на материальной плоскости, а также локализованные в ее окрестности связанные состояния.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для описания взаимодействия квантового поля с материальным объектом (дефектом) Симанзик предложил использовать функционал действия вида

$$S(\varphi) = S_V(\varphi) + S_{\text{def}}(\varphi).$$

Здесь S_V – действие исходной квантово-полевой системы, S_{def} – действие дефекта:

$$S_V(\varphi) = \int L(\varphi(x)) d^D x, \quad S_{\text{def}}(\varphi) = \int_{\Gamma} L_{\text{def}}(\varphi(x)) d^{D'} x,$$

где Γ – подпространство размерности $D' \leq D$ в D -мерном пространстве [8]. Основные принципы КЭД – калибровочная инвариантность, локальность, перенормируемость – налагают сильные ограничения на возможный вид действия дефекта S_{def} . Взаимодействие с электромагнитным полем $A_\mu(x)$ двумерной поверхности без зарядов и токов, форма которой определяется уравнением $\Phi(x) = 0$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, описывается функционалом Черна–Саймонса:

$$S_{\text{def}}(A) = \frac{a}{2} \int \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_\lambda \Phi(x) A_\mu(x) F_{\nu\rho}(x) \delta(\Phi(x)) d^4 x,$$

где $F_{\nu\rho}(x) = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu$, $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ обозначает полностью антисимметричный тензор ($\varepsilon^{0123} = 1$), параметр a – безразмерная константа взаимодействия. Выражение представляет собой наиболее общую форму сосредоточенного на поверхности дефекта калибровочно-инвариантного действия, инвариантного относительно перепараметризации и не содержащего параметров отрицательной размерности.

Фермионный вклад в действие дефекта в самом общем виде записывается следующим образом:

$$S_{\text{def}}(\bar{\psi}, \psi) = \sum_{j=1}^{16} \int \alpha_j \bar{\psi}(x) \Gamma_j \psi(x) \delta(\Phi(x)) dx,$$

где Γ_j – 16 базисных матриц Дирака, α_j – безразмерные константы взаимодействия. Полное действие модели, удовлетворяющее требованиям локальности, калибровочной инвариантности и перенормируемости, имеет вид

$$S(\bar{\psi}, \psi, A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m + ie\hat{A})\psi + S_{\text{def}}(A) + S_{\text{def}}(\bar{\psi}, \psi).$$

В силу требования перенормируемости взаимодействие полей описывается стандартным вкладом $ie\bar{\psi}\hat{A}\psi$ в действие КЭД.

В качестве дефекта мы будем рассматривать материальную плоскость $x_3 = 0$. В этом случае в дираковской части действия нашей модели

$$S(\bar{\psi}, \psi) = \int \bar{\psi}(x)(i\hat{\partial} - m + \Omega(x_3))\psi(x) dx \quad (1)$$

взаимодействие спинорного поля с плоскостью описывается матрицей $\Omega(x_3) = Q\delta(x_3)$. Так как $\Omega(x_3)$ и $\delta(x_3)$ имеют размерность массы, то матрица Q безразмерна. В силу симметрии нашей системы она должна быть инвариантна относительно преобразований подгруппы группы Пуанкаре, не меняющих координаты x_3 . В наиболее общем случае матрица Q может быть представлена в виде

$$Q = q_1 I + q_2 \gamma_5 + q_3 \gamma_3 + q_4 \gamma_5 \gamma_3, \quad (2)$$

где I – единичная (4×4) -матрица, а $\gamma_3, \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ – матрицы Дирака, для которых мы используем следующие представления:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Движение спинорной частицы в поле дефекта $\Omega(x_3)$ описывается уравнением Дирака

$$(i\hat{\partial} - m + \Omega(x_3))\psi(x) = 0. \quad (3)$$

Оно является одним из уравнений Эйлера–Лагранжа для действия (1), которое получается при его вариационном дифференцировании по $\bar{\psi}(x)$. В результате дифференцирования (1) по $\psi(x)$ получается второе уравнение:

$$(\partial_\mu \bar{\psi}(x))\gamma^\mu + \bar{\psi}(x)(m - \Omega(x_3)) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что $\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)\gamma_0$, если $\gamma_0\Omega^+(x_3) = \Omega(x_3)\gamma_0$.

В дальнейшем мы будем использовать для пространственных частей векторов пространства-времени обозначения

$$\bar{x} = (x_0, x_1, x_2), \quad \bar{p}\bar{x} = p_0x_0 - p_1x_1 - p_2x_2.$$

Функция $\psi(x) = \psi(\bar{x}, x_3)$, удовлетворяющая уравнению (3), не может быть непрерывной при $x_3 = 0$ и не может иметь в этой точке сингулярности дельтаобразного типа. Представим ее в виде $\psi(x) = \psi_s(x) + \psi_a(x)$, где

$$\psi_s(x) = \frac{1}{2}(\psi(\bar{x}, x_3) + \psi(\bar{x}, -x_3)), \quad \psi_a(x) = \frac{1}{2}(\psi(\bar{x}, x_3) - \psi(\bar{x}, -x_3)).$$

Мы предполагаем, что пределы справа и слева $x_3 \rightarrow \pm 0$ у функции $\psi(x)$ существуют. Тогда функция $\psi_s(x)$ в точке $x_3 = 0$ непрерывна, а пределы $x_3 \rightarrow \pm 0$ функции $\psi_a(x)$ справа и слева различаются знаками. Проинтегрируем по x_3 в пределах от $-a$ до a , $a > 0$, уравнение (3) и вычислим затем предел $a \rightarrow 0$. В результате мы получим

$$\begin{aligned} -i\gamma_3\psi_a(\bar{x}) + Q \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a \delta(x_3)\psi(x) dx_3 &= 0, \\ \psi_a(\bar{x}) &= \lim_{x_3 \rightarrow +0} \psi(x) - \lim_{x_3 \rightarrow -0} \psi(x) = 2 \lim_{x_3 \rightarrow +0} \psi_a(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Оставшийся в (4) интеграл непосредственно из определения дельта-функции не вычисляется, так как функция имеет разрыв при $x_3 = 0$. Поэтому заменим в (4) дельта-функцию ее регуляризованным выражением

$$\delta_\lambda(x_3) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{-\lambda x_3^2/2}$$

и вычислим интеграл в пределе $\lambda \rightarrow \infty$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \delta_\lambda(x_3)\psi(\bar{x}, x_3) dx_3 &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-\lambda x_3^2/2} \psi(x) dx_3 = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-\lambda x_3^2/2} \psi_s(x) dx_3 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-a\sqrt{\lambda}}^{a\sqrt{\lambda}} e^{-x_3^2/2} \psi_s\left(\bar{x}, \frac{x_3}{\sqrt{\lambda}}\right) dx_3. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\int_{-a}^a \delta(x_3) \psi(\bar{x}, x_3) dx_3 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \delta_\lambda(x_3) \psi(\bar{x}, x_3) dx_3 = \psi_s(\bar{x}),$$

$$\psi_s(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\psi(x) + \psi(-x)) \Big|_{x_3=0}.$$

В итоге наша задача может быть сформулирована следующим образом. При $x_3 \neq 0$ поле $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака

$$(i\hat{\partial} - m)\psi(x) = 0, \quad (5)$$

а при $x_3 = 0$ выполняется соотношение

$$-i\gamma_3 \psi_a(\bar{x}) + Q\psi_s(\bar{x}) = 0. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (5) при $x_3 > 0$ можно представить в виде

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\bar{p}\bar{x}} \psi_+(\bar{p}, x_3) d\bar{p}.$$

Тогда из (5) следует, что $\psi_+(\bar{p}, x_3)$ удовлетворяет уравнению

$$(i\gamma_3 \partial_3 + \hat{p} + m)\psi_+(\bar{p}, x_3) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$\psi_+(\bar{p}, x_3) = U(\bar{p}, x_3) \chi_+(\bar{p}), \quad U(\bar{p}, x_3) = e^{i\gamma_3(\hat{p}+m)x_3}, \quad (7)$$

где $\chi_+(\bar{p})$ – произвольный спинор, зависящий только от $\bar{p}$.

Аналогично при $x_3 < 0$ получаем

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\bar{p}\bar{x}} \psi_-(\bar{p}, x_3) d\bar{p}, \quad \psi_-(\bar{p}, x_3) = U(\bar{p}, x_3) \chi_-(\bar{p}). \quad (8)$$

Из (6)–(8) получаем соотношение

$$-i\gamma_3(\chi_+ - \chi_-) + Q(\chi_+ + \chi_-) = 0,$$

из которого следует

$$\chi_- = S\chi_+, \quad S = (i\gamma_3 + Q)^{-1}(i\gamma_3 - Q). \quad (9)$$

Введя обозначения

$$\kappa(\bar{p}) = \sqrt{\bar{p}^2 - m^2}, \quad P^\pm(\bar{p}) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\gamma_3(\hat{p} + m)}{\kappa(\bar{p})} \right),$$

мы можем представить $U(\bar{p}, x_3)$ в виде

$$\begin{aligned} U(\bar{p}, x_3) &= e^{i\gamma_3(\hat{p}+m)x_3} = \cos(\kappa(\bar{p})x_3) + i \sin(\kappa(\bar{p})x_3) \frac{\gamma_3(\hat{p}+m)}{\kappa(\bar{p})} = \\ &= e^{i\kappa(\bar{p})x_3} P^-(\bar{p}) + e^{-i\kappa(\bar{p})x_3} P^+(\bar{p}). \end{aligned}$$

Матрицы $P^\pm(\bar{p})$ являются проекторами:

$$\begin{aligned} P^\pm(\bar{p})P^\pm(\bar{p}) &= P^\pm(\bar{p}), & P^+(\bar{p}) + P^-(\bar{p}) &= 1, \\ P^+(\bar{p})P^-(\bar{p}) &= P^-(\bar{p})P^+(\bar{p}) = 0. \end{aligned}$$

Каждый из них имеет два собственных двумерных подпространства L^+ и L^- , которые представляются в виде линейной комбинаций двух взаимно ортогональных собственных векторов $v_1^\pm, v_2^\pm$:

$$\begin{aligned} L^\pm(a_1^\pm, a_2^\pm) &= a_1^\pm v_1^\pm + a_2^\pm v_2^\pm, \\ P^\pm(\bar{p})L^\pm(a_1^\pm, a_2^\pm) &= L^\pm(a_1^\pm, a_2^\pm), & P^\pm(\bar{p})L^\mp(a_1^\mp, a_2^\mp) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $a_i^\pm, i = 1, 2$, – комплексные параметры, а $v_i^\pm, i = 1, 2$, – спиноры, которые мы выбираем в виде

$$\begin{aligned} v_1^- &= n_1^{-1}(-h_1, h_2^-, 1, h_3^-), & v_2^- &= n_2^{-1}(h_1, h_2^+, 1, h_3^+), \\ v_1^+ &= n_2^{-1}(-h_1, h_2^+, 1, -h_3^+), & v_2^+ &= n_1^{-1}(h_1, h_2^-, 1, -h_3^-), \\ n_1 &= 2\sqrt{\frac{p_0 h_2^-}{p_1 + ip_2}}, & n_2 &= 2\sqrt{\frac{p_0 h_2^+}{p_1 + ip_2}}, & h_1 &= \frac{\sqrt{p_0^2 - m^2}}{m + p_0}, \\ h_2^\pm &= \frac{p_0^2 - m^2 \pm \sqrt{p_0^2 - m^2} \kappa(\bar{p})}{(m + p_0)(p_1 - ip_2)}, & h_3^\pm &= \frac{\kappa(\bar{p}) \pm \sqrt{p_0^2 - m^2}}{p_1 - ip_2}. \end{aligned}$$

Эти спиноры являются собственными для оператора спиральности

$$\sigma(\vec{p}) = \frac{i}{2|\vec{p}|}(\vec{p}\vec{s}), \quad \vec{s} = (\gamma_2\gamma_3, -\gamma_1\gamma_3, \gamma_1\gamma_2).$$

Для них выполняются соотношения

$$\sigma(\vec{p})|_{p_3=\pm\kappa(\bar{p})} v_1^\pm = -\frac{1}{2}v_1^\pm, \quad \sigma(\vec{p})|_{p_3=\pm\kappa(\bar{p})} v_2^\pm = \frac{1}{2}v_2^\pm.$$

Представим спиноры $\chi_\pm(\bar{p})$ в виде

$$\chi_\pm(\bar{p}) = b_\pm^1(\bar{p})v_1^\mp(\bar{p}) + b_\pm^2(\bar{p})v_2^\mp(\bar{p}) + c_\pm^1(\bar{p})v_1^\pm(\bar{p}) + c_\pm^2(\bar{p})v_2^\pm(\bar{p}). \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\chi_\pm^*(\bar{p})\gamma_0\gamma_3\chi_\pm(\bar{p}) = \bar{\chi}_\pm(\bar{p})\gamma_3\chi_\pm(\bar{p}) = \frac{\kappa(\bar{p})}{p_0}(|c_\pm^1|^2 + |c_\pm^2|^2 - |b_\pm^1|^2 - |b_\pm^2|^2). \quad (11)$$

Таким образом, если $p_0 > 0$, $\kappa(\vec{p}) > 0$, то амплитуды $c_{\pm}^i$ описывают движение частиц в направлении $x_3 > 0$, а $b_{\pm}^i$ – в противоположном направлении.

Основываясь на уравнении (3), мы исследуем процесс рассеяния спинорных частиц на плоскости дефекта, а также свойства локализованных в окрестности дефекта связанных состояний.

3. РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ НА ПЛОСКОСТИ $x_3 = 0$

Решение уравнений Дирака (3) описывает движение свободных частиц при $x_3 \neq 0$, если $\kappa(\vec{p}) > 0$. Это условие всегда выполняется для поля Дирака $\psi(x)$ в случае однородного и изотропного пространства, и ток, определяемый как

$$j^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) = \psi^{*}(x)\gamma^0\gamma^{\mu}\psi(x),$$

удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_{\mu}j^{\mu}(x) = 0$, вследствие чего полный ток I вдоль оси x_3

$$I = \int j_3(x) d\bar{x} = - \int j^3(x) d\bar{x},$$

не зависит от координаты x_3 . Для нашей модели определим токи $j_{\pm}^{\mu}(x)$ в полупространствах $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$:

$$j_{\pm}^{\mu}(x) = \bar{\psi}_{\pm}(x)\gamma^{\mu}\psi_{\pm}(x) = \psi_{\pm}^{*}(x)\gamma^0\gamma^{\mu}\psi_{\pm}(x).$$

Соответствующие им полные токи

$$I_{\pm} = - \int j_{\pm}^3(x) d\bar{x}$$

не зависят от координаты x_3 . Выразим токи $I_{\pm}$ через введенные нами в (7), (8) спиноры $\chi_{\pm}(\vec{p})$. Вследствие (11) имеем

$$I_{\pm} = \int \bar{\kappa}_{\pm}(\vec{p})\gamma_3\kappa(\vec{p}) d\vec{p} = \int \frac{\kappa(\vec{p})}{p_0}(|c_{\pm}^1|^2 + |c_{\pm}^2|^2 - |b_{\pm}^1|^2 - |b_{\pm}^2|^2) d\vec{p}.$$

Таким образом, если $p_0 > 0$, то амплитуды $c_{\pm}^1, c_{\pm}^2$ описывают частицы, движущиеся в положительном направлении оси x_3 , а $b_{\pm}^1, b_{\pm}^2$ – в отрицательном.

Рассмотрим процесс, в котором первоначальный поток частиц I_{in} с импульсом $\vec{p} = (p_1, p_2, \kappa(\vec{p}))$ движется к плоскости $x_3 = 0$ из области $x_3 < 0$. Его характеристики определяются амплитудами c_{-}^1, c_{-}^2 . В области $x_3 < 0$ также имеется поток отраженных частиц, заданный амплитудами b_{-}^1, b_{-}^2 . В области $x_3 > 0$ имеются только частицы, движущиеся в положительном направлении. Их поток описывается амплитудами c_{+}^1, c_{+}^2 . Таким образом, для рассматриваемого процесса коэффициенты отражения K_{r} и прохождения K_{tr} имеют вид

$$K_{\text{r}} = \frac{|b_{-}^1|^2 + |b_{-}^2|^2}{|c_{-}^1|^2 + |c_{-}^2|^2}, \quad K_{\text{tr}} = \frac{|c_{+}^1|^2 + |c_{+}^2|^2}{|c_{-}^1|^2 + |c_{-}^2|^2}.$$

Амплитуды $c_{-}^1, b_{-}^1, c_{+}^1$ соответствуют частицам с отрицательной спиральностью, а $c_{-}^2, b_{-}^2, c_{+}^2$ – с положительной спиральностью. Для рассматриваемого нами процесса рассеяния амплитуды c_{-}^1, c_{-}^2 считаются заданными, а $b_{-}^1, b_{-}^2, c_{+}^1, c_{+}^2$ находятся

из уравнения (9), связывающего χ_+ с χ_- , и из уравнений

$$b_+^1 = 0, \quad b_+^2 = 0. \quad (12)$$

Проведем анализ уравнения (9), необходимый для решения поставленной задачи. Непосредственно из этого уравнения следует, что если

$$S^+ \gamma_0 \gamma_3 S = \gamma_0 \gamma_3, \quad (13)$$

то $\bar{\chi}_-(\bar{p}) \gamma_3 \chi_-(\bar{p}) = \bar{\chi}_+(\bar{p}) \gamma_3 \chi_+(\bar{p})$ и $I_+ = I_-$. Таким образом, соотношение (13) представляет собой условие отсутствия поглощения и излучения частиц плоскостью $x_3 = 0$, в результате чего полный ток I оказывается не зависящим от координаты x_3 .

Так как определитель матрицы $\gamma_0 \gamma_3$ равен единице, то из (13) получаем, что $|\det S| = 1$. Из свойств симметрии рассматриваемой системы следует, что S имеет вид

$$S = s_1 I + s_2 \gamma_5 + s_3 \gamma_3 + s_4 \gamma_5 \gamma_3. \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что для матрицы вида (14) справедливы равенства

$$S^{-1} = (s_1 I - s_2 \gamma_5 - s_3 \gamma_3 - s_4 \gamma_5 \gamma_3)(s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 - s_4^2)^{-1}, \quad (15)$$

$$\det S = (s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 - s_4^2)^2. \quad (16)$$

Так как условие (13) можно записать в виде $S^{-1} = \gamma_0 \gamma_3 S^+ \gamma_0 \gamma_3$, то вследствие эрмитовости I , γ_5 , $\gamma_5 \gamma_3$, антиэрмитовости γ_3 и свойств коммутации этих матриц с γ_0 , γ_3 мы имеем

$$S^{-1} = s_1^* I + s_2^* \gamma_5 + s_3^* \gamma_3 - s_4^* \gamma_5 \gamma_3. \quad (17)$$

Воспользовавшись тем, что $|\det S| = 1$, представим $\det S$ в виде $\det S = e^{2i\eta}$, где $0 \leq \eta < \pi$. Сравнивая (17) с (15), (16), получаем

$$\begin{aligned} s_1^* &= e^{-i\eta} s_1, & s_2^* &= -e^{-i\eta} s_2, & s_3^* &= -e^{-i\eta} s_3, & s_4^* &= e^{-i\eta} s_4, \\ s_1 &= \pm e^{i\eta/2} |s_1|, & s_2 &= \pm i e^{i\eta/2} |s_2|, & s_3 &= \pm i e^{i\eta/2} |s_3|, & s_4 &= \pm e^{i\eta/2} |s_4|. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполняется соотношение (13), то, выбрав параметры $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3, \varsigma_4$ вещественными, матрицу S можно представить в виде $S = e^{i\varphi} \mathcal{S}$, где $0 \leq \varphi < 2\pi$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \varsigma_1 I + i\varsigma_2 \gamma_5 + i\varsigma_3 \gamma_3 + \varsigma_4 \gamma_5 \gamma_3, \\ \varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 - \varsigma_3^2 - \varsigma_4^2 &= 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Из соотношения (9) можно выразить Q через S :

$$Q = i\gamma_3(1 - S)(1 + S)^{-1}.$$

Отсюда с учетом (18) получаем выражения для коэффициентов q_i , $1 \leq i \leq 4$, в формуле (2) в терминах параметров ς_i :

$$q_1 = -\frac{\varsigma_3}{1 + \varsigma_1}, \quad q_2 = -\frac{i\varsigma_4}{1 + \varsigma_1}, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = -\frac{\varsigma_2}{1 + \varsigma_1}. \quad (19)$$

Из этих соотношений следует, что q_2 мнимо, а q_1, q_4 вещественны. Соотношения (18) и (19) позволяют выразить ς_i через q_i :

$$\begin{aligned}\varsigma_1 &= -1 + \frac{2}{1 - q_1^2 + q_2^2 + q_4^2}, & \varsigma_2 &= -\frac{2q_4}{1 - q_1^2 + q_2^2 + q_4^2}, \\ \varsigma_3 &= -\frac{2q_1}{1 - q_1^2 + q_2^2 + q_4^2}, & \varsigma_4 &= \frac{2iq_2}{1 - q_1^2 + q_2^2 + q_4^2}.\end{aligned}$$

Подставив в уравнение (9) выражение для матрицы S в виде (18), а $\chi_{\pm}$ в виде (10), получим линейные уравнения для амплитуд $b_{\pm}^1, b_{\pm}^2, c_{\pm}^1, c_{\pm}^2$. Их решение с учетом (12) позволяет найти потоки отраженных и прошедших частиц различных поляризаций. Введем обозначения

$$\begin{aligned}c_{11} &= c_-^{1*} c_-^1, & c_{22} &= c_-^{2*} c_-^2, & c_s &= c_-^{2*} c_-^1 + c_-^{1*} c_-^2, & c_a &= c_-^{2*} c_-^1 - c_-^{1*} c_-^2, \\ g &= p_0(p_0^2 - m^2)((\varsigma_2^2 - \varsigma_3^2)m^2 + (\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2)\kappa^2)^2 + 4\varsigma_1^2\varsigma_3^2m^2\kappa^2.\end{aligned}$$

Поток отраженных частиц с положительной спиральностью оказывается равным

$$|b_-^2|^2 = \frac{c_{11}r_1^+ + c_{22}r_2^+ + c_sr_3^+ + ic_ar_4^+}{g},$$

где

$$\begin{aligned}r_1^+ &= -m^2(p_1^2 + p_2^2)\kappa((\varsigma_1\varsigma_3 + \varsigma_2\varsigma_4)^2\kappa^2 + (\varsigma_2^2 - \varsigma_3^2)^2m^2), \\ r_2^+ &= -\kappa^3\left(\left((\varsigma_2^2 - \varsigma_3^2)mp_0 + (\varsigma_2\varsigma_3 - \varsigma_1\varsigma_4)\kappa\sqrt{p_0^2 - m^2}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left((\varsigma_1\varsigma_3 + \varsigma_2\varsigma_4)p_0\kappa + (\varsigma_1\varsigma_2 - \varsigma_3\varsigma_4)m\sqrt{p_0^2 - m^2}\right)^2\right), \\ r_3^+ &= -\kappa^2m\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\left(p_0((\varsigma_2^2 - \varsigma_3^2)^2m^2 + (\varsigma_1\varsigma_3 + \varsigma_2\varsigma_4)^2\kappa^2) + \right. \\ &\quad \left. + \varsigma_2\varsigma_3m\kappa\sqrt{p_0^2 - m^2}\right), \\ r_4^+ &= -\kappa^2m\sqrt{p_0^2 - m^2}\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\left((\varsigma_2\varsigma_3 - \varsigma_1\varsigma_4)(\varsigma_1\varsigma_3 + \varsigma_2\varsigma_4)\kappa^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\varsigma_2^2 - \varsigma_3^2)(\varsigma_1\varsigma_2 - \varsigma_3\varsigma_4)m^2\right).\end{aligned}$$

Поток отраженных частиц с отрицательной спиральностью описывается следующим образом:

$$|b_-^1|^2 = \frac{c_{11}r_1^- + c_{22}r_2^- + c_sr_3^- + ic_ar_4^-}{g},$$

где $r_2^- = r_1^+, r_4^- = -r_4^+$,

$$\begin{aligned}r_1^- &= -\kappa^3\left(\left((\varsigma_2^2 - \varsigma_3^2)mp_0 - (\varsigma_2\varsigma_3 - \varsigma_1\varsigma_4)\kappa\sqrt{p_0^2 - m^2}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left((\varsigma_1\varsigma_3 + \varsigma_2\varsigma_4)p_0\kappa - (\varsigma_1\varsigma_2 - \varsigma_3\varsigma_4)m\sqrt{p_0^2 - m^2}\right)^2\right), \\ r_3^- &= \kappa^2m\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\left(p_0((\varsigma_2^2 - \varsigma_3^2)^2m^2 + (\varsigma_1\varsigma_3 + \varsigma_2\varsigma_4)^2\kappa^2) - \right. \\ &\quad \left. - \varsigma_2\varsigma_3m\kappa\sqrt{p_0^2 - m^2}\right).\end{aligned}$$

Поток пролетевших частиц с положительной спиральностью представляется в виде

$$|c_+^2|^2 = \frac{c_{11}t_1^+ + c_{22}t_2^+ + c_s t_3^+ + i c_a t_4^+}{g},$$

где

$$\begin{aligned} t_1^+ &= \kappa^3 \left(\left(\varsigma_3 m \sqrt{p_0^2 - m^2} + \varsigma_2 p_0 \kappa \right)^2 + \varsigma_1^2 (p_0^2 - m^2) \kappa^2 \right), \\ t_2^+ &= \varsigma_2^2 \kappa^3 m^2 (p_1^2 + p_2^2), \\ t_3^+ &= -\kappa^3 \varsigma_2 m \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \left(\varsigma_3 m \sqrt{p_0^2 - m^2} + \varsigma_2 p_0 \kappa \right), \\ t_4^+ &= \kappa^4 \varsigma_1 \varsigma_2 m \sqrt{p_0^2 - m^2} \sqrt{p_1^2 + p_2^2}. \end{aligned}$$

Для потока пролетевших частиц с отрицательной спиральностью мы получаем

$$|c_+^1|^2 = \frac{c_{11}t_1^- + c_{22}t_2^- + c_s t_3^- + i c_a t_4^-}{g},$$

где $t_1^- = t_2^+$, $t_4^- = -t_4^+$,

$$\begin{aligned} t_2^- &= \kappa^3 \left(\left(\varsigma_3 m \sqrt{p_0^2 - m^2} - \varsigma_2 p_0 \kappa \right)^2 + \varsigma_1^2 (p_0^2 - m^2) \kappa^2 \right), \\ t_3^- &= -\kappa^3 \varsigma_2 m \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \left(\varsigma_3 m \sqrt{p_0^2 - m^2} - \varsigma_2 p_0 \kappa \right). \end{aligned}$$

Для частного случая движения частиц ортогонально плоскости дефекта ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$) удобно использовать обозначение

$$g_1 = p_0 \left((\varsigma_2^2 p_0^2 - \varsigma_3^2 m^2 + \varsigma_1^2 (p_0^2 - m^2))^2 + 4 \varsigma_1^2 \varsigma_3^2 m^2 (p_0^2 - m^2) \right).$$

В этом случае потоки отраженных и пролетевших частиц с положительной и отрицательной спиральностью оказываются равными

$$\begin{aligned} |b_-^2|^2 &= \frac{c_{22}r_2^+}{g_1}, \\ r_2^+ &= -\sqrt{p_0^2 - m^2} \left((\varsigma_2 p_0 - \varsigma_3 m)^2 + \varsigma_1^2 (p_0^2 - m^2) \right) \left((\varsigma_3 p_0 + \varsigma_2 m)^2 + \varsigma_4^2 (p_0^2 - m^2) \right), \\ |b_-^1|^2 &= \frac{c_{11}r_1^-}{g_1}, \\ r_1^- &= -\sqrt{p_0^2 - m^2} \left((\varsigma_2 p_0 + \varsigma_3 m)^2 + \varsigma_1^2 (p_0^2 - m^2) \right) \left((\varsigma_3 p_0 - \varsigma_2 m)^2 + \varsigma_4^2 (p_0^2 - m^2) \right), \\ |c_+^2|^2 &= \frac{c_{11}t_1^+}{g_1}, \\ t_1^+ &= (p_0^2 - m^2)^{3/2} \left((\varsigma_2 p_0 + \varsigma_3 m)^2 + \varsigma_1^2 (p_0^2 - m^2) \right), \\ |c_+^1|^2 &= \frac{c_{22}t_2^-}{g_1}, \\ t_2^- &= (p_0^2 - m^2)^{3/2} \left((\varsigma_2 p_0 - \varsigma_3 m)^2 + \varsigma_1^2 (p_0^2 - m^2) \right). \end{aligned}$$

4. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Локализованные в окрестности $x_3 = 0$ состояния получаются, если $\bar{p}^2 - m^2 < 0$ и $\kappa(\bar{p})$ является мнимым. По определению мы считаем, что $\kappa(\bar{p}) = i|\kappa(\bar{p})|$. В этом случае мы получаем условия отсутствия экспоненциального роста $\psi(x)$ при $x_3 \rightarrow \pm\infty$:

$$P^+ \chi_+(\bar{p}) = 0, \quad P^- \chi_-(\bar{p}) = 0.$$

Таким образом, $c_+^j = 0$, $b_-^j = 0$, $j = 1, 2$, и

$$\chi_+(\bar{p}) = v_1^- b_+^1 + v_2^- b_+^2, \quad \chi_-(\bar{p}) = v_1^+ c_-^1 + v_2^+ c_-^2, \quad (20)$$

и в силу (9) амплитуды b_+^1 , b_+^2 удовлетворяют соотношениям

$$v_1^{+*} \gamma_0 \gamma_3 S \chi_+(\bar{p}) = \frac{\kappa(\bar{p})}{p_0} c_+^1 = 0, \quad v_2^{+*} \gamma_0 \gamma_3 S \chi_+(\bar{p}) = \frac{\kappa(\bar{p})}{p_0} c_+^2 = 0,$$

из которых получаем систему уравнений

$$\alpha^- b_+^1 + \beta b_+^2 = 0, \quad \beta b_+^1 + \alpha^+ b_+^2 = 0. \quad (21)$$

Здесь мы использовали обозначения

$$\alpha^\pm = \frac{i\sqrt{p_0^2 - m^2}(\varsigma_3 m - \varsigma_1 \lambda) \pm \varsigma_2 p_0 \lambda}{\sqrt{p_0^2 - m^2}},$$

$$\beta = \frac{i\varsigma_2 m \sqrt{p_0^2(p_0^2 - m^2 + \lambda^2)}}{p_0 \sqrt{p_0^2 - m^2}}$$

и $\lambda = |\kappa(\bar{p})|$. Вследствие (9) амплитуды c_-^1 , c_-^2 , определяющие $\chi_-(\bar{p})$ в (20), выражаются в терминах b_+^1 , b_+^2 :

$$c_-^1 = \frac{\varsigma_3 m \sqrt{p_0^2(p_0^2 - m^2 + \lambda^2)}}{p_0 \lambda \sqrt{p_0^2 - m^2}} b_+^1 + \frac{\sqrt{p_0^2 - m^2}(\varsigma_2 m + \varsigma_4 \lambda) - i\varsigma_3 p_0 \lambda}{\lambda \sqrt{p_0^2 - m^2}} b_+^2,$$

$$c_-^2 = \frac{\sqrt{p_0^2 - m^2}(\varsigma_2 m + \varsigma_4 \lambda) + i\varsigma_3 p_0 \lambda}{\lambda \sqrt{p_0^2 - m^2}} b_+^1 + \frac{\varsigma_3 m \sqrt{p_0^2(p_0^2 - m^2 + \lambda^2)}}{p_0 \lambda \sqrt{p_0^2 - m^2}} b_+^2.$$

Из (21) следует обращение в нуль двух линейных комбинаций этих уравнений:

$$(\alpha^+ \alpha^- - \beta^2) b_+^1 = 0, \quad (\alpha^+ \alpha^- - \beta^2) b_+^2 = 0.$$

Таким образом, нетривиальное решение b_+^1 , b_+^2 системы (21) мы можем записать следующим образом:

$$b_+^j = \delta(f(\bar{p})) \varphi_j(\bar{p}), \quad j = 1, 2,$$

$$f(\bar{p}) = (\alpha^+ \alpha^- - \beta^2) = (\varsigma_3 m - \varsigma_1 \lambda)^2 - \varsigma_2^2 (m^2 - \lambda^2).$$

Так как

$$f(\bar{p}) = (\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2)(\lambda - \lambda^+)(\lambda - \lambda^-), \quad \lambda^\pm = \frac{\varsigma_1 \varsigma_3 \pm \varsigma_2^2 \sqrt{1 + \varsigma_4^2}}{\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2} m,$$

и λ по определению положительно, то

$$\delta(f(\bar{p}))\varphi_i(\bar{p}) = \theta(\lambda)\delta(f(\bar{p}))\varphi_i(\bar{p}) = \theta(\lambda^+)\delta(\lambda - \lambda^+)\varphi_i^+(\bar{p}) + \theta(\lambda^-)\delta(\lambda - \lambda^-)\varphi_i^-(\bar{p}).$$

В силу уравнений (21) функции $\varphi_2^\pm(\bar{p})$ выражаются через $\varphi_1^\pm(\bar{p})$:

$$\varphi_2^\pm(\bar{p}) = \gamma^\pm(p_0)\varphi_1^\pm(\bar{p}),$$

где

$$\gamma^\pm(p_0) = -\frac{\alpha^-}{\beta} \Big|_{\lambda=\lambda^\pm} = -\frac{\beta}{\alpha^+} \Big|_{\lambda=\lambda^\pm} = -\frac{p_0(\sqrt{p_0^2 - m^2}(\varsigma_3 m - \varsigma_1 \lambda^\pm) + i\varsigma_2 p_0 \lambda^\pm)}{\varsigma_2 m \sqrt{p_0^2(p_0^2 - m^2 + \lambda^{\pm 2})}}.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \theta(\lambda^\pm)\delta(\lambda^{\pm 2} - \lambda^2) &= \theta(\lambda^\pm)\delta(2\lambda^\pm(\lambda^\pm - \lambda)) = \frac{\theta(\lambda^\pm)}{2\lambda^\pm}\delta(\lambda^\pm - \lambda), \\ \lambda^{\pm 2} - \lambda^2 &= p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - m^2 + \lambda^{\pm 2} = \bar{p}^2 - \xi^\pm m^2, \quad \xi^\pm = 1 - \lambda^{\pm 2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\xi^\pm = 1 - \left(\frac{\varsigma_1 \varsigma_3 \pm \varsigma_2^2 \sqrt{1 + \varsigma_4^2}}{\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2} \right)^2,$$

то коэффициент $\xi^\pm$ при соответствующем значении параметров ς_i может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Так, например, $\xi^+ = 0$ при $\varsigma_1 = \varsigma_3$, $\varsigma_2 = 1$, $\varsigma_4 = 0$, а $\xi^- = 0$ при $\varsigma_1 = -\varsigma_3$, $\varsigma_2 = 1$, $\varsigma_4 = 0$. Если $\varsigma_2 = 0$, $\varsigma_1 > \sqrt{1 + \varsigma_3^2}$, $\varsigma_4 = \pm\sqrt{\varsigma_1^2 - 1 - \varsigma_3^2}$, то $\xi^\pm > 0$, и $\xi^+ < 0$, если $\varsigma_1 = 1$, $\varsigma_2 = \varsigma_3 > 1$, $\varsigma_4 = 0$. Случай $\xi^- < 0$ не реализуется.

Закон дисперсии $\bar{p}^2 = \xi^\pm m^2$ описывает свободные частицы с эффективной массой $m\sqrt{\xi^\pm} < m$ в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени с двумя пространственными и одной временной координатами, если $\xi^\pm > 0$. Если $\xi^+ = 0$ или $\xi^- = 0$, то соответствующие частицы безмассовые. Движением таких частиц объясняются многие эффекты в графене. Если $\xi^+ < 0$, то возникают состояния, для которых $p_1^2 + p_2^2 > p_0^2 > 0$, и соответствующий им ток, параллельный плоскости дефекта, не может быть равен нулю. Такие состояния подобны сверхпроводящим.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построена модель взаимодействия фермионного поля с материальной плоскостью в рамках подхода Симанзика. Функционал действия модели включает обычное спинорное действие Дирака и дополнительный вклад дефекта, сосредоточенный в занятой им области пространства. Действие содержит три параметра, характеризующие свойства материала плоскости. В модели проведены расчеты характеристик процессов рассеяния дираковской частицы на плоскости дефекта, а также исследованы свойства локализованных вблизи нее состояний.

Модель и полученные на ее основе результаты можно использовать для теоретического описания процессов взаимодействия электронов, позитронов и нейтронов с двумерными материалами (графен, тонкие пленки, напыления, резкие границы твердого тела). Простые модификации модели позволяют учесть эффекты воздействия внешних электромагнитных полей.

Применение подхода Симанзика в КЭД дает возможность построить модель для широкого класса квантовых макроскопических явлений в двумерных материалах. Такая модель может оказаться полезной для исследования эффекта Холла, плазмон-поляритонных эффектов, нанофотоники, свойств топологических изоляторов, тонких пленок, напылений и резких границ [16].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, М., 1993; К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, Мир, М., 1984.
- [2] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, **51** (1948), 793–795.
- [3] U. Mohideen, A. Roy, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:21 (1998), 4549–4552, arXiv: physics/9805038; A. Roy, C.-Y. Lin, U. Mohideen, *Phys. Rev. D*, **60**:11 (1999), 111101, 5 pp., arXiv: quant-ph/9906062.
- [4] B. W. Harris, F. Chen, U. Mohideen, *Phys. Rev. A*, **62**:5 (2000), 052109, 5 pp., arXiv: quant-ph/0005088.
- [5] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, G. Ruoso, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:4 (2002), 041804, 4 pp., arXiv: quant-ph/0203002.
- [6] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, The International Series of Monographs on Physics, **145**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2009; G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Rev. Modern Phys.*, **81**:4 (2009), 1827–1885, arXiv: 0902.4022.
- [7] K. A. Milton, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:38 (2004), R209–R277.
- [8] K. Symanzik, *Nucl. Phys. B*, **190**:1 (1981), 1–44.
- [9] V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:21 (2006), 6525–6532, arXiv: hep-th/0606058; *Casimir effect for thin films from imperfect material*, arXiv: hep-th/0505218.
- [10] V. N. Marachevsky, Yu. M. Pis'mak, *Phys. Rev. D*, **81**:6 (2010), 065005, 6 pp., arXiv: 0907.1985.
- [11] Д. Ю. Письмак, Ю. М. Письмак, *ТМФ*, **175**:3 (2013), 442–454; **169**:1 (2011), 69–78; D. Yu. Pis'mak, Yu. M. Pis'mak, *ЭЧАЯ*, **44**:3 (2013), 879–898.
- [12] D. Yu. Pis'mak, Yu. M. Pis'mak, F. J. Wegner, *Phys. Rev. E*, **92**:1 (2015), 013204, 7 pp., arXiv: 1406.1598.
- [13] K. I. Kondo, T. Ebihara, T. Iizuka, E. Tanaka, *Nucl. Phys. B*, **434**:1 (1995), 85–108, arXiv: hep-ph/9404361; T. Appelquist, M. J. Bowick, D. Karabali, L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. D*, **33**:12 (1986), 3774–3776.
- [14] A. N. Grigorenko, M. Polini, K. S. Novoselov, *Nature Photonics*, **6**:11 (2012), 749–758, arXiv: 1301.4241; A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, A. K. Geim, *Rev. Modern Phys.*, **81**:1 (2009), 109–162; I. V. Fialkovsky, D. V. Vassilevich, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:44 (2009), 442001, 6 pp.; W.-K. Tse, A. H. MacDonald, *Phys. Rev. B*, **84**:20 (2011), 205327, 13 pp., arXiv: 1108.3858; L. Chen, S. Wan, *Phys. Rev. B*, **84** (2011), 075149, 6 pp.; J. González, *JHEP*, **07** (2013), 175, arXiv: 1211.3905;

- V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, A. H. Castro Neto, *Rev. Modern Phys.*, **84**:3 (2012), 1067–1125, arXiv: 1012.3484; I. V. Fialkovsky, V. N. Marachevsky, D. V. Vasilevich, *Phys. Rev. B*, **84**:3 (2011), 035446, 10 pp., arXiv: 1102.1757; G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, B. E. Sernelius, *Phys. Rev. B*, **89**:12 (2014), 125407, 9 pp., arXiv: 1401.6886; G. L. Klimchitskaya, V. M. Mostepanenko, *Phys. Rev. A*, **89**:5 (2014), 052512, 7 pp., arXiv: 1404.7057; J. E. Moore, *Nature*, **464**:728 (2010), 194–198.
- [15] I. V. Fialkovsky, V. N. Markov, Yu. M. Pis'mak, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:21 (2006), 6357–6363; *Internat. J. Modern Phys. A*, **21**:12 (2006), 2601–2616, arXiv: hep-th/0311236.
- [16] G. Bracco, B. Holst (eds.), *Surface Science Techniques*, Springer Series in Surface Science, **51**, Springer, Berlin, 2013; M. L. Brongersma, P. G. Kik (ed.), *Surface Plasmon Nanophotonics*, Springer Series in Optical Sciences, **131**, Springer, Berlin, 2007; S. A. Maier, *Plasmonics: Fundamental and Applications*, Springer, Berlin, 2007.