Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, П. И. Какинъ, Случайный рост границы раздела фаз в случайной среде: ренормгрупповой анализ простой модели, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 37–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 11:34:43

© 2015 г.

Н. В. Антонов*, П. И. Какинъ*

СЛУЧАЙНЫЙ РОСТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ: РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

Изучается влияние турбулентного перемешивания на случайный рост границы раздела фаз в задаче о выпадении осадка на подложку. Рост моделируется хорошо известной моделью Кардара–Паризи–Жанга. Турбулентное адвективное поле скорости моделируется ансамблем Крейчнана: гауссовой статистикой с корреляционной функцией $\langle vv \rangle \propto \delta(t - t')k^{-d-\xi}$, где k – волновое число и ξ – свободный параметр, $0 < \xi < 2$. Изучаются эффекты сжимаемости жидкости. С использованием теоретико-полевой группы перенормировок показано, что в зависимости от отношения показателя ξ и пространственной размерности d система демонстрирует различные типы крупномасштабного долговременного асимптотического поведения, связанного с четырьмя возможными фиксированными точками уравнения перенормировочной группы. Помимо уже известных режимов поведения (обыкновенная диффузия, обыкновенный процесс роста и пассивное адвективное скалярное поле), установлено существование нового неравновесного класса универсальности. Координаты фиксированных точек, их области устойчивости и критические размерности вычисляются в первом порядке двойного разложения по ξ и $\varepsilon = 2 - d$ (однопетлевое приближение). Оказывается, что для несжимаемой жидкости наиболее реалистичные значения $\xi = 4/3$ или $\xi = 2$ и $d = 1$ или $d = 2$ соответствуют случаю пассивного скалярного поля, когда нелинейность модели Кардара–Паризи–Жанга незначительна и рост границы раздела фаз полностью определяются турбулентным переносом. Если сжимаемость приобретает достаточно большое значение, происходит изменение критического поведения, и эти значения d и ξ попадают в область устойчивости нового режима, где адвекция и нелинейность одинаково значимы. Тем не менее в этом режиме координаты фиксированной точки лежат в нефизической области, так что вопрос физической интерпретации остается открытым.

Ключевые слова: статистическая механика, критическое поведение, ренормгруппа, неравновесные системы, турбулентность.

DOI: 10.4213/tmf8927

*Физический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: n.antonov@spbu.ru, p.kakin@spbu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ И ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В течение последних десятилетий процессы роста в различных физических системах вызвали неослабевающий интерес. Это фронты отвердевания и пламени, дым и коллоидные агрегаты, опухоли и т. п. (см., например, работы [1]–[9] и литературу в них). Наиболее характерный пример – выпадение осадка на подложку и рост соответствующей фазовой границы. Для описания этих явлений был выдвинут ряд микроскопических моделей: модели Идена [6], Эдвардса–Вилкинсона [7], ограниченные модели “solid-on-solid” [8], баллистическое выпадение [9]; и это еще не полный список.

Оказывается, однако, что все процессы роста имеют несколько важных общих черт с поведением равновесных почти критических систем: а именно самоподобное (скейлинговое) поведение (степенные зависимости) с достаточно универсальными (не зависящими от особенностей конкретного процесса) индексами. В частности, структурная функция порядка n процесса роста ведет себя следующим образом [1]–[5]:

$$S_n(t, r) \equiv \langle [h(t, \mathbf{x}) - h(0, \mathbf{0})]^n \rangle \simeq r^{n\chi} F_n(tr^z), \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (1.1)$$

Здесь $h(x) = h(t, \mathbf{x})$ – высота профиля раздела, скобки $\langle \cdot \rangle$ обозначают усреднение по статистическому ансамблю, χ и z – индекс жесткости и динамический индекс соответственно, а $F_n(\cdot)$ – определенная универсальная скейлинговая функция.

Отсюда естественным образом вытекает описание универсальных свойств процессов роста на основе определенных упрощенных моделей для сглаженного (крупнозернистого) поля высоты по аналогии с теорией критического состояния, где большинство типичных классов универсальности (типов критического поведения) описывается классической моделью φ^4 [10], [11]. В качестве крупнозернистой модели роста обычно используется модель Кадара–Паризи–Жанга (КПЖ) [12], описывающаяся нелинейным дифференциальным уравнением

$$\partial_t h = \kappa_0 \partial^2 h + \lambda_0 \frac{(\partial h)^2}{2} + f. \quad (1.2)$$

Здесь поле высоты $h(x) = h(t, \mathbf{x})$ зависит от d -мерной координаты подложки $\mathbf{x}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial^2 = \partial_i \partial_i$ – оператор Лапласа и $(\partial h)^2 = \partial_i h \partial_i h$; суммирование по повторяющимся тензорным индексам везде подразумевается. Первый член в правой части уравнения (1.2) описывает поверхностное натяжение с коэффициентом $\kappa_0 > 0$. Второй член представляет рост вдоль локальной нормали к поверхности. Параметр λ_0 может иметь любой знак; его можно убрать перемасштабированием, и в дальнейшем мы положим $\lambda_0 = 1$.

Далее, $f = f(x)$ – гауссов случайный шум с нулевым средним и заданной парной ковариацией¹⁾

$$\langle f(x) f(x') \rangle = 2D_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.3)$$

с положительным амплитудным множителем $D_0 > 0$.

Точнее говоря, модель (1.2), (1.3) появилась впервые в основополагающей статье Форстера, Нельсона и Стефена [13] в терминах чисто продольного (соленоидального) векторного поля $u_i = \partial_i h$. Тогда для $\lambda_0 = -1$ уравнение (1.2) представляет собой

¹⁾ Строго говоря, для того чтобы исключить линейный по времени рост среднего значения $\langle h \rangle$, нужно ввести ненулевое среднее значение $\langle f \rangle$. Поскольку нас интересуют только величины типа (1.1), которые содержат только разности полей, обоими средними значениями можно одновременно пренебречь.

d -мерное обобщение уравнения Бюргерса. Его также можно отобразить на модель ориентированных полимеров в случайной среде и на модель многочастичной бозе-системы с притяжением (см., например, статьи [14]).

Вообще первые два члена в правой части уравнения (1.2) – это всего лишь простейшие локальные члены, ковариантные по отношению к симметриям $h \rightarrow h + \text{const}$ и $O(d)$. Таким образом, модель КПЖ возникает повсеместно при описании многих неравновесных, неупорядоченных и диффузионных систем. Тогда поле h можно трактовать по-разному. К примеру, в работах [15] модель КПЖ и ее следствия использовались для изучения крупномасштабного распределения вещества во Вселенной.

Были разработаны несколько обобщений и модификаций первоначальной формулировки модели КПЖ: случайный шум с конечным временем корреляции [16], векторное или матричное поле h [17], измененная форма нелинейности [18] и анизотропная модификация [19]. В связи с последней стоит отметить непрерывные анизотропные модели самоорганизующейся критичности [20].

Теоретико-полевая перенормировочная группа (РГ) представляет собой мощную количественную теорию критического состояния (см. монографии [10], [11] и литературу в них). В РГ-подходе возможные классы универсальности связаны с ИК-притягивающими фиксированными точками перенормируемых теоретико-полевых моделей.

РГ-анализ модели КПЖ, начатый в работах [12], [13], в конечном итоге (после некоторого недопонимания) привел к следующим заключениям [21], [22]. В теоретико-полевой формулировке стохастическая задача (1.2), (1.3) мультипликативно перенормируема. Нелинейность $(\partial h)^2$ в (1.2) ИК-несущественна (в смысле Вильсона) для $d > 2$, имеет логарифмический (пограничный) характер для $d = 2$ и существенна для $d < 2$. Таким образом, эту нелинейность можно изучать с помощью стандартной пертурбативной РГ и разложения по $\varepsilon \equiv 2 - d$. Соответствующие уравнения РГ обладают нетривиальной фиксированной точкой с критическими индексами $\chi = 0$, $z = 2$ (точное соотношение $\chi + z = 2$ продиктовано галилеевой симметрией). Тем не менее фиксированная точка для $\varepsilon < 0$ является ИК-отталкивающей, тогда как для $\varepsilon > 0$ она не лежит в физической области параметров модели ($D_0, \kappa_0 > 0$) и, таким образом, едва ли может описывать ИК-асимптотическое поведение задачи. Все эти результаты являются “пертурбативно точными”, т. е. точными во всех порядках разложения по ε .

Тем не менее можно предположить, что модель КПЖ содержит гипотетическую ИК-притягивающую “сильно взаимодействующую” фиксированную точку, не проявляющуюся в рамках какой-либо теории возмущений. Тогда для $d = 1$ флуктуационно-диссипационная теорема вместе с галилеевой симметрией дает точные значения $\chi = 1/2$, $z = 3/2$ [12], [13]. Сделав дополнительные (весьма нетривиальные) предположения, можно получить точные значения для критических индексов в случаях $d = 2$ и $d = 3$ [23]. Доказательство существования сильно взаимодействующей точки, обеспечивающее так называемой функциональной (также известной как “точная”, или “непертурбативная”) РГ [24], [25], хотя и убедительно, количественно все еще недостаточно надежно, и саму ситуацию нельзя считать удовлетворительной. Некоторые другие открытые вопросы обсуждаются в работах [26], [27].

Хорошо известно, что поведение реальных систем вблизи критических точек крайне чувствительно к внешним воздействиям, гравитации, эффектам конечных

размеров, присутствию примесей и т. п. (см., например, монографии [28], [29] для общего обсуждения и литературы). Более того, некоторые воздействия (случайно распределенные примеси в магнетиках и турбулентное перемешивание жидких систем) могут менять тип фазового перехода или порождать новые классы универсальности с богатым набором порой довольно необычных свойств.

Исследование влияния различных типов детерминированных или хаотических течений (ламинарных потоков, турбулентных конвекций и т. д.) на поведение критических систем (таких, как жидкие кристаллы или бинарные смеси в области точек смешивания) показало, что они могут разрушить обычное критическое поведение: оно может смениться на поведение типа среднего поля или, при выполнении определенных условий, перейти в более сложное поведение, описывающееся неравновесными классами универсальности [30]–[36].

В настоящей работе изучается влияние случайного (турбулентного) движения жидкости, содержащей растворенные частицы, на ИК-поведение случайно растущей границы раздела фаз, при этом обращается особое внимание на эффекты сжимаемости. Перенос полем скорости $\mathbf{v}(x) \equiv \{v_i(x)\}$ вводится “минимальной” заменой

$$\partial_t h \rightarrow \nabla_t h \equiv \partial_t h + (v_i \partial_i) h, \quad (1.4)$$

где ∇_t – галилеево-ковариантная (лагранжева) производная.

Мы собираемся предварительно понять на качественном уровне, что может произойти, если учесть движение жидкости. По этой причине мы пренебрегаем возможным влиянием поля $h(x)$ на динамику жидкости (“пассивная” адвекция) и моделируем поле скорости простой гауссовой статистикой с нулевым средним и заданной парной ковариацией с нулевым временем корреляции,

$$\begin{aligned} \langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{x}') \rangle &= \delta(t - t') D_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ D_{ij}(\mathbf{r}) &= B_0 \int_{k > m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^{d+\xi}} \{P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k})\} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

известной как ансамбль Казанцева–Крейчнана (см., например, статью [37]). Здесь $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ и $Q_{ij}(\mathbf{k}) = k_i k_j / k^2$ – поперечный и продольный проекторы соответственно, $k \equiv |\mathbf{k}|$ – волновое число, $B_0 > 0$ – амплитудный множитель, $\alpha > 0$ – произвольный параметр. Случай $\alpha = 0$ соответствует несжимаемой жидкости ($\partial_i v_i = 0$), тогда как предел $\alpha \rightarrow \infty$ при фиксированном αB_0 соответствует чисто потенциальному полю скорости. Показатель ξ – свободный параметр, $0 < \xi < 2$, его можно рассматривать как своего рода показатель Гёльдера, который характеризует “негладкость” поля скорости; “колмогоровское” значение – это $\xi = 4/3$, тогда как “бэтчелоровский” предел $\xi \rightarrow 2$ отвечает случаю очень гладкой скорости. Обрезание в интеграле (1.5) снизу на $k = m$, где $m \equiv 1/\mathcal{L}$, отвечает интегральному масштабу турбулентности $\mathcal{L}$, обеспечивая ИК-регуляризацию. Его точная форма не важна; резкое обрезание – простейший выбор из практических соображений.

Этот ансамбль, хотя он и кажется простым, привлек огромное внимание при исследовании турбулентности из-за того, что он дает глубокое понимание происхождения перемежаемости и аномального мультискейлинга в турбулентной адвекции и турбулентности в целом (см. обзор [37] и литературу в нем). РГ-подход к этой задаче обсуждается в работе [38]. В контексте нашего исследования ансамбль Казанцева–Крейчнана особенно полезен тем, что он позволяет без особого труда моделировать сжимаемость, в то время как, если описывать поле скорости

уравнениями Навье–Стокса (см., например, работы [39], [40]), это довольно сложно делать. Для сжимаемого поля ($\partial_i v_i \neq 0$) ковариантную производную можно ввести другим способом, а именно как $\nabla_t h \equiv \partial_t h + \partial_i(v_i h)$, что является обязательным, если под полем h подразумевается плотность некоторой сохраняющейся величины. В нашем случае, однако, h “не сохраняется” из-за нелинейного члена в (1.2), и в дальнейшем мы будем рассматривать только вариант (1.4), потому что он не нарушает симметрию $h \rightarrow h + \text{const}$ первоначальной модели КПЖ.

План работы следующий. В разделе 2 представлена теоретико-полевая формулировка полной стохастической задачи (1.2), (1.3), (1.5) и диаграммная техника. В разделе 3 мы анализируем УФ-расходимости модели и показываем ее мультипликативную перенормируемость. Тогда уравнения РГ, как и уравнения критического скейлинга, можно получить стандартным образом (см. раздел 4). Фиксированные точки уравнений РГ и возможные масштабные режимы изучаются в разделе 5. Оказывается, что в дополнение к гауссовой фиксированной точке (свободная теория поля), чисто “кинематическому” режиму (нелинейность КПЖ не существенна в смысле Вильсона) и фиксированной точке чистой модели КПЖ (турбулентный перенос не существен) уравнения РГ содержат полностью нетривиальную фиксированную точку, в которой и нелинейность, и перемешивания важны. Соответствующие критические индексы можно вычислить с помощью двойного разложения по ξ и $\varepsilon = 2 - d$; мы выводим их в ведущем однопетлевом порядке.

В работе найдены области ИК-устойчивости фиксированных точек в пространстве параметров ε , ξ и α . В частности, оказывается, что для малых α и наиболее реалистичных значений $d = 1$ или $d = 2$ и $\xi = 4/3$ или $\xi = 2$ ИК-асимптотическое поведение управляется кинематической фиксированной точкой с точно известными критическими индексами. По мере роста степени сжимаемости α область устойчивости полномасштабной точки расширяется и, наконец, достигает реалистичных значений ε и ξ .

Вывод выражений типа (1.1) требует (довольно простого) анализа составного поля $h^n(x)$; он обсуждается в разделе 6.

Следует признать, что, хотя полученные практические результаты выводятся в рамках стандартной “пертурбативной” теоретико-полевой РГ, сильно взаимодействующая ИК-притягивающая фиксированная точка, если она действительно существует, определенно выживает и в полномасштабной модели, но вопрос ее ИК-устойчивости выходит за рамки нашего исследования. Этот вопрос наряду с некоторыми другими обсуждается в разделе 7.

Практические вычисления перенормировочных констант и РГ-функций приведены в приложении.

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Рассмотрим сначала исходную модель КПЖ без адвекции. Согласно общему утверждению [41] (см. также монографии [10], [11]) стохастическая задача (1.2), (1.3) эквивалентна теоретико-полевой модели двух полей $\Phi = \{h, h'\}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{1}{2} h' D_0 h' + h' \left\{ -\partial_t h + \kappa_0 \partial^2 h + \frac{1}{2} (\partial h)^2 \right\} \quad (2.1)$$

(мы положили $\lambda_0 = 1$). Здесь и далее все необходимые интегрирования по переменной $x = (t, \mathbf{x})$ и суммирования по повторяющимся тензорным индексам подразумеваются, например

$$h' D_0 h' = D_0 \int dt \int d\mathbf{x} h'(t, \mathbf{x}) h'(t, \mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Теоретико-полевая формулировка означает, что различные корреляционные функции и функции отклика стохастической задачи (1.2), (1.3) могут быть соотнесены с различными функциями Грина теоретико-полевой модели с действием (2.1). Иными словами, они представляются функциональными средними по полному набору полей $\Phi = \{h, h'\}$ с весом $\exp \mathcal{S}(\Phi)$.

Затравочные пропагаторы в соответствующей диаграммной технике Фейнмана определяются свободными (билинейными по полям) частями действия (2.1). В частотно-импульсном $(\omega - \mathbf{k})$ представлении они имеют вид

$$\langle hh' \rangle_0 = \langle h' h \rangle_0^* = \frac{1}{-i\omega + \kappa_0 k^2}, \quad \langle hh \rangle_0 = \frac{D_0}{\omega^2 + \kappa_0^2 k^4}, \quad \langle h' h' \rangle_0 = 0. \quad (2.3)$$

В этой модели есть только одна вершина взаимодействия, а именно $h'(\partial h)^2/2$.

В диаграммном представлении мы обозначаем $\langle hh \rangle_0$ прямой линией, а $\langle hh' \rangle_0$ — прямой линией со штрихом, соответствующим полю h' .

Включение поля скорости $\mathbf{v}(x) \equiv \{v_i(x)\}$ выполняется путем замены (1.4) в (1.2) и, таким образом, в (2.1). Полная задача тогда становится эквивалентной теоретико-полевой модели трех полей $\Phi = \{h, h', \mathbf{v}\}$ с функционалом действия

$$\mathcal{S}(\Phi) = \frac{1}{2} h' D_0 h' + h' \left\{ -\nabla_t h + \kappa_0 \partial^2 h + \frac{1}{2} (\partial h)^2 \right\} + \mathcal{S}_{\mathbf{v}}. \quad (2.4)$$

Последний член отвечает гауссову усреднению по полю $\mathbf{v}$ с коррелятором (1.5):

$$\mathcal{S}_{\mathbf{v}} = -\frac{1}{2} \int dt \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' v_i(t, \mathbf{x}) D_{ij}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') v_j(t, \mathbf{x}'), \quad (2.5)$$

где D_{ij}^{-1} — оператор, обратный к оператору D_{ij} из (1.5).

Таким образом, диаграммы Фейнмана для полной модели (2.4) включают, в дополнение к (2.3), новый пропагатор (1.5) и новую вершину $-h'(v\partial)h$.

Роль констант взаимодействия в обыкновенной теории возмущений играют два параметра

$$g_0 = \frac{D_0}{\kappa_0^3} \sim \Lambda^\varepsilon, \quad w_0 = \frac{B_0}{\kappa_0} \sim \Lambda^\xi. \quad (2.6)$$

Последние соотношения вытекают из соображений размерности (см. следующий раздел) и определяют характерный импульсный УФ-масштаб Λ .

3. УФ-РАСХОДИМОСТИ И ПЕРЕНОРМИРОВКА

Хорошо известно, что анализ УФ-расходимостей основывается на анализе канонических размерностей (“подсчете степеней”), см., например, монографии [10], [11]. Динамические модели типа (2.4) имеют два независимых масштаба: временной масштаб T и масштаб длины L (в отличие от одномасштабных статических моделей). Таким образом, каноническая размерность некоторой величины F (поля или параметра в функционале действия) может быть полностью описана двумя числами, частотной размерностью d_F^ω и импульсной размерностью d_F^k :

$$[F] \sim [T]^{-d_F^\omega} [L]^{-d_F^k}.$$

Они находятся из очевидных условий нормировки

$$d_k^k = -d_x^k = 1, \quad d_k^\omega = d_x^\omega = 0, \quad d_\omega^k = d_t^k = 0, \quad d_\omega^\omega = -d_t^\omega = 1$$

и из требования, чтобы каждый член функционала действия был безразмерным (по отношению к импульсной и частотной размерностям отдельно). Тогда, основываясь на размерностях d_F^k и d_F^ω , можно ввести полную каноническую размерность $d_F = d_F^k + 2d_F^\omega$ (в свободной теории $\partial_t \propto \partial^2$). В теории перенормировки динамических моделей эта величина играет ту же роль, что и привычная (импульсная) размерность в статических задачах (см. книгу [11], гл. 5).

Канонические размерности полей и параметров модели (2.4) приведены в табл. 1. В ней также представлены перенормированные параметры (без нижнего индекса 0) и перенормировочная масса μ , которая будет введена ниже.

ТАБЛИЦА 1. Канонические размерности полей и параметров в модели (2.4).

F	h	h'	$\mathbf{v}$	$\varkappa_0, \varkappa$	D_0	g_0	B_0	w_0	g, w, α	m, μ, Λ
d_F^ω	1	-1	1	1	3	0	1	0	0	0
d_F^k	-2	$d+2$	-1	-2	$-d-4$	$2-d \equiv \varepsilon$	$-2+\xi$	ξ	0	1
d_F	0	d	1	0	ε	ε	ξ	ξ	0	1

Из табл. 1 следует, что модель имеет логарифмический характер при $d = 2$ и $\xi = 0$, когда обе константы взаимодействия g_0 и w_0 одновременно становятся безразмерными. Отсюда УФ-расходимости в функциях Грина предстают в виде полюсов по $\varepsilon = 2 - d$, ξ и, в общем случае, во всех их линейных комбинациях.

Полная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-непр}}$, где $\Phi = \{h, h', v\}$, в частотно-импульсном представлении дается соотношением

$$d_\Gamma = d + 2 - d_h N_h - d_{h'} N_{h'} - d_v N_v, \quad (3.1)$$

где $N_h, N_{h'}, N_v$ – числа соответствующих полей, входящих в функцию Γ (см., например, [11]).

Полная размерность d_Γ в логарифмической теории (т.е. при $\varepsilon = \xi = 0$) – это формальный индекс УФ-расходимости: $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=\xi=0}$. Поверхностная УФ-расходимость, для исключения которой нужны контрчлены, может присутствовать только в тех функциях Γ , для которых δ_Γ есть неотрицательное целое число. Контрчлен – это полином по частотам и импульсам степени δ_Γ (при условии, что подразумевается соглашение $\omega \propto k^2$).

Если по какой-либо причине некоторое число внешних импульсов возникает как общий множитель во всех диаграммах данной функции Грина, то реальный индекс расходимости δ'_Γ будет меньше, чем δ_Γ , на соответствующее число единиц. Именно это и происходит в нашей модели: поле h входит в вершины $h'(\partial h)^2$ и $h'(v\partial)h$ только в форме пространственной производной. Поэтому любое появление h в какой-либо функции Γ приводит к такому внешнему импульсу, и реальный индекс расходимости дается выражением $\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_h$. Более того, h может возникнуть в соответствующем контрчлене только в форме производной.

Из табл. 1 и выражения (3.1) получаем

$$\delta'_\Gamma = \delta_\Gamma - N_h = 4 - N_h - 2N_{h'} - N_v. \quad (3.2)$$

Рис. 1. Диаграмма исчезающей функции $\langle hh \rangle_{1\text{-непр}}$ с замкнутым циклом из двух запаздывающих пропагаторов.

В динамических моделях все 1-неприводимые функции без полей отклика тождественно равны нулю (их диаграммы всегда содержат замкнутые циклы запаздывающих линий), см., например, [11]. Пример такой диаграммы изображен на рис. 1. Таким образом, в (3.2) достаточно рассмотреть случай $N_{h'} > 0$.

Простой анализ выражения (3.2) показывает, что поверхностные УФ-расходимости могут присутствовать только в следующих 1-неприводимых функциях:

$$\begin{aligned}
 \langle h'h' \rangle_{1\text{-непр}} & (\delta_\Gamma = 0, \quad \delta'_\Gamma = 0) \quad \text{с контрчленом} \quad h'h', \\
 \langle h'hh \rangle_{1\text{-непр}} & (\delta_\Gamma = 2, \quad \delta'_\Gamma = 0) \quad \text{с контрчленом} \quad h'(\partial h)^2, \\
 \langle h'h \rangle_{1\text{-непр}} & (\delta_\Gamma = 2, \quad \delta'_\Gamma = 1) \quad \text{с контрчленом} \quad h'\partial^2 h, \\
 \langle h'hv \rangle_{1\text{-непр}} & (\delta_\Gamma = 1, \quad \delta'_\Gamma = 0) \quad \text{с контрчленом} \quad h'(v\partial)h, \\
 \langle h' \rangle_{1\text{-непр}} & (\delta_\Gamma = 2, \quad \delta'_\Gamma = 2) \quad \text{с контрчленом} \quad h', \\
 \langle h'v \rangle_{1\text{-непр}} & (\delta_\Gamma = 1, \quad \delta'_\Gamma = 1) \quad \text{с контрчленом} \quad h'(v\partial), \\
 \langle h'vv \rangle_{1\text{-непр}} & (\delta_\Gamma = 0, \quad \delta'_\Gamma = 0) \quad \text{с контрчленом} \quad h'v^2.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Некоторые дополнительные соображения сокращают число необходимых контрчленов.

Действие модели КПЖ инвариантно относительно преобразования

$$h(t, \mathbf{x}) \rightarrow h(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}, \quad h'(t, \mathbf{x}) \rightarrow h'(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) \tag{3.4}$$

с произвольным постоянным параметром $\mathbf{u}$. Эта инвариантность, которая становится галилеевой в терминах векторного поля $\partial_i h$, нарушается в полной модели (2.1). Тем не менее в последней имеется другая галилеева симметрия, а именно

$$\begin{aligned}
 h(t, \mathbf{x}) & \rightarrow h(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t), & h'(t, \mathbf{x}) & \rightarrow h'(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t), \\
 \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) & \rightarrow \mathbf{v}(t, \mathbf{x} + \mathbf{u}t) - \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

(здесь важно, что наше поле скорости некоррелировано во времени). Эта симметрия требует, чтобы моном $h'(v\partial)h$ входил в контрчлен только в форме инвариантной комбинации $h'\nabla_t h = h'\partial_t h + h'(v\partial)h$. Первый член тем не менее запрещен реальным индексом (3.2): поле h появляется там без пространственной производной. Таким образом, и второй член оказывается под запретом (сокращение расходящихся вкладов от разных диаграмм может быть также проверено вручную). Кроме того, требование галилеевой симметрии исключает моном $h'v^2$.

Контрчлен $\propto h'$, возникающий из функции $\langle h' \rangle_{1\text{-непр}}$, в терминах исходной стохастической задачи перенормирует среднее значение случайного шума $\langle f \rangle$. Это можно проиллюстрировать диаграммой “головастик” на рис. 2: она представляет однопетлевой вклад в среднее значение $\langle \partial h \partial h \rangle$. Как уже было сказано (см. сноску на стр. 38), эти два средних значения можно одновременно игнорировать. В этом смысле вклад от функции $\langle h' \rangle_{1\text{-непр}}$ схож со сдвигом критической температуры в моделях равновесного критического поведения.

Рис. 2. Однопетлевая диаграмма “головастик” из функции $\langle h' \rangle_{1\text{-непр}}$.

Контрчлен вида $h' \partial_i v_i$, возникающий от функции Грина $\langle h' v \rangle_{1\text{-непр}}$, также требует особого обсуждения. Он полностью исчезает в случае несжимаемой жидкости, когда $\partial_i v_i = 0$. Тем не менее практическое однопетлевое вычисление показывает, что он отсутствует и в общем случае $\alpha \neq 0$. Можно выдвинуть некоторые соображения, что это справедливо во всех порядках теории возмущений (см. приложение). Так как наш текущий анализ ограничивается однопетлевыми вычислениями, мы не будем в дальнейшем учитывать этот член.

Тогда остаются три контрчлена вида $h'h'$, $h' \partial^2 h$ и $h'(\partial h)^2$. Все эти члены присутствуют в действии (2.4), делая нашу модель мультипликативно перенормируемой. Перенормированное действие может быть записано в форме

$$S_R(\Phi) = \frac{1}{2} Z_1 h' D h' + h' \left\{ -\partial_t h + \varkappa Z_2 \partial^2 h + \frac{1}{2} Z_3 (\partial h)^2 \right\} + S_v, \quad (3.6)$$

где g , w и $\varkappa$ – перенормированные аналоги затравочных параметров и функционал S_v из (2.5) следует также выразить через перенормированные переменные. Перенормировочные константы Z_i зависят только от полностью безразмерных параметров g , w , $\varkappa$, α и поглощают все полюсы по ε и ξ .

Перенормированное действие (3.6) получается из исходного (2.4) перенормировкой полей $h \rightarrow Z_h h$, $h' \rightarrow Z_{h'} h'$ и заменой параметров

$$\varkappa_0 = \varkappa Z_\varkappa, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad w_0 = w \mu^\xi Z_w. \quad (3.7)$$

Амплитуды D и B выражаются через перенормированные параметры следующим образом:

$$D = g \varkappa^3 \mu^\varepsilon, \quad B = w \varkappa \mu^\xi. \quad (3.8)$$

Перенормировочные константы в уравнениях (3.6) и (3.7) связаны уравнениями

$$\begin{aligned} Z_g &= Z_1 Z_2^{-3} Z_3^2, & Z_\varkappa &= Z_2, & Z_h &= Z_3, & Z_{h'} &= Z_3^{-1}, \\ Z_h Z_{h'} &= 1, & Z_v &= 1, & Z_w Z_\varkappa &= 1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Первые два соотношения во второй строчке возникают из-за отсутствия контрчлена $h' \nabla_t h$, последнее вытекает из отсутствия перенормировки члена S_v .

Перенормировочные константы Z_1 , Z_2 и Z_3 вычисляются непосредственно из диаграмм, затем константы в (3.7) находятся из соотношений (3.9). Перенормировочные константы можно найти из требования, чтобы функции Грина перенормированной модели (3.6) были УФ-конечны, после того как мы выразим их через перенормированные переменные. В нашем случае это означает, что функции Грина УФ-конечны при $\varepsilon, \xi \rightarrow 0$. Вычисление в первом порядке по g и w (однопетлевое приближение) дает (см. приложение для деталей)

$$Z_1 = 1 - \frac{1}{8\varepsilon} \hat{g} - \frac{\alpha}{2\xi} \hat{w}, \quad Z_2 = Z_3 = 1 - \frac{\hat{w}}{\xi} \frac{d-1+\alpha}{2d}, \quad (3.10)$$

где

$$\hat{g} = g \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad \hat{w} = w \frac{S_d}{(2\pi)^d};$$

здесь $S_d = 2\pi^d/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в пространстве размерности d .

Если использовать схему минимальных вычитаний (МВ), то перенормировочные константы принимают вид $Z = 1 +$ полюсы только по ε и ξ (и в высших порядках – по их линейным комбинациям). Тогда, строго говоря, в условиях нашего однопетлевого приближения мы должны сделать замену $d = 2 - \varepsilon \rightarrow 2$ в выражениях выше. Однако некоторое время мы продолжим использовать их в форме (3.10), тогда можно будет получить некоторые точные результаты (см. раздел 5). Похожая перенормировочная схема, где размерность d удерживается в “геометрических множителях”, возникающих из сверток различных проекторов, ранее использовалась в работе [21]; ее справедливость и эквивалентность схеме МВ продемонстрирована в статье [42].

4. УРАВНЕНИЯ РГ И РГ-ФУНКЦИИ

Кратко рассмотрим простой вывод уравнений РГ; детальное рассмотрение можно найти в монографиях [10], [11]. Уравнения РГ пишутся для перенормированных функций Грина $G_R = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_R$. Они отличаются от исходных (неперенормированных) функций Грина G общими численными множителями (из-за перемасштабирования полей) и другим выбором параметров (e, μ вместо e_0). Таким образом, перенормированные функции Грина также можно использовать для анализа критического поведения. Связь $S_R(Z_F \Phi, e, \mu) = S(\Phi, e_0)$ между функционалами (2.4) и (3.6) приводит к соотношениям

$$G(e_0, \dots) = Z_h^{N_h} Z_{h'}^{N_{h'}} G_R(e, \mu, \dots) \quad (4.1)$$

между функциями Грина. Здесь, как и выше, N_h и $N_{h'}$ – числа соответствующих полей, входящих в G (мы учитываем, что в нашей модели $Z_v = 1$), $e_0 = \{g_0, \kappa_0, w_0\}$ – полный набор затравочных параметров и $e = \{g, \kappa, w\}$ – их перенормированные эквиваленты; многоточие обозначает остальные аргументы (время, координаты, импульсы).

Мы используем символ $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ для обозначения дифференциального оператора $\mu \partial_\mu|_{e_0}$ при фиксированных затравочных параметрах. Если выразить его через перенормированные переменные, он будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_\mu + \beta_g \partial_g + \beta_w \partial_w - \gamma_\kappa \mathcal{D}_\kappa, \quad (4.2)$$

где $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x . Аномальные размерности γ определяются как

$$\gamma_F \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F \quad \text{для любой величины } F, \quad (4.3)$$

а β -функции для двух безразмерных констант взаимодействия g и w таковы:

$$\beta_g \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g[-\varepsilon - \gamma_g], \quad \beta_w \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu w = w[-\xi - \gamma_w], \quad (4.4)$$

где вторые равенства в каждой из формул вытекают из определений и соотношений (3.7).

Чтобы вывести основные дифференциальные уравнения РГ, мы применяем к обеим частям равенства (4.1) оператор $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$:

$$\{\mathcal{D}_{RG} + N_h \gamma_h + N_{h'} \gamma_{h'}\} G_R(e, \mu, \dots) = 0. \quad (4.5)$$

Наконец, уравнения (3.9) приводят к следующим соотношениям между аномальными размерностями (4.3):

$$\gamma_h = \gamma_3, \quad \gamma_{h'} = -\gamma_3, \quad \gamma_w = -\gamma_\kappa, \quad \gamma_v = 1, \quad \gamma_\kappa = \gamma_2, \quad \gamma_g = \gamma_1 - 3\gamma_2 + 2\gamma_3. \quad (4.6)$$

Аномальная размерность, соответствующая данной перенормировочной константе Z_F , может быть найдена из соотношения

$$\gamma_F = (\beta_g \partial_g + \beta_w \partial_w) \ln Z_F \simeq -(\varepsilon \mathcal{D}_g + \xi \mathcal{D}_w) \ln Z_F, \quad (4.7)$$

которое получается из определения (4.3), выражения (4.2) для оператора $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ в перенормированных переменных и того факта, что перенормировочные константы зависят только от двух полностью безразмерных констант взаимодействия g и w . Во второй части соотношения (4.7) мы оставили в β -функциях (4.4) только члены старшего порядка, так как их достаточно для однопетлевого приближения. Используя схему МВ в однопетлевом приближении, из явных выражений (3.10) получаем

$$\gamma_1 = \frac{\hat{g}}{8} + \frac{\alpha \hat{w}}{2}, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \hat{w} \frac{d-1+\alpha}{2d}, \quad (4.8)$$

где $\hat{g}$ и $\hat{w}$ были определены ранее в (3.10), а поправки имеют порядок $\hat{g}^2$, $\hat{w}^2$, $\hat{w}\hat{g}$ и выше.

5. ФИКСИРОВАННЫЕ ТОЧКИ И СКЕЙЛИНГОВЫЕ РЕЖИМЫ

Хорошо известно, что асимптотическое поведение (при больших временах и расстояниях) перенормируемой теории поля определяется ИК-притягивающими фиксированными точками соответствующих уравнений РГ. В общем случае координаты возможных фиксированных точек находятся из требования, чтобы все β -функции обратились в нуль. В модели (2.4) координаты g_* , w_* определяются двумя уравнениями

$$\beta_g(g_*, w_*) = 0, \quad \beta_w(g_*, w_*) = 0, \quad (5.1)$$

где β -функции берутся из (4.4). Тип фиксированной точки определяется матрицей

$$\Omega = \left\{ \Omega_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right\}, \quad (5.2)$$

где β_i – полный набор β -функций и $g_j = \{g, w\}$ – полный набор констант взаимодействия. Для ИК-притягивающей фиксированной точки матрица Ω должна быть положительно определенной, т. е. действительные части всех ее собственных чисел должны быть положительными.

Из соотношений (4.6) мы находим, что $\gamma_g = \gamma_1 - \gamma_2$, $\gamma_w = -\gamma_\varkappa = \gamma_2$, так что

$$\beta_g = g(-\varepsilon - \gamma_g) = g(-\varepsilon - \gamma_1 + \gamma_2), \quad \beta_w = w(-\xi - \gamma_w) = w(-\xi - \gamma_2). \quad (5.3)$$

Подставляя явные выражения (4.8), мы приходим к явным однопетлевым выражениям для β -функций:

$$\beta_g = g \left\{ -\varepsilon - \frac{\hat{g}}{8} + \hat{w} \frac{(d-1)(\alpha-1)}{2d} \right\}, \quad \beta_w = w \left\{ -\xi + \hat{w} \frac{d-1+\alpha}{2d} \right\}, \quad (5.4)$$

где возможны поправки порядка w^2 и выше. Стоит отметить, что однопетлевой результат (5.4) для β_w становится точным при $g = 0$ (см., например, работу [38]), тогда как результат для β_g становится точным при $w = 0$, как следует из анализа в статьях [22].

Из уравнений (5.1) и (5.3) следует, что в нашей модели имеются четыре фиксированные точки. Так как $\partial_g \beta_w = 0$, матрица Ω треугольная в каждом случае, и ее собственные числа просто даются диагональными элементами $\Omega_g = \partial \beta_g / \partial g$ и $\Omega_w = \partial \beta_w / \partial w$. Перечислим эти фиксированные точки.

Рис. 3. Области устойчивости фиксированных точек модели (2.4).

1. Гауссова (свободная) фиксированная точка такая, что $g_* = w_* = 0$, $\Omega_g = -\varepsilon$, $\Omega_w = -\xi$ (все эти выражения точные).

2. Фиксированная точка, для которой $w_* = 0$ (точный результат во всех порядках), $\hat{g}_* = -8\varepsilon$, $\Omega_g = \varepsilon$, $\Omega_w = -\xi$. Эта фиксированная точка соответствует чистой модели КПЖ: хотя имеется взаимодействие с полем скорости, оно не влияет на старший порядок ИК-асимптотического поведения (оно несущественно в смысле Вильсона).

3. Фиксированная точка, для которой $g_* = 0$ (точный результат),

$$\hat{w}_* = \frac{2d\xi}{d-1+\alpha}, \quad \Omega_g = -\varepsilon + \xi - \frac{d\alpha\xi}{d-1+\alpha}$$

и $\Omega_w = \xi$ (точный результат). Эта фиксированная точка соответствует чистой модели Крейчнана с маломасштабным перемешиванием; нелинейность КПЖ несущественна в смысле Вильсона.

4. Фиксированная точка, для которой

$$\hat{g}_* = 8 \left\{ -\varepsilon + \xi - \frac{d\alpha\xi}{d-1+\alpha} \right\}, \quad \hat{w}_* = \frac{2d\xi}{d-1+\alpha},$$

$$\Omega_g = \varepsilon - \xi + \frac{d\alpha\xi}{d-1+\alpha}, \quad \Omega_w = \xi$$

(точный результат). Эта фиксированная точка соответствует новому нетривиальному ИК-скейлинговому режиму (классу универсальности), в котором нелинейность модели (2.4) и турбулентное перемешивание важны одновременно.

На рис. 3 показаны области ИК-устойчивости для всех фиксированных точек на плоскости (ε, ξ) : темная область для гауссовой точки, горизонтальные полосы для точки модели КПЖ, вертикальные полосы для точки модели Крейчнана и светло-серая область для нового режима. В этих областях оба собственных числа матрицы (5.2) для данных фиксированных точек положительны.

Рис. 4. Граница между областями 3 и 4 движется против часовой стрелки с ростом сжимаемости α , пока не достигнет луча $\varepsilon = -\xi$ (для $d = 2$).

В однопетлевом приближении (5.3) все границы областей устойчивости – прямые линии. Между разными областями нет ни пустот, ни пересечений. Такая картина – характерная особенность приближения первого порядка. Границы $\varepsilon < 0$, $\xi < 0$ для первой точки, $\varepsilon > 0$ для второй точки и $\xi > 0$ для третьей точки точные, тогда как на остальные могут повлиять поправки старших порядков, т.е. границы могут искривляться, а между разными областями ИК-устойчивости могут появляться пустоты и пересечения.

Главное качественное заключение, которое можно сделать из этой схемы, состоит в том, что для малых α и наиболее реалистичных значений $d = 1$ или $d = 2$ и $\xi = 4/3$ или $\xi = 2$ ИК-асимптотическое поведение управляется фиксированной точкой модели Крейчнана. Однако, по мере того как степень сжимаемости α возрастает, область устойчивости новой точки становится шире и, наконец, поглощает реалистичные значения ε и ξ . Действительно, граница между областями 3 и 4 зависит от α . Когда α растет, граница вращается против часовой стрелки и при $\alpha \rightarrow \infty$ приближается к лучу $\varepsilon = (1 - d)\xi$. Таким образом, для $d = 1$ она стремится к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$, $\xi > 0$ а для $d = 2$ стремится к $\varepsilon = -\xi$, $\xi > 0$ (см. рис. 4). Заметим, что для $d = 2$ граница становится вертикальной при $\alpha = 1$.

Следует помнить, однако, что результаты, связанные с границей между областями 3 и 4, могут быть подвержены влиянию вкладов старших порядков. Стоит также отметить, что интерпретация четвертой фиксированной точки приводит к той же проблеме, что и интерпретация точки модели КПЖ: когда она является ИК-притягивающей, координата g_* лежит в нефизической области, $g_* < 0$. Мы вернемся к этой проблеме в разделе 7.

6. КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ. КРИТИЧЕСКИЙ СКЕЙЛИНГ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ. СОСТАВНЫЕ ПОЛЯ $h^n(x)$.

Наличие ИК-притягивающей точки свидетельствует о существовании скейлинго-го (самоподобного) поведения функций Грина в ИК-области. В этом критическом скейлинге все “ИК-несущественные” параметры (μ , g и w в нашем случае) фиксируются, тогда как “ИК-существенные” параметры (координаты/импульсы, время/частоты) растягиваются. Критическая размерность Δ_F некоторой ИК-сущест-

ственной величины F дается соотношением (с нормировочным условием $\Delta_k = 1$)

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad (6.1)$$

где $\Delta_\omega = 2 - \gamma_\omega^*$ есть критическая размерность частоты, $d_F^{k,\omega}$ – канонические размерности величины F , заданные в табл. 1, и γ_F^* – значение аномальной размерности (4.3) в обсуждаемой фиксированной точке: $\gamma_F^* = \gamma_F(g_*, w_*)$ (см., например, монографию [11] для детального объяснения).

Из табл. 1 для размерностей полей мы находим

$$\Delta_h = -2 + \Delta_\omega + \gamma_h^*, \quad \Delta_{h'} = (d + 2) - \Delta_\omega + \gamma_h^*.$$

Тогда соотношения (4.6) дают

$$\Delta_\omega = 2 - \gamma_2^*, \quad \Delta_h = -\gamma_2^* + \gamma_3^*, \quad \Delta_{h'} = d + \gamma_2^* - \gamma_3^*. \quad (6.2)$$

Наконец, подставляя явные однопетлевые выражения (4.8), находим, что для первой и второй фиксированных точек

$$\Delta_h = 0, \quad \Delta_{h'} = d, \quad \Delta_\omega = 2, \quad (6.3)$$

а для третьей и четвертой фиксированных точек

$$\Delta_h = 0, \quad \Delta_{h'} = d, \quad \Delta_\omega = 2 - \xi. \quad (6.4)$$

Для точек 1–3 эти выражения точные (см. замечание после уравнения (5.4)). Для четвертой точки размерности полей могут меняться из-за вкладов старших порядков при сохранении точного условия $\Delta_h + \Delta_{h'} = d$, а выражение для Δ_ω точное вследствие второго соотношения в (5.3).

В традиционных обозначениях (1.1) $\Delta_h = -\chi$ и $\Delta_\omega = z$. Однако величина S_n в (1.1) – это не обычная функция Грина порядка n основных полей $h(x)$: это сумма функций парных корреляторов $\langle h^s(x) h^q(0) \rangle$ составных полей (“составных операторов” в теоретико-полевой терминологии) $h^n(x)$. Перенормировка таких величин требует дальнейшего анализа, но в настоящем случае он весьма прост.

В нашей модели полная каноническая размерность 1-неприводимой функции Грина $\Gamma = \langle F\Phi \dots \Phi \rangle_{1\text{-непр}}$ с одним составным оператором F и произвольным числом базовых полей $\Phi = \{h, h', v\}$ равна $d_\Gamma = d_F - d_h N_h - d_{h'} N_{h'} - d_v N_v$, где $N_h, N_{h'}, N_v$ – числа соответствующих полей, входящих в функцию Γ , а $d_h, d_{h'}, d_v$ – их канонические размерности и d_F – каноническая размерность F (см., например, книгу [11]). Формальный индекс расходимости есть $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=\xi=0}$; поверхностные расходимости могут присутствовать в Γ , если δ_Γ – неотрицательное целое число.

Из табл. 1 для $F = h^n$ находим, что $d_F = 0$ и $\delta_\Gamma = -2N_{h'} - N_v$. Таким образом, расходимости, на первый взгляд, могут присутствовать во всех функциях $\Gamma = \langle h^n h \dots h \rangle_{1\text{-непр}}$ при $N_{h'} = N_v = 0$, произвольном N_h и $\delta_\Gamma = 0$. Однако любая нетривиальная диаграмма такой функции содержит хотя бы одну внешнюю вершину $h'(\partial h)^2$ или $h'(v\partial)h$, где поле h входит под знаком производной. Таким образом, по крайней мере один внешний импульс возникает в диаграмме как общий множитель, реальный индекс δ_Γ' отрицателен, и поверхностные расходимости на самом деле отсутствуют. Это означает, что все операторы $F = h^n$ не перенормируются, и их критические размерности просто даются выражением $\Delta_F = n\Delta_h$. Это дает обоснование соотношения (1.1) с размерностями (6.3), (6.4).

7. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изучили эффекты турбулентного перемешивания в задаче случайного роста границы раздела фаз. Рост моделировался хорошо известным стохастическим уравнением КПЖ (1.2), (1.3). Турбулентное поле скорости моделировалось ансамблем “быстрых изменений” Крейчнана (1.5).

Задача в целом может быть сформулирована как мультипликативно перенормируемая модель с функционалом действия (2.4). Используя теоретико-полеую РГ, мы показали, что в зависимости от отношения между критическим индексом ξ и пространственной размерностью d система демонстрирует различные типы ИК-поведения, связанного с четырьмя возможными фиксированными точками уравнений РГ. В дополнение к известным режимам (обыкновенная диффузия, обыкновенный процесс роста и пассивное адвективное скалярное поле) установлено существование нового неравновесного класса универсальности.

Практические вычисления координат фиксированных точек, их областей устойчивости и критических размерностей были выполнены в первом порядке двойного разложения по ξ и $\varepsilon = 2 - d$ (однопетлевое приближение). Было показано, что для несжимаемой жидкости наиболее реалистичные значения ξ и d относятся к классу универсальности пассивного скалярного поля, в котором нелинейность модели КПЖ не существенна. Если степень сжимаемости α становится достаточно большой, то происходит смена типа ИК-поведения, и значения d и ξ попадают в область устойчивости нового режима.

Тем не менее некоторые вопросы остаются без ответа. В новом классе универсальности (как и для модели КПЖ) координаты фиксированной точки лежат в нефизичной области $g_* < 0$, которая отвечает “неправильному” отрицательному знаку амплитуды парного коррелятора (1.3). Таким образом, данный класс универсальности требует аккуратной физической интерпретации. В этой связи можно вспомнить, что в формализме Дои–Пелити [43], [44], где исходная микроскопическая задача формулируется в терминах операторов рождения и уничтожения, члены, квадратичные по полям отклика, могут появляться в функционалах действия с отрицательными знаками [44].

Другой вопрос – судьба сильно взаимодействующей фиксированной точки чистой модели КПЖ [24]. Если она действительно существует, то определенно сохраняется в нашей задаче (в ситуации $w_* = 0$), но может стать неустойчивой. С другой стороны, могут возникать непертурбативные фиксированные точки с $w_* \neq 0$.

В нашем анализе мы использовали простейший ансамбль Крейчнана для адвективного поля скорости. Было бы интересно рассмотреть более реалистичные модели: негауссовы, с конечным временем корреляции, анизотропией и т. п. Эта работа ведется в настоящий момент.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление перенормировочных констант

В этом приложении мы кратко излагаем вывод полученных результатов для перенормировочных констант (3.10) в первом порядке. Хотя однопетлевое вычисление достаточно простое и может быть проведено различными способами, его стоит обсудить для полноты изложения и для того, чтобы продемонстрировать некоторые интересные тонкости, специфические для рассматриваемой модели (2.4).

Перенормировочные константы определяются требованием, чтобы функции Грина перенормированной модели (3.6), выраженные в перенормированных переменных, были УФ-конечны (в нашем случае были конечны при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$). Полный набор констант Z_1 , Z_2 , Z_3 можно найти из трех 1-неприводимых функций $\langle h'h \rangle_{1\text{-непр}}$, $\langle h'h'h \rangle_{1\text{-непр}}$ и $\langle h'hh \rangle_{1\text{-непр}}$. В перенормированной модели соответствующие однопетлевые приближения имеют вид

$$\langle h'h \rangle_{1\text{-непр}} = i\eta - \kappa p^2 Z_2 + \text{diagram1} + \text{diagram2}, \quad (\text{П.1})$$

$$\langle h'h' \rangle_{1\text{-непр}} = DZ_1 + \frac{1}{2} = \text{diagram3} + \text{diagram4} \quad (\text{П.2})$$

и

$$\begin{aligned} \langle h'hh \rangle_{1\text{-непр}} = & \text{diagram5} + \text{diagram6} + \text{diagram7} + \\ & \text{diagram8} + \text{diagram9} + \text{diagram10}. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Здесь мы обозначили затравочный пропагатор $\langle hh \rangle_0$ прямой линией, $\langle hh' \rangle_0$ – прямой линией со штрихом, отвечающим полю h' , и пропагатор скорости – волнистой линией. В дальнейшем мы полагаем внешнюю частоту η равной нулю, так как расходящаяся часть функции $\langle h'h \rangle_{1\text{-непр}}$ пропорциональна p^2 , где p – внешний импульс.

Все диаграммные элементы нужно выразить в перенормированных переменных, используя соотношения (3.6)–(3.9). В однопетлевом приближении константы Z_i в затравочных членах (П.1)–(П.3) должны быть взяты в первом порядке по g и w , тогда как в однопетлевых вкладах их нужно просто заменить на единицы, $Z_i \rightarrow 1$. Таким образом, переход к перенормированным переменным в однопетлевых диаграммах достигается за счет простой замены $\kappa_0 \rightarrow \kappa$, $g_0 \rightarrow g\mu^\varepsilon$ и $w_0 \rightarrow w\mu^\xi$.

ИК-регуляризация в диаграммах, включающая пропагатор скорости, обеспечивается обрезанием в интеграле (1.5) при $k = m$. В остальных диаграммах она обеспечивается внешними импульсами и частотами. Нас интересуют, однако, только УФ-расходящиеся части этих диаграмм (полюсы по ε и ξ). Поэтому мы используем следующий прием, упрощающий вычисления: интегрирование по импульсам во всех диаграммах обрезается снизу на значении $k = m$. Тогда в логарифмически расходящихся функциях (П.2) и (П.3) внешние импульсы и частоты можно приравнять нулю, а в квадратично расходящейся функции (П.1) мы будем удерживать только член порядка p^2 в разложении по внешнему импульсу p .

Теперь легко провести интегрирование по частоте. Возникающие в результате интегралы по импульсам с помощью формул

$$\int d\mathbf{k} k_i f(k) = 0, \quad \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_s}{k^2} f(k) = \frac{\delta_{is}}{d} \int d\mathbf{k} f(k), \quad (\text{П.4})$$

где $f(k)$ – произвольная функция, зависящая только от $k = |\mathbf{k}|$, сводятся к скалярному интегралу

$$J(m) = \int_{k>m} d\mathbf{k} \frac{1}{k^{d+y}} = S_d \frac{m^{-y}}{y}, \quad (\text{П.5})$$

где $S_d = 2\pi^d/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности единичной сферы в пространстве размерности d и $y = \varepsilon$ либо $y = \xi$.

Последние две диаграммы в (П.3) на самом деле исчезают и, таким образом, не дают вклада в перенормировочную константу. Действительно, они содержат замкнутые циклы запаздывающих пропагаторов; при этом принципиальное значение

имеет тот факт, что коррелятор скорости содержит дельта-функцию по времени. Простое вычисление показывает, что первые три диаграммы в (П.3) также не дают вклада в Z_3 , так как их расходящиеся части взаимно сокращают друг друга. Это следствие галилеевой симметрии (3.4) исходной модели КПЖ, которая запрещает появление контрчленов типа $h'(\partial h)^2$ во всех порядках теории возмущений.

Аналитическое выражение для оставшейся диаграммы в (П.3) выглядит следующим образом:

$$p_i p_j \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{\omega^2 + \varkappa^2 k^4} \frac{w \varkappa \mu^\xi}{k^{d+\xi}} \{P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k})\}. \quad (\text{П.6})$$

Здесь множитель перед интегралом возникает из двух нижних вершин, первый множитель в интеграле – из верхней вершины (в числителе) и пропагаторов $\langle h'h \rangle_0$ (в знаменателе), последний сомножитель – коррелятор скорости. Выполнив вычисление, как описано выше, мы окончательно получаем для (П.3) выражение

$$\langle h'h h \rangle_{1\text{-непр}} = p^2 \left\{ Z_3 + \frac{\hat{w}}{\xi} \left(\frac{\mu}{m} \right)^\xi \frac{d-1+\alpha}{2d} \right\}. \quad (\text{П.7})$$

Множитель $(\mu/m)^\xi$ УФ-конечен: он стремится к единице при $\xi \rightarrow 0$. Мы можем видеть, что для устранения полюса по ξ в (П.7) перенормировочную константу Z_3 действительно можно выбрать в виде, заданном в (3.10).

Теперь обратимся к перенормировочной константе Z_2 . Первая из двух диаграмм в (П.1) оказывается УФ-конечной и не дает вклада в Z_2 . Чтобы в этом убедиться, можно рассмотреть следующее аналитическое выражение (с точностью до несущественных амплитудных множителей):

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{k_i(p+k)_i k_j p_j}{\omega^2 + \varkappa^2 k^4} \frac{1}{-i\omega + \varkappa|\mathbf{k} + \mathbf{p}|^2} \propto \\ & \propto \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{k_i(p+k)_i k_j p_j}{k^2(k^2 + |\mathbf{k} + \mathbf{p}|^2)}. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Нас интересует член типа p^2 в разложении по p . Он оказывается равным сумме двух одинаковых интегралов с противоположными знаками. Действительно, первый из этих интегралов возникает от вклада $p_i p_j k_i k_j$ в числителе; тогда в знаменателе мы можем положить $\mathbf{p} = 0$. Возникающее подынтегральное выражение становится равным $p_i p_j k_i k_j / 2k^4$. Второй интеграл возникает от вклада $k_i k_i k_j p_j$. Тогда нужно разлагать знаменатель до членов порядка $\mathcal{O}(\mathbf{p})$:

$$\int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{k_j p_j}{k^2 + |\mathbf{k} + \mathbf{p}|^2} \simeq \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{k_j p_j}{2k^2} \left\{ 1 - \frac{(\mathbf{p}\mathbf{k})}{k^2} \right\}. \quad (\text{П.9})$$

Первое слагаемое в правой части (П.9) исчезает ввиду нечетности подынтегральной функции по $\mathbf{k}$, а второе равно интегралу, вычисленному выше, но с другим знаком.

Аналитическое выражение для второй диаграммы в (П.1) следующее:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \int_{k>m} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{i p_i i(p+k)_j}{k^{d+\xi}} \frac{w \varkappa \mu^\xi}{-i\omega + \varkappa|\mathbf{k} + \mathbf{p}|^2} \frac{P_{ij}(\mathbf{k}) + \alpha Q_{ij}(\mathbf{k})}{k^{d+\xi}}. \quad (\text{П.10})$$

Интегрирование по ω содержит неопределенность:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{-i\omega + \varkappa|\mathbf{k} + \mathbf{p}|^2} = \theta(0), \quad (\text{П.11})$$

Рис. 5. Однопетлевой вклад в функцию $\langle h'v \rangle_{1\text{-непр}}$.

где $\theta(0)$ – функция Хевисайда в нуле. Она отражает детали статистики поля скорости, потерянные в пределе белого шума (см. обсуждение в работе [37]). В нашем случае дельта-функцию в (1.5) следует понимать как предел некоторой “узкой” функции, которая обязательно симметрична по t, t' , так как мы имеем дело с парным коррелятором. Таким образом, неопределенность в (П.11) должна быть недвусмысленно разрешена как сумма пределов: $\theta(0) = 1/2$. Подынтегральная функция возникающего в итоге интеграла по $\mathbf{k}$ в (П.10) имеет нечетную часть, которую можно отбросить, и четную, которая дает

$$\langle h'h \rangle_{1\text{-непр}} = -\kappa p^2 \left\{ Z_2 + \frac{\hat{w}}{\xi} \left(\frac{\mu}{m} \right)^\xi \frac{d-1+\alpha}{2d} \right\}. \quad (\text{П.12})$$

Мы видим, что Z_2 можно выбрать в виде (3.10); в однопетлевом приближении получается $Z_2 = Z_3$.

Мы не будем детально обсуждать вычисление Z_1 : первая диаграмма сводится к скалярному интегралу (П.5) с $y = \varepsilon$ сразу после интегрирования по частоте. Аналитическое выражение для второй диаграммы аналогично (П.6) с точностью до замены $p_i p_j \rightarrow k_i k_j$, так что выживает только вклад от продольного проектора. Это приводит к замене $(d-1+\alpha)/2d \rightarrow \alpha$.

Собирая все вклады вместе и учитывая симметричный коэффициент $1/2$ для первой диаграммы, получаем

$$\langle h'h' \rangle_{1\text{-непр}} = D \left\{ Z_1 + \frac{1}{8} \frac{\hat{g}}{\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m} \right)^\varepsilon + \alpha \frac{\hat{w}}{2\xi} \left(\frac{\mu}{m} \right)^\xi \right\}. \quad (\text{П.13})$$

Мы видим, что константу Z_1 , удаляющую полюсы из выражения (П.13), можно взять из (3.10).

Остается только обсудить возможные УФ-расходимости в функции $\langle h'v \rangle_{1\text{-непр}}$ с контрчленом $h' \partial_i v_i$. Единственная однопетлевая диаграмма для этой функции показана на рис. 5. Несложно убедиться в том, что соответствующее аналитическое выражение почти идентично тому, которое получилось для первой диаграммы в функции (П.1): последняя отличается только дополнительным множителем p_j . Тем самым обсуждаемая диаграмма также УФ-конечна и не вызывает появления соответствующего контрчлена.

Благодарности. Авторы выражают признательность Л. Ц. Аджемяну за полезные обсуждения. Авторы также благодарны Санкт-Петербургскому государственному университету за финансовую поддержку в рамках исследовательского гранта 11.38.185.2014.

Список литературы

- [1] J. Krug, H. Spohn, “Kinetic roughening of growing surfaces”, *Solids Far From Equilibrium: Growth, Morphology, and Defects*, ed. C. Godrche, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 479–582.
- [2] T. Halpin-Healy, Y.-C. Zhang, *Phys. Rep.*, **254**:4 (1995), 215–414.

- [3] A.-L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [4] J. Krug, *Adv. Phys.*, **46**:2 (1997), 139–282.
- [5] M. Lässig, *J. Phys.: Cond. Matter*, **10**:44 (1998), 9905–9950, arXiv:cond-mat/9806330.
- [6] M. Eden, “A Two-dimensional growth process”, *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, v.4: *Contributions to Biology and Problems of Medicine*, ed. J. Neyman, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1961, 223–239.
- [7] S. F. Edwards, D. R. Wilkinson, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **381**:1780 (1982), 17–31.
- [8] J. M. Kim, J. M. Kosterlitz, T. Ala-Nissila, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**:23 (1991), 5569–5586.
- [9] M. D. Penrose, *J. Stat. Phys.*, **131**:2 (2008), 247–268.
- [10] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [11] А. Н. Васильев, *Квантовополовая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамики*, ПИЯФ, СПб., 1998.
- [12] M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, **56**:9 (1986), 889–92.
- [13] D. Forster, D. R. Nelson, M. J. Stephen, *Phys. Rev. A*, **16**:2 (1977), 732–749.
- [14] M. Kardar, Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, **58**:20 (1987), 2087–2090; J. P. Bouchaud, M. Mézard, G. Parisi, *Phys. Rev. E*, **52**:4 (1995), 3656–3674, arXiv:cond-mat/9503144; E. Frey, U. C. Täuber, T. Hwa, *Phys. Rev. E*, **53**:5 (1996), 4424–4438, arXiv:cond-mat/9601049.
- [15] T. Goldman, D. Hochberg, R. Laflamme, J. Pérez-Mercader, *Phys. Lett. A*, **222**:3 (1996), 177–181; J. F. Barbero, A. Domínguez, T. Goldman, J. Pérez-Mercader, *Europhys. Lett.*, **38**:8 (1997), 637–642; T. Buchert, A. Domínguez, J. Pérez-Mercader, *Astron. Astrophys.*, **349**:2 (1999), 343–353; J. Gaite, A. Domínguez, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**:25 (2007), 6849–6857.
- [16] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. A*, **39**:6 (1989), 3053–3075; C.-H. Lam, L. M. Sander, D. E. Wolf, *Phys. Rev. A*, **46**:10 (1992), R6128–R6131.
- [17] J. P. Doherty, M. A. Moore, J. M. Kim, A. J. Bray, *Phys. Rev. Lett.*, **72**:13 (1994), 2041–2044; M. Kardar, A. Zee, *Nucl. Phys. B*, **464**:3 (1996), 449–462, arXiv:cond-mat/9507112; Л. В. Борк, С. Л. Огарков, *ТМФ*, **178**:3 (2014), 416–432.
- [18] С. И. Павлик, *ЖЭТФ*, **106**:2 (1994), 553–559; Н. В. Антонов, Ал. Н. Васильев, *ЖЭТФ*, **108**:3 (1995), 885–893.
- [19] H. Jeong, B. Kahng, D. Kim, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:25 (1996), 5094–5097, arXiv:cond-mat/9606205; H.-J. Kim, I.-M. Kim, J. M. Kim, *Phys. Rev. E*, **58**:1 (1998), 1144–1147.
- [20] T. Hwa, M. Kardar, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:16 (1989), 1813–1816; *Phys. Rev. A*, **45**:10 (1992), 7002–7023; B. Tadić, *Phys. Rev. E*, **58**:1 (1998), 168–173, arXiv:cond-mat/9912248.
- [21] E. Frey, U. C. Täuber, *Phys. Rev. E*, **50**:2 (1994), 1024–1045, arXiv:cond-mat/9406068.
- [22] M. Lässig, *Nucl. Phys. B*, **448**:3 (1995), 559–574, arXiv:cond-mat/9501094; K. J. Wiese, *J. Stat. Phys.*, **93**:1–2 (1998), 143–154, arXiv:cond-mat/9802068.
- [23] M. Lässig, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:11 (1998), 2366–2369, arXiv:cond-mat/9711037.
- [24] L. Canet, H. Chaté, B. Delamotte, N. Wschebor, *Phys. Rev. Lett.*, **104**:15 (2010), 150601, 4 pp., arXiv:0905.1025.
- [25] T. Kloss, L. Canet, N. Wschebor, *Phys. Rev. E*, **86**:5 (2012), 051124, 19 pp., arXiv:1209.4650.
- [26] M. Lässig, H. Kinzelbach, *Phys. Rev. Lett.*, **78**:5 (1997), 903–906.
- [27] M. Hairer, *Ann. Math.*, **178**:2 (2013), 559–664.
- [28] Д. Ю. Иванов, *Критическое поведение неидеализированных систем*, Физматлит, М., 2013.

- [29] В. В. Прудников, П. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *Теоретико-полевые и численные методы описания критических явлений в структурно неупорядоченных системах*, Омский ГУ, Омск, 2012.
- [30] G. Satten, D. Ronis, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:1 (1985), 91–94; *Phys. Rev. A*, **33**:5 (1986), 3415–3432.
- [31] A. Onuki, K. Kawasaki, *Progr. Theoret. Phys.*, **63**:1 (1980), 122–139; A. Onukiand, K. Yamasaki, K. Kawasaki, *Ann. Phys.*, **131**:1 (1981), 217–242; T. Imaeda, A. Onuki, K. Kawasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **71**:1 (1984), 16–26.
- [32] D. Beysens, M. Gbadamassi, L. Boyer, *Phys. Rev. Lett.*, **43**:17 (1979), 1253–1256; D. Beysens, M. Gbadamassi, *J. Physique Lett.*, **40**:21 (1979), 565–567.
- [33] R. Ruiz, D. R. Nelson, *Phys. Rev. A*, **23**:6 (1981), 3224–3246; **24**:5 (1981), 2727–2734; A. Aronovitz, D. R. Nelson, *Phys. Rev. A*, **29**:44 (1984), 2012.
- [34] N. V. Antonov, M. Hnatich, J. Honkonen, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:25 (2006), 7867–7887, arXiv:cond-mat/0604434.
- [35] N. V. Antonov, A. A. Ignatieva, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:44 (2006), 13593–13620, arXiv:cond-mat/0607019.
- [36] N. V. Antonov, V. I. Iglovikov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:13 (2009), 135001, arXiv:0808.0076; N. V. Antonov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:40 (2010), 405001; Н. В. Антонов, А. С. Капустин, А. В. Мальшев, *ТМФ*, **169**:1 (2011), 124–136.
- [37] G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola, *Rev. Modern Phys.*, **73**:4 (2001), 913–975, arXiv:cond-mat/0105199.
- [38] N. V. Antonov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:25 (2006), 7825–7865.
- [39] Д. Ю. Волченков, М. Ю. Налимов, *ТМФ*, **106**:3 (1996), 375–389.
- [40] N. V. Antonov, M. M. Kostenko, *Phys. Rev. E*, **90**:6 (2014), 063016, 21 pp., arXiv:1410.1262.
- [41] P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose, *Phys. Rev. A*, **8**:1 (1973), 423–437.
- [42] K. J. Wiese, *Phys. Rev. E*, **56**:5 (1997), 5013–5017, arXiv:cond-mat/9706009.
- [43] M. Doi, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **9**:9 (1976), 1479–1495; P. Grassberger, P. Scheunert, *Fortschr. Phys.*, **28**:10 (1980), 547–578; L. Peliti, *J. Phys. France*, **46**:9 (1984), 1469–1483.
- [44] U. C. Täuber, *Acta Physica Slovaca*, **52**:6 (2002), 505–513; “Scale invariance and dynamic phase transitions in diffusion-limited reactions”, *Advances in Solid State Physics*, **43**, ed. R. Haug, Springer, Berlin, 2003, 659–676; “Field-theory approaches to nonequilibrium dynamics”, *Ageing and the Glass Transition*, *Lecture Notes in Physics*, **716**, eds. M. Henkel, M. Pleimling, R. Sanctuary, Springer, Berlin, 2007, 295–348; “Field theoretic methods”, *Encyclopedia of Complexity and System Science*, ed. R. A. Meyers, Springer, New York, 2009, 3360–3374, arXiv:0707.0794.