Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, А.А. Назаров, П. И. Какинъ, Сплиты
корневых систем для специальных подалгебр Ли, *ТМФ*,
2015, том 185, номер 1, 127–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8924>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:14:04

© 2015 г. В. Д. Ляховский*, А. А. Назаров*, П. И. Какинъ*

СПЛИНТЫ КОРНЕВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБР ЛИ

Рассматривается специальное вложение подалгебры Ли в простые алгебры Ли. Проведена классификация проекций корневых систем алгебр и получены условия возникновения сплинта и совпадения коэффициентов ветвления с кратностями весов. Хотя такое совпадение происходит не слишком часто, оно оказывается связано с базисом Гельфанда–Цетлина.

Ключевые слова: алгебра Ли, специальная подалгебра, ветвление, кратность весов, сплинт.

DOI: 10.4213/tmf8924

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие сплинта (расщепления) было предложено Рихтером [1]. Сплинт – это разложение корневой системы в объединение образов двух или более вложений других корневых систем. Вложением ϕ корневой системы Δ_1 в корневую систему Δ называется биективное отображение корней Δ_1 в (собственное) подмножество Δ , коммутирующее с законом сложения векторов в Δ_1 и Δ :

$$\begin{aligned}\phi: \Delta_1 &\longrightarrow \Delta, \\ \phi \circ (\alpha + \beta) &= \phi \circ \alpha + \phi \circ \beta, \quad \alpha, \beta \in \Delta_1.\end{aligned}$$

Заметим, что мы не требуем от образа $\text{Im } \phi$ сохранения каких-либо свойств корневой системы, за исключением аддитивных: правила сложения в $\text{Im } \phi$ совпадают с правилами сложения в Δ_1 . Если вложение ϕ сохраняет углы между корнями, то оно называется *метрическим*. Два вложения ϕ_1 и ϕ_2 расщепляют корневую систему Δ , если последняя может быть представлена в виде дизъюнктного объединения образов $\text{Im } \phi_1$ и $\text{Im } \phi_2$.

Чем же интересны отображения корневых систем, не сохраняющие углов между корнями? Аддитивные свойства корневой системы определяют структуру модуля Верма:

$$M^\mu = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} D^\mu(\mathfrak{b}_+) = \left\{ (E^{-\alpha_1})^{n_1} \dots (E^{-\alpha_s})^{n_s} | v_\mu \right\}_{\alpha_i \in \Delta^+}^{n_i=0,1,\dots}.$$

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lyakh1507@nm.ru, antonnaz@gmail.com, megachi@yandex.ru

Здесь $\mathfrak{b}_+$ – подалгебра Бореля алгебры $\mathfrak{g}$, D^μ – одномерное представление подалгебры Бореля, $|v_\mu\rangle$ – вектор старшего веса, а $E^{-\alpha_j}$ – понижающие операторы, соответствующие положительным корням $\alpha_j \in \Delta^+$. Формула Вейля для характеров выражает характер неприводимого представления в виде комбинации характеров модулей Верма:

$$\text{ch } L^\mu = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho-\rho}} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \text{ch } M^{w(\mu+\rho)-\rho}.$$

Здесь суммирование ведется по элементам группы Вейля, действие которых $w \triangleright \mu = w(\mu + \rho) - \rho$ зависит от углов между корнями. Но формулу Вейля для характеров можно переписать, представив элементы группы Вейля в виде произведений отражений s_α , $\alpha \in S$, в гиперплоскостях, ортогональных простым корням: $w = s_{\alpha_1} \cdot s_{\alpha_2} \dots$. Отражения действуют на корневую систему перестановками, так что композицию такого действия с вложением ϕ нетрудно вычислить. Орбиту группы Вейля $\{w \triangleright \mu, w \in W\}$, можно построить последовательными вычитаниями корней из старшего веса μ . Для этого обозначим индексы Дынкина веса μ через $(\mu_1, \dots, \mu_r)$. Тогда $\mu - \mu_1 \alpha_1, \mu - \mu_2 \alpha_2, \dots, \mu - \mu_r \alpha_r$, $\alpha_i \in S$, – это веса орбиты, которые получаются из старшего веса μ элементарными отражениями s_{α_i} , $\alpha_i \in S$. Следующий набор точек орбиты, получаемых последовательным применением двух отражений $s_{\alpha_i} \cdot s_{\alpha_j} \triangleright \mu$, можно построить путем вычитания $\mu - \mu_i \alpha_i - \mu_j (s_{\alpha_i} \alpha_j)$. Продолжая данную процедуру, мы построим образ сингулярного элемента

$$\Psi = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}$$

под действием вложения ϕ [2]. Кратности в характере модуля Верма не меняются при вложении, так как они определяются аддитивными свойствами корней. Соответственно, при вложении сохраняются и кратности в неприводимых модулях.

Корневая система регулярной подалгебры содержится в корневой системе алгебры, так что сплитт возникает при вычислении коэффициентов ветвления.

В работе [2] было показано, что существование сплитта ведет к совпадению коэффициентов ветвления с кратностями весов при выполнении некоторых дополнительных условий. Обозначим алгебру Ли через $\mathfrak{g}$ и рассмотрим ее подалгебру $\mathfrak{a}$. Если подалгебра $\mathfrak{a}$ регулярна, то ее корневая система $\Delta_{\mathfrak{a}}$ содержится в $\Delta_{\mathfrak{g}}$. Коэффициенты ветвления $b_\nu^{(\mu)}$ появляются при разложении неприводимого представления $L_{\mathfrak{g}}^\mu$ алгебры $\mathfrak{g}$ в сумму неприводимых представлений подалгебры $\mathfrak{a}$:

$$L_{\mathfrak{g}}^\mu = \bigoplus_{\nu} b_\nu^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^\nu. \quad (1)$$

Предположим, что корневая система $\Delta_{\mathfrak{g}}$ расщепляется как $\Delta_{\mathfrak{g}} = \Delta_{\mathfrak{a}} \cup \phi(\Delta_{\mathfrak{s}})$, где ϕ – вложение корневой системы $\Delta_{\mathfrak{s}}$ некоторой полупростой алгебры Ли $\mathfrak{s}$. Тогда коэффициенты ветвления $b_\nu^{(\mu)}$ при редукции $L_{\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}}^{(\mu)}$ совпадают с кратностями весов $m_\nu^{(\tilde{\mu})}$ в представлениях $\mathfrak{s}$ при выполнении определенного технического условия [2]. Старший вес $\tilde{\mu}$ представления $\mathfrak{s}$ вычисляется по индексам Дынкина старшего веса μ модуля алгебры $\mathfrak{g}$. Доказательство равенства коэффициентов ветвления с кратностями весов представлений $\mathfrak{s}$ основывается на разложении сингулярного элемента

алгебры $\mathfrak{g}$ в комбинацию сингулярных элементов $\mathfrak{s}$:

$$\Phi_{\mathfrak{g}}^{\mu} = \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) w(e^{\mu + \rho_{\mathfrak{s}}} \phi(e^{-\tilde{\mu}} \Psi_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}})), \quad (2)$$

где $\epsilon(w)$ – определитель элемента w группы Вейля $W_{\mathfrak{a}}$ подалгебры $\mathfrak{a}$. Действие группы Вейля на весах продолжается на алгебры формальных экспонент по правилу $w(e^{\nu}) = e^{w\nu}$, $w \in W$. Отсюда кратность $M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}$ веса $\tilde{\nu}$ из весовой диаграммы представления алгебры $\mathfrak{s}$ со старшим весом $\tilde{\mu}$ определяет коэффициент ветвления $b_{\nu}^{(\mu)}$ для старшего веса $\nu = (\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))$:

$$b_{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))}^{(\mu)} = M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}}. \quad (3)$$

В настоящей работе мы воспользуемся похожим подходом для изучения специальных вложений. Мы рассматриваем специальные вложения подалгебр Ли в алгебру Ли. В таком случае корневая система подалгебры не содержится в корневой системе алгебры, и первоначальная мотивация для введения сплинта не применима. Но мы можем рассмотреть проекцию корневой системы алгебры на корневое пространство подалгебры. Результат такой проекции уже не будет корневой системой, однако он будет удовлетворять более мягким условиям (см. раздел 2). Оказывается, что сплинты проекций корневых систем можно классифицировать, используя разложение присоединенного представления алгебры в прямую сумму представлений подалгебры. Мы показываем, что при наличии такого сплинта коэффициенты ветвления совпадают с кратностями весов в представлениях другой алгебры Ли (см. раздел 3). А значит, в этом случае коэффициенты ветвления очень легко вычислить.

Мы используем теорию представлений подалгебры для классификации всех сплинтов для проекции корневой системы алгебры. Однако метод универсален, и мы применяем его и к метрическим сплинтам, и к регулярным подалгебрам. В результате получаем правила Гельфанда–Цетлина для регулярных и специальных вложений.

В заключение (см. раздел 4) мы обсуждаем случаи, которые не укладываются в упомянутую выше классификацию.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ И ПРОЕКЦИИ КОРНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Специальные вложения подалгебр детально рассматривались в фундаментальных работах Дынкина [3], [4], где для них использовался термин *S-подалгебры*, чтобы отличить их от регулярных или *R-подалгебр*, полученных путем исключения некоторых корней из корневой системы алгебры. Все регулярные подалгебры нетрудно построить путем исключения вершин из расширенной диаграммы Дынкина для алгебры, но для специальных подалгебр такого простого метода нет. Полная классификация специальных подалгебр для исключительных алгебр Ли была построена недавно в работе [5]. Алгоритм построения специальных подалгебр реализован в виде пакета для системы GAP, но построение все равно требует участия человека [6].

Будем предполагать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ простая. Обозначим подалгебру через $\mathfrak{a}$. Соответствующие подалгебры Картана обозначим через $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ и отождествим их с дуальными пространствами $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$, используя формы Киллинга алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$.

Для построения вложения $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$ надо отождествить некоторое представление $L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$ с подпространством в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Затем необходимо проверить, что генераторы $\mathfrak{a}$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций генераторов $\mathfrak{g}$. После отождествления подалгебры Картана $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$ с дуальным пространством $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$ при помощи формы Киллинга корневую систему $\Delta_{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ можно спроецировать на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$, используя выражение генераторов подалгебры $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ через генераторы $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$.

Свойства этой проекции описаны в классических работах [3], [4] в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 1 [4]. *Если представление $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ алгебры $\mathfrak{g}$ индуцирует представление $L_{\mathfrak{a}}^{\bar{\mu}}$ подалгебры $\mathfrak{a}$, то весовая диаграмма $L_{\mathfrak{a}}^{\bar{\mu}}$ получается из диаграммы $L_{\mathfrak{g}}^{\mu}$ ортогональной проекцией $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^*$ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$.*

Применяя эту теорему к присоединенному представлению $\mathfrak{g}$, видим, что проекция корневой системы $\Delta_{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$ оказывается весовой системой некоторого конечномерного, но не обязательно неприводимого представления $\mathfrak{a}$. Более того, это приводимое представление должно содержать присоединенное представление $\mathfrak{a}$. Если обозначить проекцию корневой системы через

$$\Delta' = \pi_{\mathfrak{a}}(\Delta_{\mathfrak{g}}), \quad (4)$$

то все корни $\mathfrak{a}$ будут содержаться в Δ' . То есть система Δ' может быть корневой системой, но она не обязательно является приведенной и может содержать некоторые векторы с кратностью больше единицы.

Следующие теоремы также описывают свойства Δ' .

ТЕОРЕМА 2 [3]. *Каждая специальная подалгебра $\mathfrak{a}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ целочисленная, т. е. проекции корней $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^*$ являются линейными комбинациями простых корней $\mathfrak{a}$ с целочисленными коэффициентами.*

ТЕОРЕМА 3 [3]. *Если $\mathfrak{a}$ – полупростая подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и генератор e_{α} , соответствующий корню α алгебры $\mathfrak{a}$, представляется в виде линейной комбинации $e_{\alpha} = \sum_{\beta} e_{\beta}$ генераторов $\mathfrak{g}$, соответствующих корням β алгебры $\mathfrak{g}$, тогда все эти корни β проецируются в α , $\pi_{\mathfrak{a}}(\beta) = \alpha$.*

Из этих теорем мы видим, что корневая система $\Delta_{\mathfrak{a}}$ вложена метрически (в смысле определения спланта) в проекцию Δ' . Более того, кратности некоторых корней $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}}$ в этой проекции Δ' больше единицы.

Например, проекция корневой системы $D_4(so(8))$ на корневую систему специальной подалгебры $A_2(su(3))$ совпадает с корневой системой G_2 , но кратность коротких корней равна 3.

3. СПЛИНТЫ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

Перечислим все случаи совпадения коэффициентов ветвления с кратностями весов в представлении некоторой другой алгебры. Такое совпадение возможно, если проекция Δ' корневой системы алгебры $\mathfrak{g}$ допускает сплонт $\Delta' = \varphi_{\mathfrak{a}}(\Delta_{\mathfrak{a}}) \cup \varphi_{\mathfrak{s}}(\Delta_{\mathfrak{s}})$, где $\varphi_{\mathfrak{a}}$ и $\varphi_{\mathfrak{s}}$ – вложения соответствующих корневых систем. Вложение $\varphi_{\mathfrak{a}}$ метрическое и тривиальное. Кроме того, проекция сингулярного элемента $\pi_{\mathfrak{a}}(\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu})$ должна

разлагаться в линейную комбинацию сингулярных элементов неприводимых представлений $\mathfrak{s}$:

$$\pi_{\mathfrak{a}}(\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu}) = \sum_{\nu} \kappa_{\nu} e^{\nu} \Psi_{\mathfrak{s}}^{\tilde{\mu}} \quad (5)$$

с целыми коэффициентами κ_{ν} , где множество весов ν , по которому ведется суммирование, будет определено ниже. Это разложение сингулярного элемента очень похоже на ветвления орбит группы Вейля, рассмотренные в работах [7], [8]. Сначала мы перечислим все расщепления проекций корневой системы в объединение простых корневых систем при специальных вложениях, а затем обсудим разложение сингулярного элемента.

Проекция Δ' корневой системы $\mathfrak{g}$ совпадает с проекцией весовой диаграммы присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$, за исключением нулевого веса. Присоединенное представление $\mathfrak{g}$ содержит присоединенное представление $\mathfrak{a}$ и разлагается в прямую сумму

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} \oplus M_{\mathfrak{a}}^{\chi}, \quad (6)$$

где $M_{\mathfrak{a}}^{\chi}$ – не обязательно неприводимое представление $\mathfrak{a}$, названное “характеристическим” в работе [3].

Весовая диаграмма $M_{\mathfrak{a}}^{\chi}$ совпадает с корневой системой $\Delta_{\mathfrak{s}}$, за исключением нулевого веса. То есть нам достаточно найти все представления для всех простых алгебр Ли $\mathfrak{a}$ такие, что их весовая диаграмма совпадает с некоторой корневой системой после исключения нулевого веса. Во-первых, заметим, что все веса $M_{\mathfrak{a}}^{\chi}$ должны быть не меньшей длины, чем кратчайший корень $\mathfrak{a}$, так как $\mathfrak{a}$ – целочисленная подалгебра $\mathfrak{g}$ [2]. Во-вторых, $M_{\mathfrak{a}}^{\chi}$ должна содержать веса не более чем двух разных длин.

Если в корневой системе $\Delta_{\mathfrak{g}}$ есть корни α такие, что $\alpha \perp \beta$ для всех $\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}$ (ортогональные корневой системе подалгебры), то сингулярный элемент не допускает разложения (5). В этом случае элементы формальной алгебры e^{ν} проекции $\pi_{\mathfrak{a}}(\Psi_{\mathfrak{g}}^{\mu})$ надо снабдить размерностями представлений алгебры $\mathfrak{a}_{\perp}$, порожденной генераторами, соответствующими ортогональным корням [9]. Тогда правая часть разложения (5) будет содержать нетривиальные кратности и совпадение коэффициентов ветвления с кратностями весов в представлениях $\mathfrak{s}$ не будет иметь места. В этом случае можно вывести более сложное соотношение между кратностями весов и коэффициентами ветвления, но этот вывод лежит за рамками данной работы.

Кратность нулевого веса в присоединенном представлении равна рангу алгебры. Так что при $\mathrm{rank} \mathfrak{g} - \mathrm{rank} \mathfrak{a} = 1$ характеристическое представление $M_{\mathfrak{a}}^{\chi}$ должно быть свободно от нетривиальных кратностей. При $\mathrm{rank} \mathfrak{g} - \mathrm{rank} \mathfrak{a} > 1$ только нулевой вес может иметь нетривиальную кратность.

Простейшие свободные от кратностей представления называются *строго свободными от кратностей* [10] и представляют собой представления с весовыми системами, допускающими строгое упорядочение $\nu_1 < \nu_2 \Leftrightarrow \nu_1 = \nu_2 + n\alpha$, где $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}}^{+}$ и для всех ν_1, ν_2 либо $\nu_1 < \nu_2$, либо $\nu_2 < \nu_1$.

Список строго свободных от кратностей представлений состоит из (первых) фундаментальных представлений в сериях A_r , B_r , C_r , представления исключительной алгебры Ли G_2 (7-мерного) и всех представлений A_1 .

Фундаментальные веса алгебры A_r короче, чем ее корни, но проекции весов $\mathfrak{g}$ должны даваться линейными комбинациями корней специальной подалгебры $\mathfrak{a}$ с целыми коэффициентами, так что первый класс строго свободных от кратностей представлений не порождает проекции корневой системы, допускающей расщепление.

Тем не менее объединение диаграмм двух фундаментальных представлений A_2 с корневой системой A_2 образует корневую систему G_2 . Этот случай соответствует сплиту $\Delta_{G_2} = \varphi_1(\Delta_{A_2}) \cup \varphi_2(\Delta_{A_2})$, связанному с регулярной подалгеброй $A_2 \subset G_2$ (подробнее см. [2]).

Первое фундаментальное представление B_r дает сплит $\Delta' = \pi_{B_r}(\Delta_{D_{r+1}}) = \Delta_{B_r} \cup \Delta_{A_1 + \dots + A_1}$, соответствующий правилу ветвления Гельфанда-Цетлина с тривиальными коэффициентами для специального вложения $\mathfrak{so}(2r+1) \rightarrow \mathfrak{so}(2r+2)$.

Длина первого фундаментального веса алгебры C_r меньше, чем длина ее короткого корня, так что этот случай не может порождать сплит для целочисленной подалгебры.

Далее, если в проекции Δ' на подалгебру A_1 есть векторы разной длины, то в такой проекции есть нетривиальные кратности и система $\Delta_{\mathfrak{s}}$ должна содержать сопоставленные корни. Простейший пример – это специальное вложение $A_1 \rightarrow A_2$ с индексом 4, где $\Delta_{\mathfrak{s}}$ – это корневая система BC_1 . Такие системы не соответствуют полупростым алгебрам Ли, так что мы не можем говорить о совпадении коэффициентов ветвления для редукции $\mathfrak{g} \downarrow \mathfrak{a}$ с кратностями весов в представлениях $\mathfrak{s}$.

Наконец, весовая диаграмма семимерного представления G_2 вместе с корневой системой G_2 образует проекцию корневой системы B_3 , возникающую при специальном вложении $G_2 \rightarrow B_3$. Коэффициенты ветвления в этом случае совпадают с кратностями весов в представлениях алгебры G_2 .

Полная классификация представлений, свободных от кратностей, получена в работе [11] (см. также [12]). Она состоит из микровесовых и квазимикровесовых представлений.

Вес μ называется микровесом, если имеет место разложение (1) для всех $\alpha \in \Delta^+$ и все веса неприводимого представления L^μ лежат на той же орбите группы Вейля, что и μ . Вес называется квазимикровесом, если имеет место разложение (2) для всех $\alpha \in \Delta^+$ и все ненулевые веса представления лежат на одной орбите группы Вейля. Микровесовые представления хорошо изучены и очень полезны при вычислениях, например, тензорных произведений [12], [13]. Микровесовые представления нумеруются элементами весовой решетки, факторизованной по корневой решетке. Для каждой простой алгебры Ли существует единственное квазимикровесовое представление, не являющееся микровесовым. Кратность нулевого веса в квазимикровесовом представлении равна числу коротких вершин в диаграмме Дынкина.

Полный список микровесовых представлений состоит из тензорных степеней векторного представления алгебр серии A_r , спинорных представлений алгебр серии B_r , векторных представлений C_r , векторных и полуспиновых представлений D_r , двух 27-мерных представлений алгебры E_6 и 56-мерного представления E_7 .

Квазимикровесовые представления, не являющиеся микровесовыми, – это присоединенное представление A_r , векторное представление B_r , представление размерности $2r^2 - r - 1$ алгебры C_r , присоединенные представления алгебр D_r , E_6 , E_7 , E_8 , 26-мерное представление F_4 и семимерное представление G_2 .

Классификация неприводимых представлений L^μ , свободных от кратностей, в работах [11], [12] включает следующие классы:

- 1) μ – микровес;
- 2) μ – квазимикровес, и в алгебре Ли только один короткий простой корень;
- 3) алгебра Ли $\mathfrak{sp}(6)$ и $\mu = \omega_1$;
- 4) алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$ и $\mu = m\omega_1$ или $\mu = m\omega_n$.

Как видно, класс 1 содержит строго свободные от кратностей представления серии A_r и исключительной алгебры Ли G_2 , класс 2 содержит строго свободные от кратностей представления B_r и C_r , а строго свободные от кратностей представления A_1 входят в класс 4.

Нам не надо рассматривать микровесовые представления алгебр A , D , E , так как в этом случае длина весов представления M_a^χ меньше длины корней подалгебры $\mathfrak{a}$, что противоречит целочисленности подалгебры $\mathfrak{a}$. Микровесовые спинные представления алгебры серии B_r уже обсуждались, так как они являются строго свободными от кратностей. Последний случай в классе 1 – это векторное представление C_r . Оно $2r$ -мерно, но длина старшего веса ω_1 меньше длины короткого корня алгебры C_r , так что это представление не может быть характеристическим для специальной подалгебры.

Класс 2 состоит из серии B_r и исключительной корневой системы G_2 . Вложение $G_2 \rightarrow B_3$ уже описано выше. Размерность присоединенного представления для серии B_r равна $2r^2 + r$, а размерность квазимикровесового представления равна $2r + 1$. Таким образом, размерность алгебры $\mathfrak{g}$ должна быть $(r+1)(2r+1)$ при ранге $\text{rank } \mathfrak{g} = r+1$. Единственное решение, удовлетворяющее этим условиям, – это $\mathfrak{g} = D_{r+1}$, и мы уже видели, что этот случай соответствует строго свободным от кратностей представлениям и базису Гельфанда–Цетлина.

В классе 3 диаграмма представления содержит веса с длиной меньше длины короткого корня, так что она не может быть проекцией $\Delta_{\mathfrak{g}}$ на целочисленную подалгебру.

Нам следует рассмотреть представления класса 4 только при $m = 1, 2$, так как корневая система $\Delta_{\mathfrak{g}}$ может содержать корни не более чем двух разных длин. В случае $m = 1$ мы снова получаем строго свободные от кратностей модули A_r , которые уже обсуждались выше. А для алгебры A_2 и $m = 2$ весовая диаграмма представления $L_{A_2}^{2\omega_1}$ совпадает с корневой системой исключительной алгебры Ли G_2 . Этот случай возникает в специальном вложении $A_2 \rightarrow B_3$. Для A_r , $r > 2$, не существует корневых систем, которые совпадают с весовой диаграммой $L_{A_r}^{2\omega_1}$.

Мы рассмотрели все случаи, когда $\text{rank } \mathfrak{g} - \text{rank } \mathfrak{a} = 1$. Чтобы завершить нашу классификацию сплинтов, нам нужна классификация всех представлений, в которых кратности ненулевых весов равны единице. Такая классификация была представлена в работе [14]. Она состоит из свободных от кратностей представлений и присоединенных представлений алгебр A_r , B_r , C_r , F_4 и G_2 .

Чтобы существовало вложение $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g}$ такое, что присоединенное представление $\mathfrak{g}$ разлагается в два присоединенных представления $\mathfrak{a}$ (и, возможно, несколько тривиальных представлений), должны быть выполнены следующие условия.

1. Обозначим через $n_{\mathfrak{g}}$ общее число корней в $\Delta_{\mathfrak{g}}$ и проекции Δ' . Тогда

$$n_{\mathfrak{g}} = 2n_{\mathfrak{a}}. \quad (7)$$

2. Обозначим ранг $\mathfrak{g}$ для краткости через $r_{\mathfrak{g}}$. Тогда размерность

$$\dim \mathfrak{g} = n_{\mathfrak{g}} + r_{\mathfrak{g}} \geq 2 \dim \mathfrak{a} = 2n_{\mathfrak{a}} + 2r_{\mathfrak{a}}. \quad (8)$$

Рассмотрим присоединенное представление алгебры A_r . Мы видим, что проекция Δ' корневой системы $\Delta_{\mathfrak{g}}$ должна состоять из корней подалгебры $\mathfrak{a} = A_r$ с кратностью 2. Общее число корней в A_r равно $r(r+1)$, так что Δ' и $\Delta_{\mathfrak{g}}$ содержат по $2r(r+1)$ корней, так как нет корней, ортогональных $\Delta_{\mathfrak{a}}$. Тогда существуют два варианта решения для алгебры $\mathfrak{g}$: D_{r+1} и G_2 при $r = 2$. Но размерность D_{r+1} равна $(r+1)(2r+1)$, тогда как размерность A_r равна $r(r+2)$ и $2 \dim A_r > \dim D_{r+1}$, так что присоединенное представление D_{r+1} не может быть разложено в сумму двух копий присоединенного представления A_r . А значит, нет и соответствующего вложения $A_r \rightarrow D_{r+1}$ и сплинта. Условия (7) и (8) не выполняются.

Теперь перейдем к вложению $B_r \rightarrow \mathfrak{g}$ такому, что присоединенное представление $\mathfrak{g}$ разлагается в сумму двух копий присоединенного представления B_r . Легко проверить перебором, что подходящего решения для $\mathfrak{g}$, удовлетворяющего условиям (7) и (8), не существует в сериях A , B , C , D ; не подходят и все исключительные простые алгебры Ли.

Так как число корней корневой системы C_r такое же, как и в B_r , и нам нужно проверять те же случаи, мы видим, что для C_r тоже нет подходящего вложения.

Присоединенное представление алгебры G_2 дает нам алгебру D_4 в качестве решения условий (7), (8). Вложение $G_2 \rightarrow D_4$ существует, так как есть вложения $G_2 \rightarrow B_3$ и $B_3 \rightarrow D_4$, но разложение присоединенного представления D_4 другое: $\text{ad}_{D_4} = \text{ad}_{G_2} \oplus 2L_{G_2}^{\omega_1}$. Таким образом, этот случай не приводит к возникновению сплинта для проекции Δ' .

Для присоединенного представления F_4 решений, удовлетворяющих соотношениям (7), (8), не существует.

Итак, полная классификация сплинтов для специальных вложений $\Delta' = \pi_{\mathfrak{a}}(\Delta_{\mathfrak{g}}) \equiv \Delta_{\mathfrak{a}} \cup \Delta_{\mathfrak{s}}$, где $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ – простые алгебры, а $\mathfrak{s}$ – полупростая алгебра Ли, имеет следующий вид:

- $B_n \rightarrow D_{n+1}$,
- $G_2 \rightarrow B_3$.

Заметим, что среди сплинтов для специальных вложений нет случаев, когда $\Delta_{\mathfrak{s}}$ вложена не метрически. Это результат нашей исчерпывающей классификации подходящих характеристических представлений подалгебры $\mathfrak{a}$.

После получения полной классификации сплинтов проекций корневых систем при специальных вложениях необходимо проверить совпадение коэффициентов ветвления с кратностями весов в модулях алгебры $\mathfrak{s}$.

Рассмотрим первый случай – вложение $B_n \rightarrow D_{n+1}$. Корневая система D_{n+1} содержит в точности два простых корня, не входящих в число простых корней подалгебры B_n . В обозначениях Бурбаки [15] это простые корни $\alpha_n = e_n - e_{n+1}$ и $\alpha_{n+1} = e_n + e_{n+1}$, а $\alpha_n^{B_n} = e_n$. Такое отличие приводит к критическому различию в группах Вейля этих алгебр: группа W_{B_n} представляет собой полупрямое произведение группы перестановок $e_i \rightarrow e_j$ и группы смен знаков $e_i \rightarrow (\pm 1)_i e_i$, а группа $W_{D_{n+1}}$ отличается тем, что на операции смены знаков наложено дополнительное условие: $\prod_i (\pm 1)_i = 1$. Так как проекция D_{n+1} на B_n действует как $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) \rightarrow (e_1, e_2, \dots, e_n, 0)$, сингулярный элемент $\Phi_{D_{n+1}}^{(\mu)}$, представляющий собой орбиту $W_{D_{n+1}}$, разлагается в комбинацию орбит W_{B_n} после проекции.

А именно, если $\mu + \rho_{D_{n+1}} = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ в стандартном базисе $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$, то группа Вейля $W_{D_{n+1}}$ действует на него перестановкой координат a_i и сменой их знаков. После проецирования последняя координата каждого веса в орбите должна быть отброшена. Среди элементов орбиты будут подмножества, в которых все элементы имеют один и тот же набор координат a_i , но стоящих в произвольном порядке и имеющих произвольные знаки. Эти подмножества похожи на орбиты группы Вейля W_{B_n} , но с сингулярными кратностями. Сингулярная кратность – это детерминант $\varepsilon(w)$ элемента w группы Вейля. В силу дополнительного условия в группе Вейля $W_{D_{n+1}}$ смена знаков a_i не меняет сингулярной кратности. Однако это не выполняется в группе Вейля W_{B_n} , а значит, ровно половина элементов в каждой новой построенной орбите $\tilde{\Phi}_{B_n}^{\tilde{\nu}}$ группы W_{B_n} будет с неправильной сингулярной кратностью. Более того, эти орбиты можно переписать в следующем виде:

$$\tilde{\Phi}_{B_n}^{\tilde{\nu}} = \sum_{w \in W_{D_n}} \varepsilon(w)(1 + s_{e_n})we^{\tilde{\nu} + \rho_{B_n}}. \quad (9)$$

Это разложение возможно потому, что орбита группы Вейля D_n совпадает с той частью орбиты $\tilde{\Phi}_{B_n}^{\tilde{\nu}}$, у которой сингулярные кратности правильные, а вторая часть получается действием элемента s_{e_n} группы W_{B_n} .

Итак, проекция $(\Phi_{D_{n+1}}^{(\mu)})'$ состоит из $n + 1$ квазиорбиты (с “неправильными” знаками) группы Вейля W_{B_n} . Значит, в главной камере Вейля $\bar{C}_{B_n}$ алгебры B_n содержится $n + 1$ вес. Легко проверить, что это старший вес $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и веса, получающиеся из него последовательными вычитаниями $\mu_i e_i$, начиная с $\mu_n e_n$, где μ_i – индексы Дынкина μ плюс 1. Оказывается, что при дополнении этого множества весами с соответствующими сингулярными кратностями до восстановления сингулярного элемента алгебры $\mathfrak{s} = A_1 + A_1 + \dots + A_1$, как было сделано в разделе 1, все дополнительные веса будут лежать на границе главной камеры Вейля $\bar{C}_{B_n}$. Этот факт легко доказать, если заметить, что действие одного из отражений $s_{\alpha_i^{B_n}}$ на веса не меняет их. Итак, проекция $(\Phi_{D_{n+1}}^{\mu})'$ может рассматриваться как квазиорбита сингулярного элемента алгебры $\mathfrak{s}$:

$$\Phi_{D_{n+1}}^{[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}]} = \sum_{w \in W_{D_n}} \varepsilon(w)(1 + s_{e_n})w \left(e^{\mu' + \rho'_{D_{n+1}} - \tilde{\mu}} \Psi_{\mathfrak{s}}^{[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]} \right), \quad (10)$$

где $\tilde{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$. Это порождает правила ветвления, аналогичные соотношению (3):

$$b_{(\mu - \phi(\tilde{\mu} - \tilde{\nu}))}^{[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}]} = M_{(\mathfrak{s})\tilde{\nu}}^{[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]}, \quad (11)$$

что полностью соответствует правилам ветвления Гельфанда–Цетлина, так как кратности весов в представлениях алгебры $\mathfrak{s} = A_1 + A_1 + \dots + A_1$ всегда равны единице (см. рис. 1 и рис. 2).

Аналогичное детальное рассмотрение вложения $G_2 \rightarrow B_3$ дает такой же результат.

Мы рассмотрели случаи сплинтов для специальных вложений, в которых вложенные системы являются корневыми. Однако можно изучать сплинты и тогда, когда это не выполняется. Такие сплинты нельзя использовать для построения правил ветвления, но можно надеяться использовать свойства специальных вложений и проекций, чтобы построить теорию представлений для систем векторов, не являющихся корневыми системами.

Рис. 1. Сплит $D_3 = B_2 \cup A_1 + A_1$: проекция сингулярного элемента $\Phi_{D_3}^{[1,1,2]}$ (точки, соединенные в четыре шестиугольника) может быть построена из сингулярных элементов $\Phi_{A_1+A_1}^{[1,1]}$ (квадраты, всего их восемь). Светло-серая область – главная камера Вейля подалгебры B_2 , стрелки – проекция корневой системы D_3 , плюсы и минусы – сингулярные кратности точек сингулярных элементов.

Рис. 2. Веер вложения, примененный к сингулярному элементу $\Phi_{A_1+A_1}^{[1,1]}$, дает коэффициенты ветвления, равные единице. Темно-серая область – сингулярный элемент $\Phi_{A_1+A_1}^{[1,1]}$, светло-серая область – главная камера Вейля подалгебры B_2 , стрелки – сдвинутая корневая система B_2 , цифры – результат действия веера.

В результате мы видим, что коэффициенты ветвления совпадают с кратностями весов для сплинтов из табл. 1, где звездочкой (*) отмечены сплинты, возникающие в специальных вложениях.

ТАБЛИЦА 1

Тип	Δ	Δ_a	Δ_s
(i)	G_2	A_2	A_2
	F_4	D_4	D_4
(*)	B_3	G_2	A_2
(*)	D_{r+1}	B_r	$\oplus^r A_1$
(ii)	$B_r \ (r \geq 2)$	D_r	$\oplus^r A_1$
(iii)	$A_r \ (r \geq 2)$	$A_{r-1} \oplus u(1)$	$\oplus^r A_1$
	B_2	$A_1 \oplus u(1)$	A_2

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычисление коэффициентов ветвления требуется в различных физических моделях с нарушением симметрии. Такое вычисление радикально упрощается, если коэффициенты ветвления совпадают с кратностями весов, так как для них можно использовать эффективную формулу Фрейден탈я [16]. Классификация сплинтов для регулярных и специальных вложений дает все случаи такого совпадения. Помимо облегчения вычислений, это совпадение интересно с точки зрения теории представлений, так как оно указывает на новую и неожиданную связь между различными алгебрами Ли.

Существуют также специальные вложения полупростых алгебр Ли в простые алгебры Ли. Для таких вложений процедура нахождения сплинтов, позволяющих вычислять коэффициенты ветвления, аналогична рассмотренной выше. Хотя мы не приводим результаты этой процедуры, их нетрудно получить.

Благодарности. Авторы благодарны организаторам конференции “В поисках фундаментальных симметрий”, где были представлены некоторые результаты данной работы. П. И. Какинъ выражает благодарность СПбГУ за финансовую поддержку в рамках исследовательского гранта № 11.38.185.2014.

Список литературы

- [1] D. Richter, *J. Geom.*, **103**:1 (2012), 103–117, arXiv:0807.0640.
- [2] V. D. Lyakhovsky, A. A. Nazarov, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **398** (2012), 162–178, arXiv:1111.6787.
- [3] Е. Б. Дынкин, *Матем. сб.*, **30(72)**:2 (1952), 349–462.
- [4] Е. Б. Дынкин, *Тр. ММО*, **1** (1952), 39–166.
- [5] А. Н. Минченко, *Тр. ММО*, **67** (2006), 256–293.
- [6] W. A. de Graaf, *J. Algebra*, **325**:1 (2011), 416–430.
- [7] M. Larouche, J. Patera, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:11 (2011), 115203, 37 arxiv 1101.6043 pp.
- [8] M. Larouche, M. Nesterenko, J. Patera, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:48 (2009), 485203, 15 pp.

- [9] V. Lyakhovsky, A. Nazarov, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:7 (2011), 075205, 20 pp., arXiv: 1007.0318.
- [10] G. Lehrer, R. Zhang, *J. Algebra*, **306**:1 (2006), 138–174.
- [11] R. Howe, “Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond”, *The Schur Lectures* (1992), Israel Mathematical Conference Proceedings, **8**, eds. I. I. Piatetski-Shapiro, S. Gelbart, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995, 1–182.
- [12] J. R. Stembridge, *Represent. Theory*, **7** (2003), 404–439.
- [13] J. R. Stembridge, “Computational aspects of root systems, Coxeter groups, and Weyl characters”, *Interaction of Combinatorics and Representation Theory*, MSJ Memories, **11**, eds. J. R. Stembridge, J.-Y. Thibon, M. A. A. van Leeuwen, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001, 1–38.
- [14] E. Plotkin, A. Semenov, N. Vavilov, *Internat. J. Algebra Comput.*, **8**:01 (1998), 61–95.
- [15] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras*, Springer, 2002.
- [16] R. Moody, J. Patera, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **7**:1 (1982), 237–242.