Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Карпов, Ю. М. Письмак, Алгебраический расчет резольвенты обобщенного квантового осциллятора в пространстве размерности D , *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 109–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8923>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:49:09

© 2015 г.

К. С. Карпов^{*†}, Ю. М. Письмак^{*}

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОБОБЩЕННОГО КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ D

Для изотропных моделей квантовой механики рассматривается формализм, основанный на применении алгебры $sl(2)$ вместо обычной алгебры Гейзенберга. В качестве ее образующих используются операторы квадрата импульса p^2 , координаты q^2 , а также оператор дилатации $H = i(pq + qp)$. Это дает возможность проводить расчеты, рассматривая размерность пространства D в качестве произвольного, не обязательно целочисленного параметра. Для обобщенного гармонического осциллятора с гамильтонианом вида $\mathcal{H}(a, b, c) = ap^2 + bq^2 + cH$ и произвольного D получены интегральные представления для резольвенты и ее следа. Изучены их аналитические свойства при различных значениях параметров модели.

Ключевые слова: обобщенный квантовый осциллятор, алгебра $sl(2)$, изотропные модели квантовой механики, резольвента, спектральное разложение.

DOI: 10.4213/tmf8923

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной квантовой теории поля теоретические результаты, как правило, требуют большого объема вычислений кратных интегралов, представленных в виде диаграмм Фейнмана. При этом из-за возрастания сложности рассматриваемых задач приходится учитывать все более высокие порядки теории возмущений по константе связи и по количеству петель. Количество диаграмм с ростом порядка растет. Точность используемых для их расчетов численных методов падает, и они оказываются неэффективными. Вследствие этого становятся все более актуальными разработки аналитических методов вычисления многопетлевых диаграмм. Они проводятся весьма активно. В них используются различные алгебраические структуры [1], [2] и геометрические подходы [3], а также методы, основанные на аналитическом продолжении вкладов диаграмм по размерности пространства. В последнее

^{*}Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: karpovk@inbox.ru, ypismak@yahoo.com

[†]Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург, Россия

время получен ряд важных результатов для диаграмм, используемых в расчетах ε -разложения критических индексов [4], [5] и при построении лестничных приближений [6].

Эффективные методы аналитических вычислений фейнмановских интегралов возникли в процессе построения $1/n$ -разложения для теории $\lambda(\phi^2)^2$ [7]. При этом использовались метод интегрирования по частям [8] и метод, основанный на соотношении “треугольник–звезда” (соотношение уникальности) [9]. В работе [10] было замечено, что это соотношение представляет собой вариант уравнения Янга–Бакстера.

В работе Исаева [11] был предложен новый алгебраический метод аналитического вычисления безмассовых и регуляризованных по размерности фейнмановских интегралов. Он основан на использовании структуры алгебры $sl(2)$, порождаемой операторами $\hat{p}^2$, $\hat{q}^2$ и $\hat{H}$, а также оператора инверсии. Преимущество метода заключается в том, что в его рамках расчеты диаграмм Фейнмана проводятся алгебраически без громоздких процедур интегрирования. Это значительно упрощает все вычисления. В качестве примера в работе [11] приведен расчет лестничных диаграмм в теории скалярного безмассового поля ϕ с взаимодействием ϕ^3 . В этой работе показано также, что расчет некоторых классов диаграмм Фейнмана сводится к вычислению матричных элементов квантово-механических операторов. Для расчета лестничных диаграмм в модели ϕ^3 оказывается достаточно найти оператор, обратный к гамильтониану в D -мерной конформной квантовой механике.

В настоящей работе мы используем алгебраический подход, предложенный в [11] для вычисления резольвенты D -мерного изотропного квантового осциллятора. Аналитический вид резольвенты в одномерном случае был получен в [12]. Трехмерный случай представлен в работе [13]. Наконец, обобщение этих результатов для произвольного конечномерного пространства получено в работе [14] на основе рекуррентных соотношений по числу пространственных измерений. В наших расчетах, основанных на коммутационных соотношениях алгебры $sl(2)$ для изотропных операторов квадратов импульса p^2 , координаты q^2 и дилатации H , размерность пространства D является параметром, который так же, как в методе размерной регуляризации квантовой теории поля, может быть выбран любым комплексным числом.

Для оператора Гамильтона обобщенного изотропного осциллятора, который является линейной комбинацией операторов p^2 , q^2 и H , полученный нами результат для резольвенты зависит от трех входящих в гамильтониан параметров и размерности пространства D . Рассматривая резольвенту как функцию этих параметров, мы проводим анализ ее аналитических свойств.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

2.1. Алгебра Гейзенберга. Алгебра Гейзенберга лежит в основе операторной формулировки квантовой механики. Ее порождающими элементами являются операторы импульса и координаты. В D -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^D$

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, D, \quad (1)$$

где $\hat{q}_i$ – оператор координаты, $\hat{p}_i$ – оператор импульса. Предполагается, что их собственные векторы состояний $|x\rangle$, $|k\rangle$:

$$\hat{q}_i|x\rangle = x_i|x\rangle, \quad \hat{p}_i|k\rangle = k_i|k\rangle,$$

удовлетворяют нормировочным условиям и условию полноты:

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle &= \delta^D(x-y), & \langle k|l\rangle &= \delta^D(k-l), & \langle x|k\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} e^{ik_j x_j}, \\ \int d^D x |x\rangle\langle x| &= \int d^D k |k\rangle\langle k| = 1, \\ |k\rangle &= \int |x\rangle\langle x|k\rangle d^D x = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int |x\rangle e^{ikx} d^D x.\end{aligned}$$

Динамика квантово-механической системы определяется оператором Гамильтона $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\hat{p}, \hat{q})$, и задачи описания ее поведения сводятся к вычислению оператора эволюции $U(t) = e^{-it\mathcal{H}}$. Его матричные элементы определяют амплитуды перехода. Для нас представляет интерес случай гамильтониана, инвариантного относительно поворотов в D -мерном пространстве.

2.2. Операторный формализм для изотропных моделей. Из коммутационных соотношений (1) следует, что инвариантный относительно вращений в D -мерном пространстве оператор $Q(\hat{p}, \hat{q})$ (в дальнейшем мы будем называть такие операторы изотропными) может быть записан в виде степенного ряда

$$Q(\hat{p}, \hat{q}) = \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} Q_{n_1, n_2, n_3} p^{2n_1} q^{2n_2} H^{2n_3}, \quad (2)$$

где мы использовали обозначения Исаева [11] для операторов $p^2 \equiv \hat{p}^2$, $q^2 \equiv \hat{q}^2$, $H \equiv i(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})/2$. Форму записи (2) операторов мы будем называть нормально упорядоченной.

2.3. Матричные элементы стандартных операторов. Операторы $e^{\alpha p^2}$, $e^{\beta q^2}$, $e^{\gamma H}$ мы будем называть стандартными. Приведем их матричные элементы, а также результаты действия на элементы базиса:

$$\langle x|e^{\beta q^2} = \langle x|e^{\beta x^2}, \quad \langle x|e^{tH} = \langle e^t x|e^{tD/2}, \quad (3)$$

$$\langle x|e^{\alpha p^2}|y\rangle = (-4\pi\alpha)^{-D/2} e^{(x-y)^2/4\alpha}. \quad (4)$$

2.4. Алгебра $sl(2)$ и коммутационные соотношения изотропных операторов. Записывая операторы p^2 , q^2 , H как квадратичные комбинации компонент операторов импульса и координаты $\hat{p}$, $\hat{q}$, нетрудно убедиться, используя коммутационные соотношения (1), что операторы H , q^2 , p^2 образуют алгебраическую структуру $sl(2)$ [11]:

$$[q^2, p^2] = 4H, \quad [H, q^2] = 2q^2, \quad [H, p^2] = -2p^2. \quad (5)$$

Используя (5), можно вычислить коммутационные соотношения стандартных операторов с H , q^2 , p^2 . Введем обозначение

$$A(\alpha, X, Y) = e^{\alpha X} Y e^{-\alpha X},$$

где α – числовой параметр, X , Y – два некоммутирующих оператора. Оператор $A(\alpha, X, Y)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} A(\alpha, X, Y) = e^{\alpha X} [X, Y] e^{-\alpha X}, \quad A(0, X, Y) = Y. \quad (6)$$

Таким образом, в силу (5) операторы $A(\alpha, X, Y)$ для $X, Y = H, p^2, q^2$ являются решениями линейных дифференциальных уравнений (6), что можно использовать для вывода соотношений

$$\begin{aligned} e^{\alpha H} p^2 e^{-\alpha H} &= p^2 e^{-2\alpha}, & e^{\alpha H} q^2 e^{-\alpha H} &= q^2 e^{2\alpha}, \\ e^{\alpha p^2} q^2 e^{-\alpha p^2} &= q^2 - 4\alpha(H + \alpha p^2), & e^{\alpha p^2} H e^{-\alpha p^2} &= H + 2\alpha p^2, \\ e^{\alpha q^2} p^2 e^{-\alpha q^2} &= p^2 + 4\alpha(H - \alpha q^2), & e^{\alpha q^2} H e^{-\alpha q^2} &= H - 2\alpha q^2. \end{aligned} \quad (7)$$

В работе Исаева [11] дается определение нецелой степени оператора на основе интегрального представления

$$x^{-\omega} = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\omega-1} d\alpha.$$

Оно дает возможность, воспользовавшись (7), получить коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [q^2, p^{2(\alpha+1)}] &= 4(\alpha+1)(H + \alpha)p^{2\alpha}, \\ [q^{2(\alpha+1)}, p^2] &= 4(\alpha+1)(H - \alpha)q^{2\alpha}, \\ [Hq^{2\alpha}, q^{2\alpha}] &= 2q^{2\alpha}\alpha, & [H, p^{2\alpha}] &= -2p^{2\alpha}\alpha, \end{aligned} \quad (8)$$

которые использовались в [11] и выполняются для любых значений показателя степени α .

Рассмотрим теперь задачу вычисления матричных элементов резольвенты для оператора Гамильтона обобщенного гармонического осциллятора.

3. ИЗОТРОПНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Изотропный оператор $\mathcal{H}(a, b, c) = ap^2 + bq^2 + cH$ при $a > 0$, $b > 0$, $c = 0$ является оператором Гамильтона гармонического осциллятора в D -мерном пространстве. Мы будем называть $\mathcal{H}(a, b, c)$ при произвольных параметрах a, b, c гамильтонианом обобщенного изотропного осциллятора. Применяя приведенные выше результаты, вычислим резольвенту

$$R(\lambda) = (\mathcal{H} - \lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t(\mathcal{H} - \lambda)} dt. \quad (9)$$

Приведем оператор в подынтегральном выражении (9) к нормально упорядоченному виду. Мы получим нужную нам форму записи, если найдем α, β, γ , для которых выполняется равенство

$$e^{t(ap^2 + bp^2 + cH)} = e^{\alpha(a, b, c; t)p^2} e^{\beta(a, b, c; t)q^2} e^{\gamma(a, b, c; t)H}. \quad (10)$$

Тогда оператор резольвенты запишется в виде

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{\alpha(a, b, c; -t)p^2} e^{\beta(a, b, c; -t)q^2} e^{\gamma(a, b, c; -t)H} e^{t\lambda} dt,$$

и, воспользовавшись (3), (4), мы получаем для матричных элементов резольвенты $R(\lambda)$ и ее следа $\text{Tr } R(\lambda)$ следующие выражения:

$$R_\lambda(x, y) = \langle x | R(\lambda) | y \rangle = \int_0^\infty \frac{1}{(-4\pi\alpha e^\gamma)^{D/2}} \exp \left[\frac{(x - e^{-\gamma}y)^2}{4\alpha} + \beta e^{-2\gamma}y^2 + t\lambda \right] dt, \quad (11)$$

$$\text{Tr } R(\lambda) = \int R_\lambda(x, x) d^D x = \int_0^\infty (e^\gamma + (1 + 4\alpha\beta)e^{-\gamma} - 2)^{-D/2} e^{\lambda t} dt. \quad (12)$$

Продифференцировав (10) по параметру t , получим

$$\begin{aligned} (ap^2 + bq^2 + cH)e^{t(ap^2 + bq^2 + cH)} = \\ = \frac{d\alpha}{dt} p^2 e^{\alpha p^2} e^{\beta q^2} e^{\gamma H} + \frac{d\beta}{dt} e^{\alpha p^2} q^2 e^{\beta q^2} e^{\gamma H} + \frac{d\gamma}{dt} e^{\alpha p^2} e^{\beta q^2} H e^{\gamma H}. \end{aligned}$$

С помощью соотношений (8) в этом равенстве множители q^2 и H перед экспонентами можно переставить в крайнее левое положение и приравнять коэффициенты при одинаковых операторах. В результате для α , β , γ получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} - 4 \frac{d\beta}{dt} \alpha^2 + \frac{d\gamma}{dt} (2\alpha + 8\alpha^2 \beta), \\ b &= \frac{\partial \beta}{\partial t} - 2\beta \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \\ c &= -4\alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} + (1 + 8\alpha\beta) \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13)$$

Функции α , β , γ удовлетворяют начальным условиям $\alpha = \beta = \gamma = 0$ при $t = 0$. Уравнения (13) имеют решения вида

$$\begin{aligned} \alpha &= a \frac{\text{sh}(ft)}{c \text{sh}(ft) + f \text{ch}(ft)}, \quad \beta = \frac{b}{f^2} \text{sh}(ft)(c \text{sh}(ft) + f \text{ch}(ft)), \\ \gamma &= \ln \frac{c \text{sh}(ft) + f \text{ch}(ft)}{f}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $f = \sqrt{4ab + c^2}$.

3.1. Явный вид резольвенты и ее след. Подставляя α , β , γ из (14) в выражение для резольвенты (11), получим

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \int_0^\infty e^{t\lambda} \langle x | e^{\alpha p^2} e^{\beta q^2} e^{\gamma H} | y \rangle dt = \\ &= \int_0^\infty \left(4\pi \frac{a \text{sh}(ft)}{f} \right)^{-D/2} e^{F(x, y, a, c, f) + t\lambda} dt, \\ F(x, y, a, c, f) &= \frac{c \text{sh}(ft)(x^2 - y^2) - f \text{ch}(ft)(x^2 + y^2) + 2fxy}{4a \text{sh}(ft)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что интеграл (15) может сходиться только при $\text{Re } \lambda < 0$, и в дальнейшем мы всегда предполагаем, что это условие выполнено. Для тех значений параметров a , c , f , D , для которых интеграл расходится, выражение (15) для резольвенты понимается как аналитическое продолжение из той области их значений, в которой он существует. В силу (12), (14) имеем

$$\text{Tr } R(\lambda) = \int_0^\infty \left(2 \text{sh} \left(\frac{ft}{2} \right) \right)^{-D} e^{t\lambda} dt. \quad (16)$$

При $D = 1$ мы получаем

$$\text{Tr } R(\lambda) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{(\lambda - (2n+1)f/2)t} dt.$$

Отсюда легко находится спектр гамильтониана:

$$\lambda_n = f \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

что совпадает со спектром, который получается стандартными методами с использованием операторов рождения и уничтожения.

3.2. Спектр и его вырождение. Рассмотрим след резольвенты для пространства размерности D . Воспользовавшись (16), можно показать, что при $f \neq 0$

$$\text{Tr } R(\lambda) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty C_n(D) e^{-(n+D/2)ft} e^{t\lambda} dt,$$

и для спектра λ_n резольвенты и числа соответствующих вырожденных состояний $C_n(D)$ получаются следующие выражения:

$$\lambda_n = \frac{2n+D}{2}f, \quad C_n(D) = \frac{\Gamma(D+n)}{\Gamma(D)\Gamma(n+1)}. \quad (17)$$

Таким образом, при $f \neq 0$ спектр дискретный, и $C_n(D)$ является целым числом только при целом D .

3.3. Спектральное разложение резольвенты. Спектральное разложение для резольвенты записывается в виде

$$R_\lambda(x, y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{P_n(x, y)}{\lambda_n - \lambda},$$

где $P_n(x, y)$ – проектор на соответствующее λ_n собственное подпространство $R_\lambda(x, y)$, и при условии $f \neq 0$

$$P_n(x, y) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dA^n} \left(\frac{f}{2\pi a(1-A^2)} \right)^{D/2} e^{Q(x, y, A)} \Big|_{A=0},$$

$$Q(x, y, A) = \frac{c(1-A^2)(x^2-y^2) - f(1+A^2)(x^2+y^2) + 4Afx y}{4a(1-A^2)}.$$

Воспользовавшись формулой для гауссова интеграла в D -мерном пространстве

$$\int e^{-xKx/2+xy} d^D x = \left(\det \frac{K}{2\pi} \right)^{-1/2} e^{yK^{-1}y/2},$$

нетрудно убедиться, что для проекторов при любом D выполняется условие ортогональности:

$$\int P_m(x, y) P_n(y, z) d^D y = \frac{1}{m!n!} \frac{d^{m+n} e^{Q(AB, x, z)}}{dA^m dB^n} \Big|_{A=B=0} = P_n(x, z) \delta_{nm}.$$

Можно также доказать, что

$$\int_{-\infty}^\infty \sum_{n=0}^\infty P_n(x, y) e^{-Kx^2/2+Jx} d^D x = e^{-Ky^2/2+Jy},$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y) = \delta(x - y).$$

При целочисленных D проектор $P_n(x, y)$ представляется в виде

$$P_n(x, y) = \sum_{k=1}^{C_n(D)} \psi_k^{(n)}(x) \bar{\psi}_k^{(n)}(y), \quad (18)$$

где $\psi_k^{(n)}(x)$, $1 \leq k \leq C_n(D)$, – собственные функции резольвенты

$$R(x, y) \psi_k^{(n)}(x) = \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \psi_k^{(n)}(x), \quad \int \psi_k^{(n)}(x) \bar{\psi}_l^{(n)}(x) dx = \delta_{nm} \delta_{kl},$$

$C_n(D)$ – степень вырождения спектра (17).

3.4. Резольвента при различных значениях параметра c . Предполагая $a > 0$, $b > 0$, рассмотрим свойства резольвенты в двух случаях: при вещественном и мнимом параметре c .

3.4.1. *Осциллятор без оператора дилатации ($c = 0$).* Если $c = 0$, оператор дилатации H не содержится в $\mathcal{H}(a, b, 0)$, и $\mathcal{H}(1/(2m), m\omega^2/2, 0)$ является оператором Гамильтона обычного гармонического осциллятора. Для него из (15), (16) получаются следующие выражения для резольвенты и ее следа:

$$R(x, y) = \int_0^\infty \left(\frac{2\pi \operatorname{sh}(2\omega t)}{m\omega} \right)^{-D/2} \exp \left[\frac{m\omega(2xy - \operatorname{ch}(\omega t)(x^2 + y^2))}{2 \operatorname{sh}(\omega t)} + \lambda t \right] dt,$$

$$\operatorname{Tr} R(\lambda) = \int_0^\infty \left(2 \operatorname{sh} \left(\frac{\omega t}{2} \right) \right)^{-D} e^{t\lambda} dt.$$

В рассматриваемом случае спектр

$$\lambda_n = \omega \left(n + \frac{D}{2} \right)$$

совпадает с известным спектром гармонического осциллятора при целых D .

3.4.2. *Случай вещественного параметра c .* Оператор дилатации H антиэрмитов, поэтому при вещественном параметре c гамильтониан $\mathcal{H}(a, b, c)$ и его резольвента неэрмитовы. Все приведенные выше формулы для резольвенты и ее следа выполняются. Нетрудно также убедиться, что

$$R_\lambda(x, y) = R_\lambda^*(x, y) = R_\lambda(y, x)|_{c \rightarrow -c}.$$

При целом D собственные функции резольвенты в проекторе $P_n(x, y)$ (18) вещественны и $\bar{\psi}_k^{(n)}(x) = \psi_k^{(n)}(x)|_{c \rightarrow -c}$.

3.4.3. *Случай мнимого параметра c .* При мнимом параметре c оператор $\mathcal{H}(a, b, c)$ становится эрмитовым. Параметр f может быть положительным, равным нулю или мнимым. Если $f > 0$, то, как и в случае вещественного c , резольвента и ее спектр имеют вид (15), (17). Для резольвенты и ее собственных функций в (18) выполняются соотношения

$$R_\lambda(x, y) = R_\lambda^*(y, x), \quad \bar{\psi}_k^{(n)}(x) = \psi_k^{(n)*}(x).$$

При $f = 0$ из (15) получаем интегральное представление для резольвенты

$$R_\lambda(x, y) = \int_0^\infty (4\pi at)^{-D/2} \exp\left[\frac{ct(x^2 - y^2) - (x - y)^2}{4at} + t\lambda\right] dt. \quad (19)$$

Полученный результат можно выразить через цилиндрическую функцию мнимого аргумента [15]:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{e^{-t-z^2/4t}}{t^{-\nu-1}} dt,$$

$$R_\lambda(x, y) = 2(4\pi a)^{-D/2} e^{c(x^2-y^2)/4a} \left(-\frac{(x-y)^2}{4a\lambda}\right)^{(D-2)/4} \times$$

$$\times K_{(D/2-1)}\left(\sqrt{-(x-y)^2 \frac{\lambda}{a}}\right).$$

Выражение (19) отличается лишь множителем $e^{c(x^2-y^2)/4a}$ от резольвенты свободной частицы массы $m = 1/2a$, поэтому спектр резольвенты при $f = 0$ непрерывный. Если f стремится к нулю, оставаясь положительным, то расстояние между точками спектра (17) также стремится к нулю и в пределе он заполняет всю полуось $\lambda \geq 0$.

При $f = 0$ след резольвенты вычисляется явно:

$$\text{Tr } R_\lambda = \int_0^\infty (4\pi at)^{-D/2} e^{t\lambda} dt = \left(-\frac{\lambda}{4\pi a}\right)^{D/2-1} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right).$$

В случае мнимого $f = ig$ мы можем получить интегральные представления для резольвенты и ее следа из (15), (16), выбрав в этих выражениях $f = \epsilon + ig$, где g вещественно, $\epsilon > 0$, и после вычисления интегралов, положив $\epsilon = 0$:

$$R_\lambda(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \left(4\pi a \frac{\sin(g_\epsilon t)}{g_\epsilon}\right)^{-D/2} e^{G(x, y, a, c, g_\epsilon) + t\lambda} dt,$$

$$G(x, y, a, c, g) = \frac{c \sin(gt)(x^2 - y^2) - g \cos(gt)(x^2 + y^2) + 2gxy}{4a \sin(gt)},$$

$$\text{Tr } R(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty \left(2 \sin \frac{g_\epsilon t}{2}\right)^{-D} e^{t\lambda} dt, \quad g_\epsilon = g - i\epsilon.$$

В рассматриваемом случае спектр резольвенты $\lambda_n = ig(n + D/2)$ дискретный, чисто мнимый. При $g > 0$ он находится на положительной части мнимой оси, а при $g < 0$ — на отрицательной.

Для резольвенты выполняются соотношения

$$R_\lambda(x, y) = R_\lambda(y, x)|_{c \rightarrow -c}, \quad R_\lambda^*(x, y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{P_n^*(x, y)}{\lambda_n^* - \lambda}.$$

Таким образом, спектр $\lambda_n^* = -ig(n + D/2)$ оператора $R_\lambda^*(x, y)$ не совпадает со спектром $R_\lambda(x, y)$, и при целочисленном D в выражении (18) для проектора $P_n(x, y)$ мы имеем $\bar{\psi}_k^{(n)}(x) = \psi_k^{(n)}(x)|_{c \rightarrow -c}$.

В случае мнимого параметра c гамильтониан $\mathcal{H}(a, b, c)$ является самосопряженным в пространстве L_2 , но его собственные функции пространству L_2 не принадлежат. Этим объясняются свойства оператора резольвенты и ее спектра при мнимом f .

Заметим также, что полученные нами выражения для резольвенты и ее спектра при мнимом f применимы при $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$ для описания взаимодействия частицы с отталкивающим центром.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели расчеты резольвенты обобщенного изотропного осциллятора, используя коммутационные соотношения алгебры $sl(2)$ операторов p^2 , q^2 , H . Для резольвенты и ее следа получены интегральные представления, аналитические свойства которых исследованы при различных значениях параметров модели. Методы вычисления не зависят явно от выбора размерности пространства D , поэтому D можно считать произвольным параметром, для которого допустимы не только целочисленные значения. Мы надеемся, что использованные в нашей работе методы окажутся эффективными и для более сложных изотропных моделей.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.660.2013).

Список литературы

- [1] D. Kreimer, *Phys. Rep.*, **363**:4–6 (2002), 387–424, arXiv: hep-th/0010059; D. Kreimer, *Knots and Feynman Diagrams*, Cambridge Lecture Notes in Physics, **13**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [2] S. Moch, P. Uwer, S. Weinzierl, *J. Math. Phys.*, **43**:6 (2002), 3363–3386, arXiv: hep-ph/0110083.
- [3] A. I. Davydychev, R. Delbourgo, *J. Math. Phys.*, **39**:9 (1998), 4299–4334, arXiv: hep-th/9709216.
- [4] D. J. Broadhurst, *Eur. Phys. J. C*, **8**:2 (1999), 311–333.
- [5] A. I. Davydychev, M. Yu. Kalmykov, *Nucl. Phys. B*, **605**:1–3 (2001), 266–318.
- [6] V. A. Smirnov, *Nucl. Phys. B: Proc. Suppl.*, **116** (2003), 417–421, arXiv: hep-ph/0209295; *Phys. Lett. B*, **547**:3–4 (2002), 239–244, arXiv: hep-ph/0209193; **500**:3–4 (2001), 330–337, arXiv: hep-ph/0011056; **460**:3–4 (1999), 397–404.
- [7] А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [8] F. V. Tkachov, *Phys. Lett. B*, **100**:1 (1981), 65–68; K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachov, *Nucl. Phys. B*, **192**:1 (1981), 159–204.
- [9] А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак, Ю. Р. Хонконен, *ТМФ*, **47**:3 (1981), 291–306.
- [10] A. Zamolodchikov, *Phys. Lett. B*, **97**:1 (1980), 63–66.
- [11] A. P. Isaev, *Nucl. Phys. B*, **662**:3 (2003), 461–475, arXiv: hep-th/0303056.
- [12] Э. Ч. Титчмарш, *Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, 1 часть, ИЛ, М., 1960.
- [13] В. Л. Бахрах, С. И. Ветчинкин, *ТМФ*, **6**:3 (1971), 392–402.
- [14] В. Л. Бахрах, С. И. Ветчинкин, С. В. Христенко, *ТМФ*, **12**:2 (1972), 223–226.
- [15] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.