Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, О кратности резонансов возмущенного периодического оператора Шредингера, *ТМФ*, 1998, том 116, номер 1, 134–145

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf893>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:19:44

© 1998 г.

Ю. П. Чубурин*

О КРАТНОСТИ РЕЗОНАНСОВ ВОЗМУЩЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Рассматривается возмущение периодического оператора Шредингера периодическим по переменным x_1, x_2 и экспоненциально убывающим при $|x_3| \rightarrow \infty$ потенциалом. Вблизи поверхности, определяемой нулями производной по третьей компоненте квазиимпульса собственного значения периодического оператора в ячейке, получены соотношения между кратностью резонанса и порядком полюса величин, характеризующих рассеяние. Амплитуда рассеяния вперед, как правило, обращается в нуль на данной поверхности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $V(x), W(x)$, где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, — вещественные ограниченные функции, причем $V(x)$ периодична по всем переменным с периодом единица, а $W(x)$ периодична по переменным x_1, x_2 с тем же периодом и удовлетворяет неравенству $|W(x)| \leq C \exp(-a|x_3|)$, $a > 0$. При разложении оператора Шредингера $H = -\Delta + V(x) + W(x)$ в прямом интеграле пространств

$$L^2(\Omega^* \times \Omega) = \int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega) dk_{\parallel},$$

где $\Omega = [0, 1)^2 \times \mathbf{R}$, $\Omega^* = [-\pi, \pi)^2$ (см. [1, 2]), возникает семейство операторов $H(k_{\parallel}) = \Delta + V(x) + W(x)$, определенных на (достаточно гладких) блоховских по переменным x_1, x_2 функциях из $L^2(\Omega)$; здесь $k_{\parallel} = (k_1, k_2) \in \Omega^*$ — (плоский) квазиимпульс. Блоховские по переменным x_1, x_2 функции — это сужения на Ω функций, определенных на $\mathbf{R}^3$ и удовлетворяющих равенствам

$$\psi(x + (n_{\parallel}, 0)) = \exp(i(k_{\parallel}, n_{\parallel}))\psi(x), \quad n_{\parallel} \in \mathbf{Z}^2.$$

*Физико-технический институт, Удмуртский научный центр, Уральское отделение РАН, Ижевск, Россия. E-mail: arg@otf.fti.udmurtia.su

Заметим, что операторы $H(k_{\parallel})$ являются операторами энергии электрона, например, в ситуациях кристаллической пленки ($V = 0$), поверхности (когда возмущение W обращает в нуль сумму $V + W$ на достаточно большом промежутке по переменной x_3 ; наличие второй, достаточно удаленной поверхности во многих вопросах несущественно), а также слоистой структуры (“сэндвича”).

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{H}(k) = -\Delta + V(x)$, определенные на блоховских по всем переменным функциях из $L^2(\Omega_0)$, где $\Omega_0 = [0, 1]^3$; здесь $k = (k_{\parallel}, k_3) \in \Omega_0^* = [-\pi, \pi]^3$. Спектр оператора $\tilde{H}(k)$ чисто дискретный [1]; его собственные значения будем обозначать, учитывая кратности, через $E_1(k) \leq \dots \leq E_n(k) \leq \dots$, а соответствующие собственные функции — через $\psi_n(x, k)$.

Собственные значения $E = E_n(k)$ и собственные функции $\psi = \psi_n(x, k)$ определяются уравнением

$$\psi = -(\tilde{H}_0(k) - E + E_0)^{-1}(V(x) - E_0)\psi,$$

где $\tilde{H}_0(k) = -\Delta$; оператор в правой части компактен и (при подходящем выборе E_0) аналитически зависит от k и E в комплексной окрестности рассматриваемой точки. Из доказательства аналитической теоремы Фредгольма [3] вытекает, что определяемые с помощью теоремы Вейерштрасса [4] функции $E = E_n(k)$ локально описывают множество в $\mathbf{C}^4$ вида $D(k, E) = 0$, где $D(k, E)$ — некоторая аналитическая функция (определитель), и являются корнями соответствующего полинома Вейерштрасса (см. [4]). Поэтому данные функции, а также функции $\psi_n(x, k)$ (см. доказательство аналитической теоремы Фредгольма) продолжаются по аргументу k в комплексные области из $\mathbf{C}^3$, что в дальнейшем будет использовано.

Без уменьшения общности предполагаем, что $E_n(k)$ и $\psi_n(x, k)$ аналитически (ψ_n как $L^2(\Omega_0)$ -значные функции) зависят от k_3 в окрестности рассматриваемой точки (это следует из регулярной теории возмущений [1]; при этом резольвенту оператора $\tilde{H}(k)$ необходимо с помощью “нулевой” резольвенты и резольвентного тождества аналитически продолжить по параметру k_3 в комплексную плоскость).

Спектр $\sigma(\tilde{H}(k_{\parallel}))$ операторов $\tilde{H}(k_{\parallel}) = -\Delta + V(x)$, действующих в $L^2(\Omega)$, имеет зонную структуру, т. е. представляет собой объединение промежутков — зон:

$$\sigma(\tilde{H}(k_{\parallel})) = \bigcup_{k_3 \in [-\pi, \pi]} \sigma(\tilde{H}(k)),$$

при этом существенный спектр $H(k_{\parallel})$ совпадает с $\tilde{H}(k_{\parallel})$ [5].

Предположим, что в некоторой точке $k_0 = (k_{\parallel}, k_3^{(0)}) \in \Omega_0^*$ для невырожденного собственного значения $E_0 = E_{n_0}(k_0)$ выполнены соотношения

$$\frac{\partial E_{n_0}(k_0)}{\partial k_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 E_{n_0}(k_0)}{\partial k_3^2} \neq 0, \quad (1)$$

причем $\partial E_n(\tilde{k})/\partial k_3 \neq 0$ для $n \neq n_0$ и $\tilde{k}$ таких, что $E_n(\tilde{k}) = E_0$. Значение E_0 , в частности, может быть границей зоны оператора $\tilde{H}(k_{\parallel})$. В силу невырожденности $E_{n_0}(k_0)$

и теоремы Хартогса [4] функция $E_{n_0}(k)$ аналитична по всем переменным в комплексной окрестности точки $k_0 \in \Omega_0^* \subseteq \mathbf{C}^3$. Соотношения (1) задают в данной окрестности комплексно-аналитическое многообразие, описываемое в комплексной окрестности точки $k_{\parallel}^{(0)}$ аналитической функцией $k_3 = k_3^{(0)}(k_{\parallel})$; данное многообразие обозначим через $\mathcal{V}_0$.

Для $E \in \mathbf{C}$, близких к E_0 , уравнение для $E_{n_0}(k)$, рассматриваемое относительно k_3 , имеет в силу (1) ровно два корня $k_{3,0}^{(1,2)}$ [5], которые сливаются при $E = E_0$. Через $k_{3,0}^{(1)} = k_{3,0}^{(1)}(k_{\parallel}, E)$ обозначим тот из них (ту ветвь аналитического множества), для которого при вещественных значениях величин E и $k_{3,0}^{(1)} \neq k_3^{(0)}$ выполнено неравенство $\partial E_{n_0}(k_{\parallel}, k_{3,0}^{(1)}) / \partial k_3 > 0$. В дальнейшем вместо величины E , как правило, используем $k_{3,0}^{(1)}$. Поскольку точка $(k_{\parallel}, k_{3,0}^{(1)})$ будет принадлежать (комплексной) окрестности $k_0 \in \Omega_0^*$, обозначим $k_3 = k_{3,0}^{(1)}$.

Рассмотрим в качестве примера случай кристаллической пленки $V = 0$. Выберем $E_{n_0}(k) = k^2$, тогда минимум данной функции достигается в точке $k_0 = (k_{\parallel}, 0)$, величина $k_3 = k_{3,0}^{(1)} = \sqrt{E - k_{\parallel}^2}$ является третьей компонентой импульса, а множество $\mathcal{V}_0 = \{k_3 = 0\}$ представляет собой границу $E = k_{\parallel}^2$ существенного спектра оператора $\tilde{H}_0(k_{\parallel})$ (см. [6, 7]).

Уравнение, описывающее как собственные значения (для $E \in \mathbf{R}$), так и резонансные уровни (для E на втором листе с $\text{Im } E < 0$), имеет вид (см. [5], а также [8, 9])

$$\psi(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(x, y, k_{\parallel}, E) W(y) \psi(y) dy, \quad (2)$$

где $\Gamma(x, y, k_{\parallel}, E) = \Gamma(x, y, k) -$ ядро резольвенты $(\tilde{H}(k_{\parallel}) - E)^{-1}$ оператора $\tilde{H}(k_{\parallel})$, вообще говоря, продолженное по параметру E в область существенного спектра или на второй лист. Из (1) и определения $k_3 = k_{3,0}^{(1)}$ вытекает, что изменению k_3 в окрестности точки $k_3^{(0)}$ отвечает изменение E на двулистной поверхности с точкой ветвления E_0 . Вследствие вида Γ (см. ниже) это формально обеспечивает возможность появления резонансов в окрестности E_0 . (По-видимому, это обстоятельство имеет отношение к имеющимся в физических статьях утверждениям об особенностях в рассеянии вблизи $\mathcal{V}_0$.) Предполагаем в дальнейшем, что $W \neq 0$. Решения ψ уравнения (2) экспоненциально возрастают [5], поэтому перейдем к “модифицированному” [1] уравнению

$$\phi(x) = - \int_{\Omega} \sqrt{|W(x)|} \Gamma(x, y, k) \sqrt{|W(y)|} \phi(y) dy, \quad (3)$$

где $\phi = \sqrt{|W|} \psi$, $\sqrt{|W|} = (\text{sign } W) \sqrt{|W|}$, которое будет рассматриваться в классе $L^2(\Omega)$. Из [5] в силу сформулированных выше условий для k из достаточно малой комплексной окрестности точки k_0 вытекает следующее равенство:

$$\Gamma(x, y, k) = - \frac{\psi_{n_0}(x, k) \overline{\psi_{n_0}(y, k)}}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}} + \Gamma_1(x, y, k), \quad (4)$$

где функция Γ_1 такова, что $L^2(\Omega \times \Omega)$ -значная функция

$$-\sqrt{|W(x)|}\Gamma_1(x, y, k)\sqrt{W(y)} \quad (5)$$

является аналитической функцией аргумента k . Следовательно, для $k_3 \neq k_3^{(0)}$ ядро оператора в правой части (3) принадлежит $L^2(\Omega \times \Omega)$ и аналитически зависит от k (в точках $k \in \mathcal{V}_0$ уравнение (3) не имеет смысла). Пусть $U \subset \mathbb{C}^3$ – достаточно малая комплексная окрестность точки k_0 . Множество точек $k \in U \setminus \mathcal{V}_0$, для которых существует ненулевое решение $\phi \in L^2(\Omega)$ уравнения (3), образует некоторое аналитическое множество, которое обозначим через $\mathcal{V}$ (см. доказательство аналитической теоремы Фредгольма в [3]). Точки множества $\mathcal{V}$ будем для краткости называть резонансами, хотя среди них могут оказаться и собственные значения, например в случае $V = 0$ и малого W – см. [10]. (Заметим, что в дальнейших рассуждениях вектор k_0 может быть и комплексным, при этом теряется геометрическая трактовка точки E_0 .) Обозначим через $K(k)$ интегральный оператор, определяемый правой частью равенства (3). Данный оператор в силу сказанного выше вне поверхности $\mathcal{V}_0$ является оператором Гильберта–Шмидта и аналитически зависит от k . Множество $\mathcal{V}$ совпадает с множеством нулей (регуляризованного) определителя Фредгольма $\det_2(1 - K(k))$ (см. теорему 1; ср. [9, приложение B]). Под (алгебраической) кратностью резонанса (или собственного значения) $k \in \mathcal{V}$ (ср. [9]) будем понимать порядок нуля функции $\det_2(1 - K(k))$ по переменной k_3 в точке $k \in \mathcal{V}$.

В данной работе, в частности, показано (при некотором предположении), что кратность резонанса совпадает с порядком полюса по переменной k_3 решения аналога уравнения Липмана–Швингера, а также с порядком полюса T -матрицы при совпадающих аргументах (амплитуды рассеяния вперед). Взаимосвязь данных величин исследуется также в “сингулярном” случае $k_0 \in \overline{\mathcal{V}} \cap \mathcal{V}_0$, где $\overline{\mathcal{V}}$ – замыкание $\mathcal{V}$ в $\mathbb{C}^3$, когда ядро оператора в правой части основного уравнения (3) согласно (4), (1) имеет полюс в точке $k_3^{(0)}$ (кратности резонанса здесь будет придан определенный смысл). Показано также, что амплитуда рассеяния вперед, “как правило”, обращается в нуль на множестве $\mathcal{V}_0$.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ КРАТНОСТИ РЕЗОНАНСА

Обозначим через $L(k)$ интегральный оператор с ядром (5). Всюду в дальнейшем будет предполагаться существование оператора $(1 - L(k_0))^{-1}$, а следовательно (см. аналитическую теорему Фредгольма в [3]), существование и аналитическая зависимость от k в некоторой комплексной окрестности U точки k_0 обратного оператора $(1 - L(k))^{-1}$. Данное условие, вообще говоря, совместимо с нахождением точек множества $\mathcal{V}$ в сколь угодно малой окрестности точки k_0 (см. случай малого W [3]). Кроме того, это предположение выполнено “в общем положении” в следующем смысле. При рассмотрении вместо функции $W(x)$ функции с параметром $\epsilon W(x)$ данный оператор, очевидно, существует для всех достаточно малых ϵ , а в силу аналитической теоремы Фредгольма он существует для всех ϵ , кроме, возможно, локально-конечного числа точек.

Положим

$$\alpha(k) = \left(\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} \right)^{-1} \left((1 - L(k))^{-1} (\sqrt{|W(x)|} \psi_{n_0}(x, k), \sqrt{W(x)} \psi_{n_0}(x, k)) \right), \quad (6)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Это аналитическая функция в области $U \setminus \mathcal{V}_0$ (считаем, что U достаточно мало).

ТЕОРЕМА 1. *В некоторой комплексной окрестности U точки k_0 имеет место соотношение*

$$\mathcal{V} = \{k \in U \setminus \mathcal{V}_0 : \alpha(k) - 1 = 0\} = \{k \in U \setminus \mathcal{V}_0 : \det_2(1 - K(k)) = 0\}.$$

При этом кратность резонансов совпадает с кратностью нулей функции $\alpha(k) - 1$ по переменной k_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале, что в окрестности любой точки из $U \setminus \mathcal{V}_0$ имеет место равенство $\det_2(1 - K(k)) = a(k)(\alpha(k) - 1)$, где $a(k)$ – некоторая аналитическая функция, не обращающаяся в нуль. Имеем

$$1 - K(k) = (1 - (K(k) - L(k))(1 - L(k))^{-1})(1 - L(k)). \quad (7)$$

Из доказательства аналитической теоремы Фредгольма легко усмотреть, что $(1 - L(k))^{-1} = 1 - N(k)$, где $N(k)$ – операторнозначная функция с ядром из $L^2(\Omega \times \Omega)$. В соответствии с работой [11] из равенства $1 = (1 - L(k))(1 - N(k))$ вытекает соотношение

$$\exp(\operatorname{tr}(L(k)N(k))) = \det_2(1 - L(k)) \det_2(1 - N(k)), \quad (8)$$

откуда следует, что $\det_2(1 - L(k)) \neq 0$ в окрестности точки k_0 . Заметим, что $\det_2(1 - L(k))$ аналитически зависит от k . Это вытекает из теоремы Вейерштрасса о приближении с использованием свойств (регуляризованных) определителей Фредгольма [11] при равномерной по k из компактов аппроксимации ядра оператора $L(k)$ вырожденными ядрами, аналитически зависящими от k . Далее, по (4) оператор $(K(k) - L(k))(1 - L(k))^{-1}$ одномерный и имеет вид

$$\frac{\sqrt{|W(x)|} \psi_{n_0}(x, k)}{\frac{i \partial E_{n_0}}{\partial k_3}} \left(\cdot, ((1 - L(k))^{-1})^* \sqrt{W(y)} \psi_{n_0}(y, k) \right). \quad (9)$$

Следовательно, определитель оператора $1 - (K(k) - L(k))(1 - L(k))^{-1}$ с точностью до множителя, не обращающегося в нуль и аналитически зависящего от k , равен (см. [11])

$$1 - \frac{((1 - L(k))^{-1} (\sqrt{|W(x)|} \psi_{n_0}(x, k), \sqrt{W(x)} \psi_{n_0}(x, k))}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}} = 1 - \alpha(k).$$

Требуемое утверждение вытекает в случае использования полученного равенства и сказанного выше из равенства (7) и свойства “обобщенной мультипликативности” определителей [11].

Подобными же рассуждениями можно доказать, что в аналитической теореме Фредгольма [3] (конечный) определитель, нули которого совпадают с точками, в которых $\dim \ker(1 - K(k)) \neq \{0\}$, также с точностью до аналитически зависящего от k ненулевого множителя совпадает с $\det_2(1 - K(k))$. Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Геометрическая кратность резонансов (собственных значений), т.е. $\dim \ker(1 - K(k))$, в точках $k \notin \mathcal{V}_0$ из некоторой окрестности точки k_0 равна единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Из (7), (9) вытекает, что если $\phi \in \ker(1 - K(k))$, то для $\xi = (1 - L(k))\phi$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \frac{\sqrt{|W(x)|}\psi_{n_0}(x, k)}{\frac{i\partial E_{n_0}}{\partial k_3}}((1 - L(k))^{-1}\xi(x), \sqrt{W(x)}\psi_{n_0}(x, k)) = \\ &= C\sqrt{|W(x)|}\psi_{n_0}(x, k), \end{aligned}$$

где $C = \text{const}$. Отсюда $\phi = C(1 - L(k))^{-1}(\sqrt{|W(x)|}\psi_{n_0}(x, k))$, что и доказывает утверждение.

В дальнейшем будем предполагать, что $1 - \alpha(k) \neq 0$ по переменной k_3 . Это неравенство имеет место, например, в случае, если E_0 — граница зоны. Действительно, равенство $1 - \alpha(k) = 0$ описывает, в частности, собственные значения, лежащие вне зоны, которые не могут заполнить ненулевой интервал (см. во введении утверждение о существенном спектре). В соответствии с теоремой Вейерштрасса о делении [4] в окрестности точки $\tilde{k} \in \mathcal{V}$ имеем представление

$$1 - \alpha(k) = a_0(k)(k_3 - k_3^{(1)}(k_{\parallel}))^{p_1} \dots (k_3 - k_3^{(N)}(k_{\parallel}))^{p_N},$$

где $a_0(k)$ — некоторая не обращающаяся в нуль аналитическая функция; функции $k_3^{(j)}(k_{\parallel})$ могут попарно совпадать или терять аналитичность лишь на множествах нулевой меры; $p_j \geq 0$ — целые числа, причем $k_3^{(1)}(\tilde{k}_{\parallel}) = \dots = k_3^{(N)}(\tilde{k}_{\parallel}) = \tilde{k}_3$, а число

$$\nu = \sum_{j=1}^N p_j$$

есть кратность резонанса в точке $\tilde{k}$. Таким образом, в случае $N > 1$ происходит ветвление резонансных уровней, а неравенства $p_j > 1$ означают их слияние.

3. КРАТНОСТЬ РЕЗОНАНСОВ И ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ

Обозначим через $\xi = \xi(x, k)$ решение уравнения

$$(1 - K(k))\xi = \xi_0, \quad (10)$$

где $\xi_0 = \xi_0(x, k) = \sqrt{|W(x)|}\psi_{n_0}(x, k)$. Это уравнение представляет собой аналог (модифицированного) уравнения Липпмана–Швингера [12] (в данном случае “на препятствии” рассеивается, вообще говоря, не плоская, а блоховская волна; случай $V = 0$ см. в

[7]). Положим $T(k, k') = (\xi(x, k'), \sqrt{W(x)}\psi_{n_0}(x, k))$, это аналог T -матрицы [12]. Функция $a(k) = T(k, k)$ представляет собой аналог амплитуды рассеяния вперед.

Обозначим через $\kappa(f(\cdot))(k)$ порядок полюса по переменной k_3 мероморфной функции $f(\cdot)$ в точке k ($k_{\parallel}$ фиксировано). Ясно, что

$$\kappa((1 - K(\cdot))^{-1})(k) \geq \kappa(\xi(x, \cdot))(k) \geq \kappa(a(\cdot))(k). \quad (11)$$

В общем случае имеется очень немного соотношений, связывающих между собой величины, входящие в неравенства (11), а также кратность резонансов (см. [9], а по поводу контрпримеров – теоремы 2, 4 ниже). Согласно аналитической теореме Фредгольма функция $(1 - K(k))^{-1}$ имеет полюс по переменной k_3 в точке $k \in U \setminus \mathcal{V}_0$ в том и только в том случае, если $k \in \mathcal{V}$. Кратность резонанса в точке k обозначим через $\nu(k)$.

Пусть $k_1 = (k_{\parallel}, k_3^{(1)}) \in \mathcal{V}$, $a(k) \not\equiv 0$ по переменной k_3 . Имеем в окрестности $k_3^{(1)}$ соотношение

$$a(k) = (k_3 - k_3^{(1)})^n \omega(k), \quad (12)$$

где $\omega(k)$ – некоторая аналитическая функция аргумента k_3 такая, что $\omega(k_1) \neq 0$, $n \in \mathbf{Z}$; число n в этом случае определяется однозначно. В случае $a(k) \equiv 0$ выбираем $n \geq 2$.

ЛЕММА 1. *Справедливо неравенство $n \leq -1$, при этом $-n = \kappa(a(\cdot))(k_1) = \nu(k_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем функцию $\alpha(k)$, для чего положим

$$\begin{aligned} \mu(x, k) &= (1 - L(k))^{-1}(\sqrt{|W(x)|}\psi_{n_0}(x, k)) = \\ &= (1 - L(k))^{-1}\xi_0(x, k). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя (4), получаем

$$\mu(x, k) = \left(1 - \frac{(\mu(x, k), \sqrt{W(x)}\psi_{n_0}(x, k))}{\frac{i\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}\right)\xi_0(x, k) + K(k)\mu(x, k).$$

Отсюда и вследствие (10) имеем равенство

$$\mu = A\xi, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{(\mu(x, k), \sqrt{W(x)}\psi_{n_0}(x, k))}{\frac{i\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}} = \\ &= 1 - \frac{A(\xi(x, k), \sqrt{W(x)}\psi_{n_0}(x, k))}{\frac{i\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}} = 1 - \frac{Aa(k)}{\frac{i\partial E_{n_0}}{\partial k_3}}, \end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} + a(k)}. \quad (15)$$

Вследствие (6), (13), (14) и (15) получаем

$$\alpha(k) = \frac{a(k)}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} + a(k)}. \quad (16)$$

Следовательно, уравнение $\alpha(k) - 1 = 0$, определяющее множество $\mathcal{V}$, можно записать в виде

$$-\frac{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} + a(k)} = 0 \quad (17)$$

или с использованием (12)

$$-\frac{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} + (k_3 - k_3^{(1)})^n \omega(k)} = 0. \quad (18)$$

Ясно, что в случае $k \notin \mathcal{V}_0$ и $n \geq 0$ равенство не может иметь места. Для $n < 0$ положим $m = -n$, тогда уравнение (18) примет вид

$$-\frac{i(k_3 - k_3^{(1)})^m \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}{i(k_3 - k_3^{(1)})^m \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} + \omega(k)} = 0,$$

причем $\omega(k_1) \neq 0$. Кратность нуля по переменной k_3 в точке $k_3^{(1)}$ левой части данного равенства совпадает с $m = -n$ — порядком полюса $a(k)$ в точке $k_3^{(1)}$, а в силу теоремы 1 она равна кратности $\nu(k_1)$ резонанса. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. В условиях леммы 1 справедливо равенство $\kappa(\xi(x, \cdot))(k_1) = \kappa(a(\cdot))(k_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (10), (4) находим

$$\xi(x, k) = \left(1 + \frac{a(k)}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}\right) \xi_0(x, k) + L(k) \xi(x, k),$$

откуда

$$\xi(x, k) = \left(1 + \frac{a(k)}{\frac{i \partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}\right) (1 - L(k))^{-1} \xi_0(x, k). \quad (19)$$

Имеем разложение в ряд Тейлора

$$(1 - L(k))^{-1} (\xi_0(x, k)) = A_0(k_{\parallel}) + A_1(k_{\parallel})(k_3 - k_3^{(1)}) + \dots, \quad (20)$$

где $A_j(k_{\parallel}) \in L^2(\Omega)$ ($j = 0, 1, \dots$), причем $A_0(k_{\parallel}) \neq 0$ (в противном случае, применяя к равенству (20) оператор $1 - L(k)$ и подставляя $k_3 = k_3^{(1)}$, приходим к противоречию). Разлагая в формуле (19) функцию $a(k)$ в ряд Лорана, функцию $(\partial E_{n_0}(k)/\partial k_3)^{-1}$ в ряд Тейлора по степеням $k_3 - k_3^{(1)}$ и используя (20), получаем требуемый результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \in \mathcal{V}$. Имеют место равенства

$$\nu(k) = \kappa(a(\cdot))(k) = \kappa((1 - K(\cdot))^{-1})(k) = \kappa(\xi(x, \cdot))(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие лемм 1, 2 и неравенств (11) имеем

$$\nu(k) = \kappa(a(\cdot))(k) = \kappa(\xi(x, \cdot))(k) \leq \kappa((1 - K(k))^{-1})(k).$$

С другой стороны, $\kappa((1 - K(\cdot))^{-1})(k) \leq \nu(k)$, это вытекает из теоремы 1 (см. конец ее доказательства) и доказательств аналитической и мероморфной теорем Фредгольма [3, 1]. Приведенные соотношения доказывают теорему.

Положим

$$\beta(k) = i \left(\frac{\partial E_{n_0}}{\partial k_3} \right) \alpha(k) = \left((1 - L(k))^{-1} (\sqrt{|W(x)|} \psi_{n_0}(x, k), \sqrt{W(x)} \psi_{n_0}(x, k)) \right),$$

это аналитическая функция в окрестности точки k_0 . Введем обозначения $d(k) = \beta(k) - i \partial E_{n_0}(k) / \partial k_3$, $\tilde{\mathcal{V}} = \{k \in U : d(k) = 0\}$. Вследствие (6) и теоремы 1 получаем $\tilde{\mathcal{V}} \cap (U \setminus \mathcal{V}_0) = \mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{V}_0$ является комплексно-аналитическим многообразием коразмерности единица, то легко видеть, что справедливо равенство $d(k) = (k_3 - k_3^{(0)}(k_{\parallel}))^m d_0(k)$, где $m \geq 0$ – некоторое целое число, а функция $d_0(k)$ аналитична в окрестности k_0 и обладает тем свойством, что множества нулей неприводимых попарно различных множителей $d_0^{(i)}(k)$ ($i = 1, \dots, i_0$), в произведение которых (в соответствующих степенях) распадается $d_0(k)$ (см. [4]), в достаточно малой окрестности k_0 отличаются от $\mathcal{V}_0$.

На поверхности $\mathcal{V}_0$ понятие резонанса не определено. Под кратностью резонанса в точке k_0 будем понимать число ν_0 ветвей множества $\tilde{\mathcal{V}} \setminus \mathcal{V}_0$ без учета кратности, т.е. кратность нуля по переменной k_3 функции $d_0^{(1)}(k) \dots d_0^{(i_0)}(k)$ в точке $k_3^{(0)}$. Ясно, что ν_0 зависит только от множества $\mathcal{V}$ (см. [4]). Обозначим через n_0 кратность нуля функции $d(k)$ по переменной k_3 в точке $k_3^{(0)}$. Очевидно, что $\nu_0 \leq n_0$.

Будем отныне предполагать, что $k_0 \in \mathcal{V}_0$.

В силу мероморфности функции $a(k)$, как и выше, имеем $a(k) = (k_3 - k_3^{(0)})^n \omega(k)$, где $n \in \mathbf{Z}$, функция $\omega(k)$ аналитична по k_3 . Если $a(k) \neq 0$ по переменной k_3 , то $\omega(k_0) \neq 0$ и n определяется однозначно.

ЛЕММА 3. Если $n > 1$, то $n_0 = 1$; если $n \leq 0$, то $n_0 = -n + 2$. Если $n = 1$ и $k_0 \in \mathcal{V}_0 \cap \overline{\mathcal{V}}$, то $n_0 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1) имеем

$$E_{n_0}(k) = \left(\frac{\partial^2 E_{n_0}(k_0)}{\partial k_3^2} \right) (k_3 - k_3^{(0)}) + O((k_3 - k_3^{(0)})^2), \quad (21)$$

где $\partial^2 E_{n_0}(k_0)/\partial k_3^2 \neq 0$. Из доказательства леммы 1 и равенства (21) следует, что

$$\begin{aligned} d(k) &= i \left(\frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} \right) (\alpha(k) - 1) = \frac{\left(\frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} \right)^2}{i \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} + a(k)} = \\ &= \frac{\left(\frac{\partial^2 E_{n_0}(k_0)}{\partial k_3^2} \right)^2 \left(k_3 - k_3^{(0)} \right)^2 + O\left((k_3 - k_3^{(0)})^3 \right)}{i \left(\frac{\partial^2 E_{n_0}(k_0)}{\partial k_3^2} \right) (k_3 - k_3^{(0)}) + O\left((k_3 - k_3^{(0)})^2 \right) + (k_3 - k_3^{(0)})^n \omega(k)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают утверждения леммы для $n > 1$ и $n \leq 0$. Пусть теперь $n = 1$, тогда $\partial^2 E_{n_0}(k_0)/\partial k_3^2 + \omega(k_0) \neq 0$, поскольку в противном случае $d(k_0) \neq 0$, что противоречит соотношению $k_0 \in \mathcal{V}_0 \cap \tilde{\mathcal{V}}$. Отсюда следует, что $n_0 = 1$. Лемма доказана.

Функция $\beta(k)$ удовлетворяет одному и только одному из следующих условий:

условие А: $\beta(k_0) \neq 0$;

условие Б: $\beta(k_0) = 0$, $\frac{\partial \beta(k_0)}{\partial k_3} \neq 0$, $\frac{\partial \beta(k_0)}{\partial k_3} \neq i \frac{\partial^2 E_{n_0}(k_0)}{\partial k_3^2}$;

условие В: $\beta(k_0) = \frac{\partial \beta(k_0)}{\partial k_3} = 0$;

условие Г: $\beta(k_0) = 0$, $\frac{\partial \beta(k_0)}{\partial k_3} = i \frac{\partial^2 E_{n_0}(k_0)}{\partial k_3^2}$.

Заметим, что равенство $\beta(k_0) = 0$ эквивалентно $k_0 \in \tilde{\mathcal{V}}$. Далее, для ϵW вместо W , где $\epsilon \in \mathbf{R}$, если $(\psi_{n_0}(x, k_0), W(x)\psi_{n_0}(x, k_0)) \neq 0$, очевидно, что для всех достаточно малых ϵ $\beta(k_0) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3. В случае “А” функция $a(k)$ аналитична по совокупности переменных k в некоторой окрестности точки k_0 и обращается в нуль на множестве $\mathcal{V}_0$ и только на нем, при этом $k_0 \notin \tilde{\mathcal{V}}$. В случаях “Б” и “В” функция $a(k)$ аналитична по переменной k_3 в окрестности точки $k_3^{(0)}$, причем $a(k_0) = 0$. Порядок нуля по k_3 функции $a(k)$ в точке $k_3^{(0)}$ в случаях “А” и “Б” равен единице, а в случае “В” – порядку нуля в этой точке функции $\beta(k)$. Случай “Г” имеет место тогда и только тогда, когда функция $a(k)$ или аналитична по k_3 , причем $a(k_0) \neq 0$, или имеет полюс по k_3 в точке $k_3^{(0)}$; условие $\nu_0 \geq 2$ может быть выполнено лишь в этом случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем, пользуясь (16),

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{i\alpha(k) \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}{1 - \alpha(k)} = \frac{i\beta(k) \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}}{i \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} - \beta(k)} = \\ &= \frac{i \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} \left(\beta(k_0) + \frac{\partial \beta(k_0)}{\partial k_3} (k_3 - k_3^{(0)}) + O\left((k_3 - k_3^{(0)})^2 \right) \right)}{i \frac{\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3} - \beta(k_0) - \frac{\partial \beta(k_0)}{\partial k_3} (k_3 - k_3^{(0)}) + O\left((k_3 - k_3^{(0)})^2 \right)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Утверждения теоремы, относящиеся к аналитичности функции $a(k)$, ее обращению в нуль и порядку ее нуля в точке $k_3^{(0)}$, следуют непосредственно из соотношений (22), (21) и (1). Наконец, из $\nu_0 \geq 2$ следует, что $k_0 \in \mathcal{V}_0 \cap \overline{\mathcal{V}}$ и $n_0 \geq 2$, откуда в соответствии с леммой 3 $a(k_0) \neq 0$ или $a(k)$ имеет полюс в точке $k_3^{(0)}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что функция $a(k)$ аналитична в окрестности k_0 и $\partial\beta(k_0)/\partial k_3 \neq i\partial^2 E_{n_0}(k_0)/\partial k_3^2$. Тогда в некоторой окрестности k_0 нет точек из $\mathcal{V}$, и $a|_{\mathcal{V}_0} = 0$.*

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство $\kappa(\xi(x, \cdot))(k_0) = \kappa(a(\cdot))(k_0) + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 4 вытекает из (19) (оно аналогично доказательству леммы 2 с учетом (21) и (1)).

ЛЕММА 5. *Имеет место неравенство $\kappa(\xi(x, \cdot))(k_0) \leq \kappa(1 - K(\cdot))^{-1}(k_0) - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем разложение в ряд Лорана

$$(1 - K(k))^{-1} = \frac{K_{-\kappa_0}(k_{\parallel})}{(k_3 - k_3^{(0)})^{\kappa_0}} + \dots + \frac{K_{-1}(k_{\parallel})}{k_3 - k_3^{(0)}} + K_0(k), \quad (23)$$

где $K_{-j}(k_{\parallel})$, $j = 1, \dots, \kappa_0$, — некоторые ограниченные операторы, $\kappa_0 = \kappa(1 - K(\cdot))^{-1}(k_0)$, $K_0(k)$ — операторнозначная функция, аналитическая по переменной k_3 в окрестности точки $k_3^{(0)}$. Из (23) и (4) вытекает равенство

$$\begin{aligned} 1 &= (1 - K(k))^{-1}(1 - K(k)) = \\ &= \left(\frac{K_{-\kappa_0}(k_{\parallel})}{(k_3 - k_3^{(0)})^{\kappa_0}} + \dots + \frac{K_{-1}(k_{\parallel})}{k_3 - k_3^{(0)}} + K_0(k) \right) \times \\ &\quad \times \left(1 - L(k) - \frac{\xi_0(x, k)(\cdot, \sqrt{W(x)}\psi_{n_0}(x, k))}{\frac{i\partial E_{n_0}(k)}{\partial k_3}} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

в котором оператор $L(k)$ аналитически зависит от k_3 в окрестности точки $k_3^{(0)}$. Умножая равенство (24) после раскрытия скобок на $(k_3 - k_3^{(0)})^{\kappa_0+1}$ и переходя затем с помощью (21) и (1) к пределу при $k_3 \rightarrow k_3^{(0)}$, получаем операторное равенство

$$K_{-\kappa_0}(k_{\parallel})(\xi_0(x, k_0))(\cdot, \sqrt{W(x)}\psi_{n_0}(x, k)) = 0,$$

откуда следует, что $K_{-\kappa_0}(k_{\parallel})(\xi_0(x, k_0)) = 0$. Отсюда и из (23) вытекает, что в разложении функции $\xi(x, k) = (1 - K(k))^{-1}\xi_0(x, k)$ в ряд Лорана по степеням $k_3 - k_3^{(0)}$ порядок ее полюса не превышает $\kappa_0 - 1$. Лемма доказана.

Из лемм 3–5 вытекает следующее утверждение (если $a(k)$ аналитична по k_3 , но не равна нулю в точке $k_3^{(0)}$, то полагаем $\kappa(a(\cdot))(k_0) = 0$).

ТЕОРЕМА 4. *Имеют место соотношения*

$$\nu_0 \leq \kappa(a(\cdot))(k_0) + 2 = \kappa(\xi(x, \cdot))(k_0) + 1 \leq \kappa(1 - K(\cdot))^{-1}(k_0).$$

Список литературы

- [1] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [2] *E. B. Davies.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 1977. V. 82. P. 327.
- [3] *М. Рид, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [4] *Р. Ганнинг, Х. Росси.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
- [5] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 1997. Т. 110. № 3. С. 443.
- [6] *Ю. П. Чубурин.* О рассеянии на кристаллической пленке (спектр и асимптотика волновых функций уравнения Шредингера). Препринт. Свердловск: Физико-технический институт УНЦ АН СССР, 1985.
- [7] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 1987. Т. 72. № 1. С. 120.
- [8] *Т. М. Гатауллин, М. В. Карасев.* ТМФ. 1971. Т. 9. № 2. С. 252.
- [9] *С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [10] *Ю. П. Чубурин.* Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 138.
- [11] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
- [12] *Дж. Тейлор.* Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 20. II. 1998 г.