Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Коваленко, Дипольное описание pp-взаимодействия, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 465–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:24:41

© 2015 г.

В. Н. Коваленко*

ДИПОЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ pp -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Неупругие протон-протонные столкновения при высоких энергиях рассматриваются в поперечных пространственных координатах. Сталкивающиеся адроны представлены ансамблями цветных диполей. Для вероятности элементарного взаимодействия используются предписания дипольной каскадной модели Мюллера. Многопартонные столкновения учитываются в рамках эйконоального подхода. Рассмотрено два варианта модели, с учетом и без учета конфайнмента. Получена асимптотика профильной функции столкновения при больших прицельных параметрах. Рассматриваемый подход применен для нахождения наклона дифракционного конуса в упругом pp -рассеянии при высоких энергиях, произведено сравнение с другими моделями описания профильных функций и с экспериментальными данными.

Ключевые слова: квантовая хромодинамика, амплитуда рассеяния, дипольная модель, наклон дифракционного конуса.

DOI: 10.4213/tmf8930

1. ВВЕДЕНИЕ

Покоящийся адрон представляет собой достаточно сложный квантово-механический объект. Однако в системе отсчета, где адрон имеет большой импульс, становится возможным его описание на партонном уровне, поскольку даже малые виртуальные флуктуации получают значительную порцию энергии и становятся квазиреальными [1], [2]. С ростом энергии, а также при переходе от протон-протонного (pp) рассеяния к столкновениям тяжелых ионов становятся важными такие явления, как многопартонные столкновения, насыщение, перецепление цвета, перколяция, коллективные эффекты [3]–[7]. Исследование этих явлений является особенно актуальным в связи с тем, что в настоящее время на коллайдере LHC (CERN) проводятся эксперименты по столкновениям адронов и тяжелых ионов при сверхвысоких энергиях.

Удобным способом описания данных явлений служит использование поперечных пространственных координат [8]. При этом оказывается полезным применять дипольный подход. В частности, уравнение БФКЛ эволюции глюонной плотности в дипольной формулировке приобретает достаточно простую форму [9].

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: nvkinf@rambler.ru

Рис. 1. Диаграммы, показывающие испускание глюона (слева) и разделение диполя (справа).

В пределе большого количества цветов $N_c \rightarrow \infty$ испускание глюона эквивалентно разделению цветного диполя (см. рис. 1). При высоких энергиях в области малых x доминирует испускание глюонов [10], поэтому для многих задач достаточно ограничиться описанием только глюонной плотности. В частности, на этом основана модель конденсата цветного стекла (Color Glass Condensate) [11], [12].

В настоящей работе предлагается простая модель неупругого pp-рассеяния, основанная на взаимодействии цветных диполей в соответствии с предписаниями дипольно-каскадной модели Мюллера [13], [14]. В рамках данной модели рассчитываются профильные функции нуклон-нуклонного столкновения, и рассматриваемый подход применяется для определения наклона дифракционного конуса упругого pp-рассеяния.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Мы предполагаем, что при высоких энергиях протоны снаряда и мишени представляют собой ансамбли диполей, расположенных в поперечной плоскости. Для партонной плотности используется гауссово распределение

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\pi r_0^2} e^{-(x^2 + y^2)/r_0^2}, \quad (1)$$

где параметр r_0 связан с среднеквадратичным радиусом протона следующим образом: $r_0 = \sqrt{2/3} \sqrt{\langle r_N^2 \rangle}$ [15], [16].

Для вероятности элементарного диполь-дипольного взаимодействия используется дипольно-каскадная модель Мюллера [8], [13], [14], [17], [18], согласно которой амплитуда вероятности взаимодействия двух диполей с поперечными координатами $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ и $(\vec{r}_3, \vec{r}_4)$ дается формулой

$$f = \frac{\alpha_s^2}{8} \ln^2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_4)^2}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_4)^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2}, \quad (2)$$

где α_s – константа сильного взаимодействия.

В рамках приближения эйконала вероятность взаимодействия двух диполей имеет вид $p_{ij} = 1 - e^{-f_{ij}}$. Поскольку возможны множественные столкновения, полная вероятность столкновения имеет вид

$$p = 1 - e^{-\sum_{i,j} f_{ij}},$$

где суммирование ведется по всем диполям. Если усреднить это выражение по всем координатам диполей при фиксированном прицельном параметре $\vec{b} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$, то получится профильная функция pp-столкновения $\sigma(\vec{b})$, имеющая смысл вероятности взаимодействия двух протонов при прицельном параметре $\vec{b}$.

3. РАСЧЕТ АСИМПТОТИКИ ПРОФИЛЬНОЙ ФУНКЦИИ pp-СТОЛКНОВЕНИЙ

Найдем аналитически асимптотику функции $\sigma(b)$ при больших b для случая, когда со стороны протонов мишени и снаряда имеется только по одному диполю. Введем относительные координаты следующим образом:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \vec{\delta}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_A + \vec{\delta}_2, \quad \vec{r}_3 = \vec{r}_B + \vec{\delta}_3, \quad \vec{r}_4 = \vec{r}_B + \vec{\delta}_4.$$

Здесь $\vec{\delta}_j$ – координаты партонов относительно центров кварков. Таким образом, переменные $\vec{\delta}_j$ суть независимые случайные величины, имеющие распределение Гаусса с нулевым средним и дисперсией $\langle \vec{\delta}_j^2 \rangle = r_0^2$.

В соответствии с вышеизложенным профильная функция имеет вид

$$\sigma(b) = \langle 1 - e^{-f} \rangle, \quad (3)$$

где усреднение ведется по всем $\vec{\delta}_j$, а f вычисляется по формуле (2).

Сначала сделаем тождественное преобразование

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 = (\vec{r}_A - \vec{r}_B + \vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)^2 = \vec{b}^2 \left(1 + 2 \frac{\vec{b}(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)}{b^2} + \frac{(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)^2}{b^2} \right). \quad (4)$$

Разложим в ряд выражение (2), считая, что $|\vec{\delta}_j| \ll |\vec{b}|$:

$$\ln(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 \simeq \ln \vec{b}^2 + 2 \frac{\vec{b}(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)}{b^2} + \frac{(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)^2}{b^2} - 2 \frac{(\vec{b}(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3))^2}{b^4}.$$

Используя это соотношение и аналогичные разложения для логарифма, получаем приближенное выражение для величины f :

$$f \simeq \frac{\alpha_s^2}{8} \left\{ \frac{1}{b^2} [(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)^2 + (\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_4)^2 - (\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_4)^2 - (\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_3)^2] - \right. \\ \left. - \frac{2}{b^4} [((\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)\vec{b})^2 + ((\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_4)\vec{b})^2 - ((\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_4)\vec{b})^2 - ((\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_3)\vec{b})^2] \right\}^2. \quad (5)$$

Для выполнения усреднения в формуле (3) сделаем еще одно приближение, оправданное при $r_0/|\vec{b}| \ll 1$:

$$\langle 1 - e^{-f} \rangle = \langle 1 - (1 - f + \dots) \rangle \simeq \langle f \rangle.$$

Для вычисления $\langle f \rangle$ используется теорема Вика: среднее от произведения гауссовых величин выражается через произведения всех парных средних,

$$\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle = \langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 A_4 \rangle + \langle A_1 A_3 \rangle \langle A_2 A_4 \rangle + \langle A_1 A_4 \rangle \langle A_2 A_3 \rangle. \quad (6)$$

Рис. 2. Профильная функция рр-столкновений $\sigma(b/r_0)$ при больших прицельных параметрах: результат численных расчетов методом Монте-Карло (точки) и теоретически рассчитанная асимптотика (линия).

Приведем несколько примеров применения (6):

$$\begin{aligned}\langle(\vec{\delta}_1\vec{\delta}_3)(\vec{\delta}_1\vec{\delta}_3)\rangle &= \langle(\delta_{1x}\delta_{3x} + \delta_{1y}\delta_{3y})(\delta_{1x}\delta_{3x} + \delta_{1y}\delta_{3y})\rangle = \frac{r_0^2}{2}, \\ \langle(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)^4\rangle &= \langle(\delta_1^2 - 2\vec{\delta}_1\vec{\delta}_3 + \delta_3^2)^2\rangle = 2 \cdot 2r_0^4 + r_0^4 + 4\frac{r_0^4}{2} + r_0^4 = 8r_0^4, \\ \langle(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)^2(\vec{\delta}_2 - \vec{\delta}_4)^2\rangle &= 4r_0^4, \\ \langle(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_3)^2(\vec{\delta}_1 - \vec{\delta}_4)^2\rangle &= 5r_0^4.\end{aligned}$$

В результате после подсчета всех коэффициентов получаем

$$\langle f \rangle = \alpha_s^2 \left(\frac{r_0}{b} \right)^4. \quad (7)$$

Таким образом, асимптотика профильной функции при больших b имеет вид

$$\sigma(b) \simeq \alpha_s^2 \left(\frac{r_0}{b} \right)^4 \simeq 1 - e^{-\alpha_s^2 (r_0/b)^4}. \quad (8)$$

Эту явную формулу можно использовать для грубой оценки полного неупругого сечения $\sigma = \int \sigma(b) d\vec{b}$, чтобы посмотреть на структуру выражения

$$\sigma \simeq \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha_s^2 (r_0/b)^4}) 2\pi b db = 2\pi \alpha_s r_0^2 \int_0^\infty t(1 - e^{-1/t^4}) dt \approx 5.57 \cdot \alpha_s r_0^2. \quad (9)$$

Интересно отметить, что, несмотря на то что вероятность взаимодействия пропорциональна α_s^2 , в выражение для полного неупругого сечения входит α_s в первой степени. Как и должно следовать из соображений размерности, зависимость полного неупругого сечения от r_0 сводится к тому, что σ пропорционально r_0^2 .

На рис. 2 показана профильная функция pp-столкновений $\sigma(b/r_0)$: сравнение результатов численного расчета методом Монте-Карло с аналитической асимптотикой при $\alpha_s = 2$. Видно, что имеется неплохое согласие при $b > 2r_0$, что примерно соответствует $b > 1$ фм.

4. УЧЕТ КОНФАЙНМЕНТА

Как было получено в предыдущем разделе, профильная функция убывает при больших прицельных параметрах только степенным образом. Это противоречит большинству моделей, где обычно предполагается, что убывание экспоненциальное или гауссово [15], [19], и может привести к завышенному значению сечения, а также к увеличению доли периферических столкновений. Ниже будет показано, что такое слабое убывание приводит к расходимости при вычислении наклона дифракционного конуса. По-видимому, это связано с отсутствием конфайнмента в исходном варианте модели (2). Продемонстрируем, как его можно учесть в рамках подхода цветных диполей с использованием экранированного потенциала Юкавы [17], [18].

Формулу (2) можно трактовать как

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2 | \vec{r}_3, \vec{r}_4) = \frac{g^4}{8} [\Delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) - \Delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_4) - \Delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) + \Delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_4)]^2, \quad (10)$$

где $\Delta(\vec{r})$ – функция Грина – может быть записана следующим образом:

$$\Delta(\vec{r}) = \int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2} \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2}. \quad (11)$$

Принимая во внимание конфайнмент, заменим кулоновский потенциал на экранированный потенциал Юкавы. Это означает, что кулоновский пропагатор $1/k^2$ следует заменить на $1/(k^2 + M^2)$, где $M = 1/r_{\max}$, $r_{\max}$ – масштаб конфайнмента. В результате функция Грина $\Delta(x)$ заменится на

$$\int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k^2 + 1/r_{\max}^2} \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{r_{\max}}\right), \quad (12)$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода. Тогда формула для вероятности взаимодействия будет иметь вид

$$f = \frac{\alpha_s^2}{2} \left[K_0\left(\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|}{r_{\max}}\right) + K_0\left(\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|}{r_{\max}}\right) - K_0\left(\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|}{r_{\max}}\right) - K_0\left(\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}{r_{\max}}\right) \right]^2. \quad (13)$$

Поскольку $K_0(r/r_{\max}) \simeq -\ln(r/2r_{\max})$ при $r \ll r_{\max}$, в этом предельном случае мы снова возвращаемся к исходной формуле (2). При $r \gg r_{\max}$ модифицированная функция Бесселя ведет себя следующим образом:

$$K_0\left(\frac{r}{r_{\max}}\right) \simeq \sqrt{\frac{\pi r_{\max}}{2r}} e^{-r/r_{\max}}, \quad (14)$$

что обеспечивает экспоненциальное затухание функции $\sigma(b)$.

Величина $r_{\max}$ представляет собой радиус конститuentного кварка. Согласно работе [20] отношение квадратов радиусов кварка и адрона должно быть порядка 0.1. Это приводит к значению $r_{\max} \simeq 0.2 \div 0.3$ фм.

5. НАКЛОН ДИФРАКЦИОННОГО КОНУСА

Экспериментально установлено, что дифференциальное сечение упругого pp-рассеяния в области малых переданных импульсов ведет себя как

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim C e^{Bt}. \quad (15)$$

Здесь $t = -q^2 < 0$, при этом $-t$ есть квадрат переданного импульса, а B – коэффициент наклона дифракционного конуса. Согласно экспериментальным данным величина B_0 варьируется от 12 ГэВ^{-2} при энергиях, достигнутых на SPS (Super Proton Synchrotron) до 20 ГэВ^{-2} при энергиях, достигнутых на LHC [19]. Несмотря на то что формула (15) относится к упругому рассеянию, коэффициент наклона дифракционного конуса, как будет показано ниже, можно вычислить в рамках любой модели, описывающей неупругое нуклон-нуклонное рассеяние, причем он определяется только формой нуклон-нуклонной профильной функции $\sigma(b)$.

Согласно оптической теореме полное сечение рассеяния связано с амплитудой рассеяния при нулевом переданном импульсе:

$$\sigma_{\text{tot}} = 2 \text{Im } M_{\text{el}}(q) \big|_{q=0}. \quad (16)$$

Упругое сечение рассеяния выражается через амплитуду следующим образом:

$$\sigma_{\text{el}} = \int |M(q)|^2 \frac{d^2 q}{(2\pi)^2}. \quad (17)$$

Обозначим через $t(b)$ амплитуду рассеяния в пространстве прицельных параметров,

$$t(b) = \int e^{-i\vec{q}\vec{b}} M(q) \frac{d^2 q}{(2\pi)^2}. \quad (18)$$

Поскольку, как показывает эксперимент, вещественная часть амплитуды рассеяния при высоких энергиях мала, очень хорошим приближением будет чисто мнимая амплитуда рассеяния:

$$t(b) = ig(b), \quad g(b) \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

С учетом этого предположения имеем следующие выражения для полного и упругого сечений рассеяния:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int 2g(b) d^2 b, \quad \sigma_{\text{el}} = \int g^2(b) d^2 b. \quad (20)$$

Полное сечение рассеяния является суммой упругого и неупругого сечений,

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}},$$

отсюда

$$\sigma_{\text{inel}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{el}} = \int (2g(b) - g^2(b)) d^2 b = \int \sigma(b) d^2 b. \quad (21)$$

Если вместо оптической теоремы использовать соотношение унитарности в более общем виде, можно получить аналогичное выражение без интегрирования по b [21]. Таким образом, получаем выражение для $g(b)$ (см. также работу [19]):

$$g(b) = 1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}. \quad (22)$$

Наклон дифракционного конуса можно вычислить следующим образом:

$$B \simeq \frac{1}{|M(0)|^2} \left(-\frac{1}{2q} \right) \frac{d}{dq} \Big|_{q=0} |M(q)|^2. \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} |M(q)|^2 &= \int e^{i\vec{q}\vec{b}} e^{-i\vec{q}\vec{u}} g(b) g(u) d^2b d^2u = \\ &= \int e^{iqb \cos \phi_1} e^{-iqu \cos \phi_2} bg(b)ug(u) d\phi_1 db d\phi_2 du, \\ |M(0)|^2 &= 4\pi^2 \int bug(b)g(u) db du = \left(2\pi \int bg(b) db \right)^2. \end{aligned}$$

В окрестности точки $q = 0$ имеем $e^{iqb \cos \phi_1} \simeq 1 + iqb \cos \phi_1 - (1/2)q^2b^2 \cos^2 \phi_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} |M(q)|^2 &\sim \int [(ib \cos \phi_1 - qb^2 \cos^2 \phi_1)(1 - iqu \cos \phi_2) + \\ &\quad + (1 + iqb \cos \phi_1)(-iu \cos \phi_2 - qu^2 \cos^2 \phi_2)] bg(b)ug(u) d\phi_1 db d\phi_2 du = \\ &= \int (-qb^2 \cos^2 \phi_1 - qu^2 \cos^2 \phi_2) bg(b)ug(u) d\phi_1 db d\phi_2 du = \\ &= -4\pi^2 q \int b^3 g(b) db \cdot \int bg(b) db. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательная формула для наклона дифракционного конуса имеет вид (см. также работу [22])

$$B = \frac{1}{2} \frac{\int b^3 g(b) db}{\int bg(b) db} \quad (24)$$

или, с учетом связи $g(b)$ и $\sigma(b)$,

$$B = \frac{1}{2} \frac{\int b^3 (1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db}{\int b(1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db}. \quad (25)$$

Из формул (24), (25) следует, что значение коэффициента наклона дифракционного конуса будет конечным только при условии убывания профильной функции рр-столкновения быстрее, чем $1/b^4$. Таким образом, профильная функция столкновений, полученная в модели (8) без учета конфайнмента, приводит к расходимости в формуле (25) и бесконечному коэффициенту наклона.

Рис. 3. Наклон дифракционного конуса в различных моделях: 1 – фитирование экспериментальных данных [22], 2 – дипольная модель, 3 – черный диск, 4 – серый диск, 5 – черный гауссов профиль, 6 – серый гауссов профиль, 7 – квазиэйконольный подход Редже [23].

6. РАСЧЕТ НАКЛОНА ДИФРАКЦИОННОГО КОНУСА В РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ

В рамках данной дипольной модели мы рассчитали величину наклона дифракционного конуса в широком диапазоне энергий (см. рис. 3). Рост сечений с энергией достигается только за счет увеличения количества диполей в сталкивающихся протонах. Процедура фиксации параметров, использующихся для расчета, описана в работах [24]–[26]; в частности, модель описывает неупругое сечение в широком диапазоне энергий.

Для сравнения коэффициент B был рассчитан в четырех простых моделях:

- черный диск: $\sigma(b) = \theta(R - b)$,
- серый диск: $\sigma(b) = g\theta(R/\sqrt{g} - b)$,
- черный гауссов профиль: $\sigma(b) = e^{-b^2/R^2}$,
- серый гауссов профиль: $\sigma(b) = ge^{-g(b^2/R^2)}$.

Также расчет был проведен в рамках квазиэйконольного подхода Редже, интерпретация которого с точки зрения поперечных координат была дана в работе [23]:

- $\sigma(b) = 1 - \exp(-N_0 e^{-b^2/2\alpha^2})$.

В моделях черного диска и черного гауссова профиля параметры фиксировались на основании требования описания неупругого сечения рассеяния; в моделях серого диска и серого гауссова профиля требовалось одновременное описание упругого и неупругого сечений. Результаты показывают, что без дополнительной настройки дипольная модель хорошо описывает коэффициент наклона дифракционного конуса при энергиях ниже 100 ГэВ и недооценивает его величину при больших энергиях. Простые модели также не дают удовлетворительного описания во всем диапазоне энергий: при низких энергиях хорошо работают модели с гауссовым профилем

pp-столкновения, а при более высоких лучшее согласие получается для модели черного диска. Квазиэikonальный подход Редже [26] дает только качественное описание. По-видимому, учет величины наклона дифракционного конуса при настройке параметров позволит наложить существенные ограничения на их значения в вышеперечисленных моделях и улучшить их согласие с экспериментом.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель для описания неупругих pp-столкновений при высоких энергиях, в которой используются пространственные координаты в поперечной плоскости и применяется дипольный подход. В варианте модели без учета конфайнмента получено степенное поведение профильной функции pp-столкновения при больших прицельных параметрах, которое приводит к противоречию с условиями унитарности и конечности коэффициента наклона дифракционного конуса. Учет конфайнмента дает экспоненциальное убывание $\sigma(b)$ и конечное значение наклона. Экспериментальные данные по величине наклона дифракционного конуса и по дифференциальному сечению упругого pp-рассеяния представляют собой важную информацию для настройки параметров моделей нуклон-нуклонного рассеяния.

Благодарности. Автор выражает благодарность В. В. Вечернину и А. М. Пучкову за многочисленные обсуждения, ценные замечания и советы. Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 11.38.197.2014), специальной ректорской стипендии СПбГУ, а также фонда “Династия”.

Список литературы

- [1] L. McLerran, R. Venugopalan, *Phys. Rev. D*, **49**:5 (1994), 2233–2241, arXiv: hep-ph/9309289.
- [2] L. McLerran, R. Venugopalan, *Phys. Rev. D*, **49**:7 (1994), 3352–3355, arXiv: hep-ph/9311205.
- [3] T. Sjostrand, P. Z. Skands, *JHEP*, **03** (2004), 053, 70 pp.
- [4] M. Diehl, D. Ostermeier, A. Schäfer, *JHEP*, **03** (2012), 089, 144 pp., arXiv: 1111.0910.
- [5] A. Krasnitz, R. Venugopalan, *Nucl. Phys. A*, **698**:1 (2002), 209–216, arXiv: hep-ph/0104168.
- [6] A. Ortiz Velasquez, P. Christiansen, E. Cuautle Flores, I. A. Maldonado Cervantes, G. Paic, *Phys. Rev. Lett.*, **111**:4 (2013), 042001, 4 pp., arXiv: 1303.6326.
- [7] M. Floris, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **270**:1 (2011), 012046, 4 pp.
- [8] G. Gustafson, *Acta Phys. Polon. B*, **40**:7 (2009), 1981–1996, arXiv: 0905.2492.
- [9] K. D. Anderson, D. A. Ross, M. G. Sotiropoulos, *Phys. Lett. B*, **380**:1–2 (1996), 127–133, arXiv: hep-ph/9602275.
- [10] G. Altarelli, G. Parisi, *Nucl. Phys. B*, **126**:2 (1977), 298–318.
- [11] F. Gelis, E. Iancu, J. Jalilian-Marian, R. Venugopalan, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **60** (2010), 463–489, arXiv: 1002.0333.
- [12] H. Weigert, *Prog. Part. Nucl. Phys.*, **55**:2 (2005), 461–565, arXiv: hep-ph/0501087.
- [13] A. H. Mueller, *Nucl. Phys. B*, **415**:2 (1994), 373–385.
- [14] A. H. Mueller, G. P. Salam, *Nucl. Phys. B*, **475**:1 (1996), 293–317, arXiv: hep-ph/9605302.
- [15] В. В. Вечернин, И. А. Лакомов, А. М. Пучков, *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4. Физика. Химия*, 2010, вып. 3, 3–16.
- [16] M. A. Braun, V. V. Vechernin, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **16**:11 (1990), 1615–1626.

- [17] E. Avsar, G. Gustafson, L. Lonnblad, *JHEP*, **12** (2007), 012, 29 pp., arXiv:0709.1368.
- [18] C. Flensburg, G. Gustafson, L. Lonnblad, *Eur. Phys. J. C*, **60**:2 (2009), 233–247, arXiv:0807.0325.
- [19] M. Rybczynski, Z. Wlodarczyk, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **41**:1 (2013), 015106, arXiv:1307.0636.
- [20] М. А. Браун, В. В. Вечернин, *ТМФ*, **139**:3, 381–404.
- [21] I. M. Dremin, V. A. Nechitailo, *Nucl. Phys. A*, **916** (2013), 241–248, arXiv:1306.5384.
- [22] V. A. Schegelsky, M. G. Ryskin, *Phys. Rev. D*, **85**:9 (2013), 094024, 4 pp., arXiv:1112.3243.
- [23] V. Vechernin, I. Lakomov, *PoS (Baldin ISHEPP XXI)*, 2012, 072, 12 pp., arXiv:1212.2667.
- [24] В. Н. Коваленко, *ЯФ*, **76**:10 (2013), 1251–1257, arXiv:1211.6209.
- [25] V. Kovalenko, V. Vechernin, *PoS (Baldin ISHEPP XXI)*, 2012, 077, 20 pp., arXiv:1212.2590.
- [26] V. Kovalenko, *PoS (QFTHEP 2013)*, 2013, 052, 7 pp.