Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Зубов, С. А. Пастон, Е. В. Прохвятилов, Точное решение уравнения 'т Хоофта в пределе тяжелых кварков разной массы, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 449–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:05:30

© 2015 г. Р. А. Zubov*, С. А. Paston*, Е. В. Prokhvatilov*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ 'Т ХООФТА В ПРЕДЕЛЕ ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОВ РАЗНОЙ МАССЫ

Рассматривается уравнение 'т Хоофта для связанных состояний в двумерной квантовой хромодинамике в пределе бесконечного числа цветов. Для случая кварков разной массы в пределе стремления их масс к бесконечности получено приближение для низкоэнергетической части спектра и соответствующих волновых функций. Показано, что, как и в частном случае равных масс, уравнение 'т Хоофта сводится в первом приближении к уравнению Шредингера с линейным потенциалом, т. е. к уравнению для частицы в "треугольной" потенциальной яме. Также обсуждается возможность получения поправок к этому приближению.

Ключевые слова: уравнение 'т Хоофта, двумерная квантовая хромодинамика, световой фронт.

DOI: 10.4213/tmf8925

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1974 году 'т Хоофт исследовал модель КХД с локальной калибровочной группой $SU(N)$ в двух измерениях [1]. Она задается лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr}(G_{\rho\nu} G^{\rho\nu}) + \sum_a \bar{q}^a (i\gamma^\rho D_\rho - m_a) q^a. \quad (1)$$

Здесь тензор $G_{\rho\nu} = (i/g)[D_\rho, D_\nu]$ и ковариантная производная $D_\rho = \partial_\rho - igA_\rho$ заданы через потенциал глюонного поля A_ρ , представленный бесследовыми эрмитовыми $(N \times N)$ -матрицами, а q^a — это описывающие кварки фермионные поля с массами m_a . В пределе $N \rightarrow \infty$ при фиксированном $g^2 N$ 'т Хоофту удалось показать, что в этой модели присутствуют только связанные двухкварковые мезонные состояния. Их спектр точно описывается вытекающим из уравнения Бете-Солпитера в светоподобной калибровке $A_- = A^+ = 0$ интегральным уравнением

$$\mu^2 \varphi(\xi) = \left(\frac{\alpha_1}{\xi} + \frac{\alpha_2}{1-\xi} \right) \varphi(\xi) - P \int_0^1 \frac{\varphi(\xi')}{(\xi' - \xi)^2} d\xi'. \quad (2)$$

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: roman.zubov@hep.phys.spbu.ru, paston@pobox.spbu.ru, evgeni.prokhvat@pobox.spbu.ru

Здесь $0 \leq \xi \leq 1$ – это относительный светоподобный импульс одного из кварков, $\alpha_{1,2}$ связаны с голыми массами кварков $m_{1,2}$ из лагранжиана,

$$\alpha_{1,2} = \frac{\pi}{g^2} m_{1,2}^2 - 1, \quad (3)$$

g – константа связи, имеющая в двух измерениях размерность массы, а μ – масса связанного состояния в единицах $g/\sqrt{\pi}$. В уравнении (2) интеграл понимается в смысле главного значения:

$$P \int \frac{\varphi(k)}{k^2} dk = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi(k + i\varepsilon)}{(k + i\varepsilon)^2} dk + \frac{1}{2} \int \frac{\varphi(k - i\varepsilon)}{(k - i\varepsilon)^2} dk. \quad (4)$$

Заметим, что уравнение 'т Хоофта (2) фактически соответствует квантованию теории на световом фронте [2], [3]. Вопросы, связанные с эквивалентностью такого квантования и обычного квантования в лоренцевых координатах, обсуждаются в работах [4]–[7].

Уравнение, подобное уравнению 'т Хоофта (2), встречается и в других двумерных теориях, в которых есть потенциал конфайнмента. Примером является полевая теория Изинга (Ising Field Theory) [8], [9]. В отличие от модели 'т Хоофта, в этой теории аналогичное уравнение описывает некоторое приближение к истинному спектру, однако оно проливает свет на спектр полной теории. Также аналог уравнения 'т Хоофта и связанные с ним идеи используются в некоторых феноменологических моделях и голографии [10]–[12]. В работах [13], [14] рассматриваемая 'т Хоофтом двумерная модель применяется к проблеме нарушения кварк-адронной дуальности. В свою очередь в статьях [15], [16] отмечается связь некоторых вопросов теории волн на поверхности жидкости с частным случаем $\alpha_{1,2} = 0$ уравнения (2).

Уравнение 'т Хоофта может быть решено численно с любой степенью точности, и к нынешнему моменту существуют различные способы это сделать [1], [9], [17]–[20]. Тем не менее из-за важности и простоты этого уравнения имеется интерес и к его аналитическому решению [15], [21]–[26], в частности к возможности рассматривать параметры уравнения $\alpha_{1,2}$ в комплексной области. В работе [26] рассматривается специальный случай $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, а также приводятся предварительные результаты для более общего случая $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. В работе [25] также рассматривается случай равных масс и исследуются асимптотические свойства уравнения 'т Хоофта в пределе $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. случай больших масс кварков. В зависимости от рассматриваемой области спектра получаются разные асимптотики: низкоэнергетическое (для низших возбуждений в спектре) и полуклассическое (для больших собственных значений) разложения. Кроме того, в рамках полуфеноменологического приближения из работы [27] можно получить уравнение, обобщающее двумерное уравнение 'т Хоофта для моделей реальной КХД в $3 + 1$ и $2 + 1$ измерениях. Этому вопросу авторы планируют посвятить отдельную работу.

В настоящей работе мы рассматриваем низкоэнергетическую часть спектра в общем случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ в пределе больших масс кварков (при $\alpha_{1,2} \rightarrow \infty$). Мы используем метод, основанный на решении уравнения в фурье-сопряженных координатах [8] (см. также приложение А в работе [25]). Полученный результат показывает, что, как и в частном случае равных масс, уравнение 'т Хоофта сводится в первом приближении к уравнению Шредингера с линейным потенциалом $|x|$, т. е. к уравнению для частицы в “треугольной” потенциальной яме. Дальнейшие поправки к этому решению можно получить, развивая теорию возмущений.

2. ПРЕДЕЛ ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОВ

Начнем с оригинального уравнения 'т Хоофта (2). Поскольку мы хотим рассматривать предел больших масс кварков, введем следующую параметризацию:

$$\alpha_1 \equiv a_1^2 \alpha, \quad \alpha_2 \equiv a_2^2 \alpha, \quad (5)$$

где α будет стремиться к бесконечности, а оба параметра a_1 и a_2 имеют порядок $O(1)$. Заметим, что $a_1\sqrt{\alpha}$ и $a_2\sqrt{\alpha}$ имеют смысл обезразмеренных масс кварков в указанном пределе, поскольку $\alpha_{1,2} \approx (\pi/g^2)m_{1,2}^2$. Теперь перейдем к новой переменной

$$\xi = \omega + k_1, \quad (6)$$

где

$$k_1 \equiv \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad k_2 \equiv 1 - k_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2}. \quad (7)$$

В результате уравнение (2) примет вид

$$\mu^2 \varphi(\omega) = \left(\frac{a_1^2}{k_1 + \omega} + \frac{a_2^2}{k_2 - \omega} \right) \alpha \varphi(\omega) - \text{P} \int_{-k_1}^{k_2} \frac{\varphi(\omega')}{(\omega' - \omega)^2} d\omega'. \quad (8)$$

Рассмотрим это уравнение в пределе $\alpha \rightarrow \infty$. В главном порядке низшее значение $\mu_{(0)}^2$ в спектре соответствует минимальному значению первого слагаемого в правой части уравнения, этот минимум при выбранном сдвиге (6), (7) достигается при $\omega = 0$, поэтому

$$\mu_{(0)}^2 = (a_1 + a_2)^2 \alpha. \quad (9)$$

При этом соответствующая собственная функция стремится к дельта-функции Дирака $\delta(\omega)$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Будем искать поправку к значению μ^2 в виде

$$\mu^2 = \mu_{(0)}^2 + \gamma. \quad (10)$$

В результате соответствующей подстановки уравнение приобретает вид

$$\gamma \varphi(\omega) = - \frac{(a_1 + a_2)^2 \omega^2 \alpha}{(k_1 + k_2)^2 \omega^2 + (k_1^2 - k_2^2) \omega - k_1 k_2} \varphi(\omega) - \text{P} \int_{-k_1}^{k_2} \frac{\varphi(\omega')}{(\omega' - \omega)^2} d\omega'. \quad (11)$$

Далее введем обозначения

$$t \equiv \alpha^{-1/3}, \quad \bar{\gamma} \equiv \gamma t \quad (12)$$

и сделаем "растяжение" независимой переменной

$$\omega = st, \quad \varphi(\omega) = \varphi(st) = f(s), \quad (13)$$

получим уравнение

$$\bar{\gamma} f(s) = - \frac{(a_1 + a_2)^2 s^2}{(k_1 + k_2)^2 s^2 t^2 + (k_1^2 - k_2^2) st - k_1 k_2} f(s) - \text{P} \int_{-k_1/t}^{k_2/t} \frac{f(s')}{(s' - s)^2} ds'. \quad (14)$$

В этом уравнении можно сделать формальный переход к пределу $t \rightarrow 0$, соответствующий пределу $\alpha \rightarrow \infty$. После этого получится уравнение, уже не содержащее t и, таким образом, соответствующее предельному случаю в первом приближении. Это уравнение имеет вид

$$\bar{\gamma}f(s) = \frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} s^2 f(s) - P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s')}{(s' - s)^2} ds'. \quad (15)$$

Следует отметить, что в настоящий момент не существует строгого доказательства корректности проделанного формального предельного перехода, этот вопрос требует дополнительного исследования. Если величину расхождения, возникающего при взятии предела в первом слагаемом правой части уравнения (14), несложно оценить путем разложения в ряд, то для соответствующего расхождения, связанного с заменой конечных пределов интегрирования бесконечными во втором слагаемом, ее оценить гораздо труднее. В работе [25] это последнее расхождение оценивается как величина, много меньшая t^4 , но является ли эта оценка достаточно строго обоснованной – неясно.

Теперь в уравнении (15) легко сделать преобразование Фурье

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{isx} ds \quad (16)$$

и получить уравнение в “координатной” области

$$\bar{\gamma}\hat{f}(x) = -\frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} \hat{f}''(x) + \pi|x|\hat{f}(x). \quad (17)$$

Заметим, что если $\alpha_1 = \alpha_2$ (т. е. $k_1 = k_2 = 1/2$), то x пропорционально расстоянию между кварком и антикварком в x^- -направлении.

Полученное уравнение есть не что иное, как уравнение Шредингера для частицы в “треугольной” потенциальной яме, т. е. с потенциалом вида $a|x|$. Оно имеет следующее решение:

$$\bar{\gamma}n = -\left(\pi^2 \frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2}\right)^{1/3} z_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} \text{Ai}\left[\left(\pi \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^4}\right)^{1/3} x + z_n\right], & \text{если } x \geq 0, \\ (-1)^n \hat{f}_n(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь через z_{2k+1} обозначены нули функции Эйри, а через z_{2k} – нули ее производной ($k = 0, 1, \dots$). Существует асимптотика величин z_n для больших n [28]:

$$z_n \approx -\left[\frac{3}{4}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^{2/3}. \quad (20)$$

Эта формула обладает точностью 1% уже для $n = 1$ и гораздо лучшей для больших n . Таким образом, можно написать

$$\bar{\gamma}_n \approx \left[\left(\frac{3}{4} \pi^2 \right)^2 \frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} \right]^{1/3} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{2/3}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Теперь, возвращаясь к исходным переменным, можно записать выражения для масс μ_n связанных состояний и соответствующих им функций $\varphi_n(\omega)$, являющихся при большом α в первом приближении решением уравнения 'т Хоофта (2):

$$\begin{aligned} \mu_n^2 &= - \left(\pi^2 \alpha \frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} \right)^{1/3} z_n + (a_1 + a_2)^2 \alpha \approx \\ &\approx \left[\left(\frac{3}{4} \pi^2 \right)^2 \frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} \alpha \right]^{1/3} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{2/3} + (a_1 + a_2)^2 \alpha, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\varphi_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(xt) e^{-i\omega x} dx, \quad (23)$$

где $n = 0, 1, \dots$.

Мы получили решение уравнения 'т Хоофта с неравными массами кварков в первом приближении в пределе больших масс. Чтобы найти поправки к этому решению, нужно разложить все члены в уравнении (14) по степеням t и решить полученное уравнение по теории возмущений. В работе [25] высказано утверждение о том, что при разложении интеграла в (14) в ряд по t поправки к главному значению много меньше, чем t^4 . Таким образом, если ограничиться порядком точности $O(t^4)$, то в этом интеграле можно заменить пределы $(-k_1/t, k_2/t)$ на $(-\infty, \infty)$. Далее для краткости мы выписываем члены вплоть до порядка $O(t^2)$:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}f(s) &= \left[\frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} s^2 + \frac{(a_1 + a_2)^5 (a_1 - a_2)}{a_1^2 a_2^2} t s^3 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a_1 + a_2)^6 (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{a_1^3 a_2^3} t^2 s^4 + \dots \right] f(s) - \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s')}{(s' - s)^2} ds'. \end{aligned} \quad (24)$$

Совершая преобразование Фурье (16), можно получить уравнение в “координатном” пространстве:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}f(s) &= \left[|x| - \frac{(a_1 + a_2)^4}{a_1 a_2} \frac{d^2}{dx^2} + i \frac{(a_1 + a_2)^5 (a_1 - a_2)}{a_1^2 a_2^2} t \frac{d^3}{dx^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a_1 + a_2)^6 (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{a_1^3 a_2^3} t^2 \frac{d^4}{dx^4} + \dots \right] f(s). \end{aligned} \quad (25)$$

Оно решается по теории возмущений способом, в целом аналогичным использованному в работах [8], [25]. Однако, как мы уже отмечали, при таком подходе существенно использование оценки $O(t^4)$, предложенной в работе [25], правильность которой пока кажется недостаточно обоснованной. Даже если эта оценка верна, при ее использовании нельзя получить данным способом поправки порядка $O(t^5)$ и выше.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной работе получено решение уравнения 'т Хоофта в пределе больших и при этом неравных масс кварков. Путем перехода к пределу в исследуемом интегральном уравнении показано, что спектр и набор волновых функций рассматриваемой модели совпадают (после некоторых “перерастяжений”) со спектром и волновыми функциями уравнения Шредингера с линейным потенциалом, т.е. уравнения для частицы в “треугольной” потенциальной яме. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами проведенных численных расчетов, что косвенно указывает на правильность использованного предельного перехода. Однако прямое доказательство математической корректности этого предельного перехода мы не проводим. Этому вопросу планируется посвятить отдельную работу. В частности, на этом пути можно будет проверить высказанное в работе [25] утверждение об оценке скорости расхождения, появляющегося в пределе больших масс кварков при переходе от конечных пределов интегрирования к бесконечным в интеграле, входящем в уравнение 'т Хоофта.

Благодарности. Работа Р. А. Зубова и Е. В. Прохвятилова выполнена при поддержке СПбГУ (грант 11.38.189.2014).

Список литературы

- [1] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **75**:3 (1974), 461–470.
- [2] A. Bassetto, L. Griguolo, F. Vian, *Nucl. Phys. B*, **559**:1–2 (1999), 563–590, arXiv: hep-th/9906125.
- [3] A. Bassetto, L. Griguolo, F. Vian, *Light-front vacuum and instantons in two-dimensions*, arXiv: hep-th/0004026..
- [4] В. А. Франке, С. А. Пастон, *ТМФ*, **112**:3, 399–416, arXiv: hep-th/9901110.
- [5] С. А. Пастон, Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, *ТМФ*, **120**:3 (1999), 417–437.
- [6] С. А. Пастон, Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 84–97.
- [7] Е. М. Ильгенфриц, С. А. Пастон, Г. Ю. Пирнер, Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 89–101, arXiv: hep-th/0610020.
- [8] P. Fonseca, A. Zamolodchikov, *J. Statist. Phys.*, **110**:3–6 (2003), 527–590, arXiv: hep-th/0112167.
- [9] P. Fonseca, A. Zamolodchikov, *Ising spectroscopy I: Mesons at $T < T_c$* , arXiv: hep-th/0612304.
- [10] S.S. Chabysheva, J.R. Hiller, *A dynamical model for longitudinal wave functions in light-front holographic QCD*, arXiv: 1207.7128.
- [11] S.J. Brodsky, G.F. de Téramond, *Phys. Rev. Lett.*, **96**:20 (2006), 201601, 4 pp., arXiv: hep-ph/0602252.
- [12] S.J. Brodsky, G.F. de Téramond, *AdS/CFT and light-front QCD*, arXiv: 0802.0514..
- [13] J. Mondejar, A. Pineda, *Phys. Rev. D*, **79**:8 (2009), 085011, 30 pp., arXiv: 0901.3113.
- [14] M. Shifman, “Quark-hadron duality”, *At the Frontier of Particle Physics -Handbook of QCD: Boris Ioffe Festschrift*, **3**, ed. M. Shifman, World Sci., Singapore, 2001, 1577–1670, arXiv: hep-ph/0009131.
- [15] H. Lewy, *Manuscr. Math.*, **26**:4 (1979), 411–421.
- [16] H. Lewy, *Indiana Univ. Math. J.*, **6**:1 (1957), 91–107.
- [17] A. J. Hanson, R. D. Peccei, M. K. Prasad, *Nucl. Phys. B*, **121**:3 (1977), 477–504.
- [18] S. Huang, J. W. Negele, J. Polonyi, *Nucl. Phys. B*, **307**:4 (1988), 669–704.
- [19] R. L. Jaffe, P. F. Mende, *Nucl. Phys. B*, **369**:1 (1992), 189–218.

- [20] W. Krauth, M. Staudacher, *Phys. Lett. B*, **388**:4 (1996), 808–812, arXiv: hep-th/9608122.
- [21] S. Hildebrandt, *Manuscr. Math.*, **24**:1 (1978), 45–79.
- [22] S. Hildebrandt, *Ark. Mat.*, **17**:1–2 (1979), 29–38.
- [23] S. Hildebrandt, V. Višnjić-Triantafillou, *Math. Z.*, **168**:3 (1979), 223–240.
- [24] J. Bruning, *Manuscr. Math.*, **39**:1 (1982), 125–146.
- [25] I. Ziyatdinov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **25**:20 (2010), 3899–3910, arXiv: 1003.4304.
- [26] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, *J. Phys. A*, **42**:30 (2009), 304012, 23 pp., arXiv: 0905.2280.
- [27] М. Ю. Малышев, Е. В. Прохватилов, *ТМФ*, **169**:2 (2011), 272–284.
- [28] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.