Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, О. В. Постнова, Обобщенные треугольники Паскаля и сингулярные элементы модулей алгебр Ли, *ТМФ*, 2015, том 185, номер 1, 139–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:29:56

© 2015 г.

В. Д. Ляховский, О. В. Постнова

ОБОБЩЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ ПАСКАЛЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МОДУЛЕЙ АЛГЕБР ЛИ

Рассматривается задача нахождения функции кратности $m_{\xi}^{\otimes^p \omega}$ в разложении тензорной степени модуля полупростой алгебры $\mathfrak{g}$ на неприводимые подмодули. Предложен переход к соответствующему разложению сингулярного элемента тензорной степени модуля $\Psi((L_g^{\omega})^{\otimes p})$ на сингулярные элементы неприводимых подмодулей и сформулирована задача нахождения $M_{\xi}^{\otimes^p \omega}$. Функция $M_{\xi}^{\otimes^p \omega}$ удовлетворяет системе рекуррентных соотношений, которые соответствуют процедуре перемножения модулей. Для решения поставленной задачи вводится специальный комбинаторный объект – обобщенная (g, ω) -пирамида – массив чисел $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$, удовлетворяющих той же системе рекуррентных соотношений. Доказано, что $M_{\xi}^{\otimes^p \omega}$ представляется в виде линейной комбинации соответствующих $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$. Полученное решение иллюстрируется на примерах модулей алгебр $sl(3)$ и $so(5)$.

Ключевые слова: теория представлений алгебр Ли, тензорное произведение модулей, формула Вейля.

DOI: 10.4213/tmf8932

1. ГРАФ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЕМЕНТА МОДУЛЯ И ОБОБЩЕННАЯ (g, ω) -ПИРАМИДА

1.1. Постановка задачи. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли ранга n . Обозначим через L_g^{ω} неприводимый модуль алгебры $\mathfrak{g}$ со старшим весом ω . Объектом исследования являются тензорные степени $(L_g^{\omega})^{\otimes p}|_{p \in \mathbb{Z}_+}$ и их разложение на неприводимые подмодули:

$$(L_g^{\omega})^{\otimes p} = \sum_{\xi} m_{\xi}^{\otimes^p \omega} L_g^{\xi}. \quad (1)$$

Задача заключается в нахождении кратностей $m_{\xi}^{\otimes^p \omega}$ как функций ξ и p .

Рассмотрим функцию $m_{\xi}^{\otimes^p \omega}$ как кратность старшего веса модуля L_g^{ξ} в весовой диаграмме $N((L_g^{\omega})^{\otimes p})$. Функция $m_{\xi}^{\otimes^p \omega}$ задана на решетке доминантных весов P^+ .

Решетка доминантных весов принадлежит замыканию главной камеры Вейля $\overline{C^{(0)}}$. Построим естественное продолжение функции $m_\xi^{\otimes p \omega}$ на другие камеры Вейля. Если задать это продолжение как вейль-антиинвариантную функцию

$$M_{w(\xi+\rho)-\rho|_{w \in W}}^{\otimes p \omega} = \det(w) m_\xi^{\otimes p \omega}, \quad (2)$$

то функция $M_\xi^{\otimes p \omega}$ описывает кратности весов сингулярного элемента модуля L_g^ξ , и исходная задача легко переписывается в терминах сингулярных элементов:

$$\Psi((L_g^\omega)^{\otimes p}) = \sum_{\xi} M_\xi^{\otimes p \omega} \Psi(L_g^\xi).$$

Областью определения функции $M_\xi^{\otimes p \omega}$ является весовая решетка P в целом. Необходимую нам функцию $m_\xi^{\otimes p \omega}$, являющуюся решением задачи (1), можно получить сужением $M_\xi^{\otimes p \omega}|_{\overline{C^{(0)}}}$.

Далее мы будем рассматривать задачу нахождения $M_\xi^{\otimes p \omega}$.

В работах [1], [2] было показано, что функции $M_\xi^{\otimes p \omega}$ при разных p связаны системой рекуррентных соотношений:

$$\sum_{\xi \in P} M_\xi^{\otimes p \omega} e^\xi = N(L_g^\omega) \sum_{\gamma \in P} M_\gamma^{\otimes (p-1) \omega} e^\gamma, \quad (3)$$

где $N(L_g^\omega)$ – диаграмма модуля в алгебре формальных экспонент. Данное соотношение можно считать рекуррентным для сингулярных элементов, так как выражение в правой части есть $N(L_g^\omega) \Psi((L_g^\omega)^{\otimes p-1})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Графом сингулярного элемента $\mathcal{S}_g^{p \omega}$ назовем бесконечный граф $\mathcal{S}_g^{p \omega} = (Q, T)$, определяемый множеством вершин $Q = \bigcup_{p \geq 0} Q_p$ и множеством ребер $T = \bigcup_{p \geq 1} T_p$, состоящих из дизъюнктного объединения подмножеств Q_p и T_p , удовлетворяющих следующим свойствам.*

1. $Q_0 = \{v(0, \xi) : \xi \in P, \xi = w(\rho) - \rho\}$, где w – элемент группы Вейля алгебры g .
2. Подмножества Q_p и T_p конечны,

$$Q_p = \{v(p, \xi) : \xi \in P, \xi \in \Psi((L_g^\omega)^{\otimes p})\},$$

T_p задается рекуррентным соотношением и представляет собой множество ребер, соединяющих вершины $v(p, \xi) \in Q_p$ с вершинами $\tilde{v}(p+1, \xi + \nu) \in Q_{p+1}$, где $\nu \in N(L^\omega)$. Пара (Q_p, T_p) (так же как и сам набор Q_p) называется *уровнем p* графа $\mathcal{S}_g^{p \omega}$.

3. Задано *возвращающее отображение r и продолжающее отображение s* из R в Q такое, что $r(T_p) = Q_p$, $s(T_p) = Q_{p-1}$ и $s^{-1}(v) \neq \emptyset$, $r^{-1}(\tilde{v}) \neq \emptyset$ для любого $v \in Q$ и $\tilde{v} \in Q \setminus Q_0$. Эти отображения также задаются рекуррентным соотношением: каждое ребро $t(p+1) \in T_{p+1}$ соединяет вершину $v(p, \xi) \in Q_p$ с $\tilde{v}(p+1, \tilde{\xi}) \in Q_{p+1}$, так что $r(t(p+1)) = \tilde{v}$ и $s(t(p+1)) = v$.

На вершинах $v(p, \xi)$ графа $\mathcal{S}_g^{p \omega}$ зададим функцию $M_\xi^{\otimes p \omega}$, сопоставляющую каждой вершине $v(p, \xi)$ графа сингулярную кратность соответствующего веса ξ в $\Psi((L_g^\omega)^{\otimes p})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенной (g, ω) -пирамидой* называется массив чисел $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$, $p = -\infty, \dots, \infty$, $m_i = 0, \dots, \infty$, $i = 0, \dots, n$, элементы которого удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\sum_{\xi \in P} (p, \{m_i\})_{g, \omega} e^\xi = N(L_g^\omega) \sum_{\gamma \in P} (p-1, \{l_i\})_{g, \omega} e^\gamma \quad (4)$$

с граничными условиями $(0, \{0\}) = 1$.

Здесь $\{m_i\}$, $\{l_i\}$ представляют собой координаты векторов ξ , γ в базисе весовой решетки, который мы назовем *комбинаторным*. Комбинаторный базис состоит из множества векторов, отложенных от старшего веса рассматриваемого модуля вдоль границ его диаграммы. Длины векторов комбинаторного базиса выбираются таким образом, чтобы все веса модуля имели целые неотрицательные координаты в этом базисе. В выражении (4) числа $\{m_i\}$ – комбинаторные координаты веса ξ в базисе модуля $(L_g^\omega)^{\otimes p}$, $\{l_i\}$ – комбинаторные координаты веса γ в базисе модуля $(L_g^\omega)^{\otimes p-1}$.

Зададим на вершинах $v(p, \xi)$ графа $S_g^{p\omega}$ функцию

$$M(p, \xi)_{g, \omega} = \sum_{\{\widetilde{m}_i\}: m_i - \widetilde{m}_i = (w(\rho) - \rho)_i} (-1)^{\det(w)} (p, \{\widetilde{m}_i\})_{g, \omega}. \quad (5)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Справедливо соотношение*

$$M(p, \xi)_{g, \omega} = M_\xi^{\otimes p\omega}. \quad (6)$$

Утверждение 1 будем доказывать при помощи структурной индукции.

1.2. Индуктивный класс и структурная индукция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Индуктивный класс $\mathfrak{X}$* – это класс, определенный двумя видами правил, называемых *начальными правилами* и *правилами порождения* [3]. Начальные правила определяют начальные элементы, которые образуют определенный класс $\mathfrak{S}$, называемый *базисом $\mathfrak{X}$* . Правила порождения определяют фиксированный класс $\mathfrak{M}$ способов комбинации. Способ комбинации степени n представляет собой отображение $c: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \dots \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$. С каждым таким способом комбинации c связывается определенное число, называемое его степенью. Каждый элемент $\mathfrak{X}$ может быть получен с помощью эффективного процесса, который начинается с определенных начальных элементов и на каждом шаге которого способ комбинации из $\mathfrak{M}$ применяется к уже построенным аргументам.

Несложно заметить, что граф сингулярного элемента $S_g^{p\omega}$ представляет собой индуктивный класс, где начальные правила есть Q_0 , а правила порождения задаются рекуррентным соотношением.

На индуктивных классах можно доказывать утверждения с помощью *метода структурной индукции*.

1.2.1. Структурная индукция. Пусть $\mathfrak{X}$ – индуктивный класс, $M(x)$ – некое свойство x . Для того чтобы доказать, что для всех $x \in \mathfrak{X}$ выполняется свойство $M(x)$, достаточно показать, что выполняются следующие условия.

1. Для всех начальных элементов $x_0 \in \mathfrak{X}$ свойство $M(x_0)$ выполняется.
2. Для $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{X}$ и любого способа комбинации $c(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$ из выполнения $M(x_1), M(x_2), \dots, M(x_n)$ следует выполнение $M(x)$.

С учетом отмеченного выше, доказательство утверждения 1 следующее.

Пусть $M(\xi, p) = M_\xi^{\otimes p \omega}$ – свойство, справедливость которого мы хотим доказать для всего индуктивного класса $\mathcal{S}_g^{p\omega}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для всех начальных элементов это свойство выполняется, поскольку Q_0 соответствуют веса $\xi = w(\rho) - \rho$. Для них $m_i = (w(\rho) - \rho)_i$ и суммирование сводится к одному слагаемому с $\widetilde{m}_i = 0$ для каждого w , которое имеет вид $(-1)^{\det(w)}$, что совпадает с $M_\xi^{\otimes p \omega}$ при $p = 0$.

2. Поскольку в рассматриваемом индуктивном классе правила порождения определяются рекуррентным соотношением, то достаточно доказать, что выражение (5) тоже удовлетворяет этому соотношению. Это очевидно, поскольку $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$ удовлетворяют тому же соотношению, что и $M_\xi^{\otimes p \omega}$, по построению, а выражение (5) является их линейной комбинацией.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выражения для чисел $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$, стоящих в обобщенной (g, ω) -пирамиде, можно получить явным образом. Для этого достаточно заметить, что характер $(\text{ch}(L_g^\omega))^p$ модуля $(L_g^\omega)^{\otimes p}$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению и тем же начальным условиям, что и обобщенная (g, ω) -пирамида. Следовательно, он совпадает с ней (доказательство проводится аналогично методом структурной индукции). Это значит, что $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$ представляют собой коэффициенты разложения $(\text{ch}(L_g^\omega))^p$ в алгебре формальных экспонент

$$(\text{ch}(L_g^\omega))^p = \sum_{\{m_i\}} (p, \{m_i\})_{g, \omega} e^{m_1 \beta_1} e^{m_2 \beta_2} \dots e^{m_n \beta_n}, \quad (7)$$

где β_i – базис весового пространства, имеющий начало координат в старшем весе модуля $(L_g^\omega)^{\otimes p}$ и построенный так, чтобы все веса модуля имели целые неотрицательные координаты m_i (т. е. чтобы координаты m_i были комбинаторными).

Далее мы получим $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$ разложением $(\text{ch}(L_g^\omega))^p$ в ряд Тейлора по степеням e^{β_i} . Обозначим для дальнейшего удобства $x^i = e^{\beta_i}$, тогда характер модуля будет полиномом от x^i : $C_g^\omega(x_i) = \text{ch}(L_g^\omega)|_{e^{\beta_i} = x^i}$.

1.3. Алгоритм построения решения. Основываясь на изложенном выше, можно сформулировать алгоритм нахождения функции кратности $M(p, m_i)_{g, \omega}$:

- 1) построение полинома $C_g^\omega(x_i)$;
- 2) нахождение $(p, \{m_i\})_{g, \omega}$;
- 3) вейль-антисимметризация

$$M(p, \xi)_{g, \omega} = \sum_{\{\widetilde{m}_i\}: m_i - \widetilde{m}_i = (w(\rho) - \rho)_i} (-1)^{\det(w)} (p, \{\widetilde{m}_i\})_{g, \omega}. \quad (8)$$

2. АЛГЕБРА $sl(2)$

2.1. Фундаментальный модуль. Проиллюстрируем изложенное выше на простейшем примере. В случае фундаментального модуля алгебры $sl(2)$ полином $C_{sl(2)}^\omega(x) = 1 + x$, а коэффициенты разложения его по степеням x – это биномиальные коэффициенты $C(p, m)$. Таким образом, соответствующая $(sl(2), \omega)$ -пирамида представляет собой треугольник Паскаля. На рис. 1 изображен граф Паскаля и граф $\mathcal{S}_{sl(2)}^{p\omega}$ сингулярного элемента фундаментального модуля алгебры $sl(2)$. Числа,

Рис. 1. Треугольник Паскаля и граф сингулярного элемента фундаментального модуля алгебры $sl(2)$.

стоящие в узлах, – это биномиальные коэффициенты для графа Паскаля и функция кратности сингулярного элемента для графа $\mathcal{S}_{sl(2)}^{p\omega}$. Они удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению

$$F(p, m) = F(p - 1, m - 1) + F(p - 1, m), \quad m = 0, \dots, p, \quad p = 0, \dots, \infty, \quad (9)$$

но с разными начальными условиями. В треугольнике Паскаля $F(0, 0) = 1$, а для графа сингулярного элемента $F(0, 0) = 1$, $F(0, 1) = -1$. Для нахождения $M(p, \xi)_{sl(2), \omega}$ необходимо построить вейль-антисимметричное выражение из биномиальных коэффициентов, удовлетворяющее требуемым начальным условиям. Графически вейль-антисимметризацию можно представить как наложение двух графов Паскаля, сдвинутых друг относительно друга, с разными знаками. Воспользуемся формулой (5), имеем

$$M(p, m)_{sl(2), \omega} = \binom{p}{m} - \binom{p}{m-1} = \frac{(p)!(p-2m+1)}{(m)!(p-m+1)!}. \quad (10)$$

Мы получили выражение для кратности неприводимого модуля со старшим весом $(p-2m)\omega$ в разложении p -й тензорной степени фундаментального модуля алгебры $sl(2)$ на неприводимые подмодули (известную формулу Бете, определяющую число бетевских векторов длины m для спиновой цепочки длины p из спинов $1/2$ [4], [5]).

2.2. Векторный модуль. Рассмотрим модуль алгебры $sl(2)$ со старшим весом 2ω и найдем $M(p, m)_{sl(2), 2\omega}$. Имеем

$$(C_{sl(2)}^{2\omega}(x))^p = (1 + x + x^2)^p = \sum_{m=0}^p \binom{p}{m}_2 x^{p+m}. \quad (11)$$

Коэффициенты этого разложения называются *триномиальными коэффициентами*:

$$\binom{p}{m}_2 = \sum_{j=0}^m \binom{p}{j} \binom{j}{m-j}, \quad (12)$$

при этом все $\binom{j}{m-j}$ полагаются равными нулю при $j < m/2$. Индекс m принимает значения $0, \dots, 2p$.

Рис. 2. Тринomialный треугольник и граф сингулярного элемента векторного модуля алгебры $sl(2)$.

Есть и другое выражение для тринomialных коэффициентов:

$$\binom{p}{s}_2 = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} \binom{2p-2j}{p-s-j}. \quad (13)$$

Через $s = -p, \dots, p$ обозначена координата, отсчитываемая от центра симметрии треугольника (см. рис. 2). Выражение (13) будет удобно использовать в дальнейшем, поскольку здесь в явном виде проявляется симметрия относительно замены $s \rightarrow -s$.

Построим теперь выражение для кратности сингулярного элемента путем вейль-антисимметризации тринomialных коэффициентов:

$$M(p, m)_{sl(2), 2\omega} = \binom{p}{s}_2 - \binom{p}{s+1}_2. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили выражение для кратности модуля алгебры $sl(2)$ со старшим весом $(a-1)\omega$ в разложении p -й тензорной степени модуля со старшим весом 2ω на неприводимые подмодули:

$$M(p, a)_{sl(2), 2\omega} = \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{p}{j} (2p-2j)! \frac{a}{(p-j+1/2+a/2)!(p-j+1/2-a/2)!}, \quad (15)$$

где a – координата, отсчитываемая от центра вейлевской симметрии сингулярного элемента. Значения a – целые нечетные числа. Формула получена из разности двух тринomialных коэффициентов, и сделана замена $a = 2s + 1$. В этой сумме фактически остаются только слагаемые с $j \leq p + 1/2 - a/2$. Каждое слагаемое антиинвариантно относительно замены $a \rightarrow -a$, что позволяет нам явно увидеть вейлевскую антисимметрию всего выражения.

ПРИМЕР 1. Вычислим кратность модуля со старшим весом 2ω в разложении $(L_{sl(2)}^{2\omega})^{\otimes 4}$ на неприводимые модули. Здесь $n = 4$, $a = 3$ и суммирование ведется по $j = 0, \dots, 3$. Выражения в знаменателе можно заменить на гамма-функции для удобства расчетов. В итоге получим

$$\frac{120960}{4320} - \frac{8640}{240} + \frac{432}{24} - \frac{24}{6} = 6.$$

 Рис. 3. Пирамида Паскаля и ее вейль-антисимметризация в сечении $p = 0$.

3. АЛГЕБРА $sl(3)$

3.1. Фундаментальный модуль $L_{sl(3)}^{\omega_1}$. Рассмотрим модуль алгебры $sl(3)$ со старшим весом ω_1 и найдем $M(p, m_1, m_2)_{sl(3), \omega_1}$. Имеем

$$(C_{sl(3)}^{\omega_1}(x, y))^p = (1 + x + y)^p = \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p (p; m_1, m_2) x^{m_1} y^{m_2}, \quad (16)$$

где m_1, m_2 – комбинаторные координаты. Для удобства расчетов перейдем к координатам n_1, n_2 относительно базиса $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, назовем их алгебраическими. Векторы $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, как и комбинаторные векторы (β_1, β_2) , отложены от старшего веса модуля $(L_{sl(3)}^{\omega_1})^{\otimes p}$, но в отличие от них, сонаправлены корням (см. рис. 3): $m_1 = n_1 - n_2$, $m_2 = n_2$. Коэффициенты этого разложения имеют вид

$$(p; n_1, n_2) = \frac{p!}{n_2!(p - n_1)!(n_1 - n_2)!}. \quad (17)$$

Обобщенная $(sl(3), \omega_1)$ -пирамида – это пирамида Паскаля [6] (см. рис. 3).

Рис. 4. $(so(5), \omega_2)$ -пирамида.

Вейль-антисимметризация дает выражение

$$M(p, n_1, n_2)_{sl(3), \omega_1} = (p; n_1, n_2) - (p; n_1 - 1, n_2) + (p; n_1 - 2, n_2 - 1) - \\ - (p; n_1, n_2 - 1) + (p; n_1 - 1, n_2 - 2) - (p; n_1 - 2, n_2 - 2). \quad (18)$$

Перейдем к координатам (a_1, a_2) относительно векторов $(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2)$ (фундаментальные векторы, отложенные из центра симметрии сингулярного элемента). Координаты n_1, n_2 выражаются через них следующим образом:

$$n_1 = \frac{2p - 2a_1 - a_2 + 3}{3}, \quad n_2 = \frac{p - a_1 - 2a_2 + 3}{3}.$$

В этих координатах выражение (18) имеет вид

$$M(p, a_1, a_2)_{sl(3), \omega_1} = \\ = \frac{a_1 a_2 (a_1 + a_2) p!}{((p - a_1 - 2a_2 + 3)/3)! ((p - a_1 + a_2 + 3)/3)! ((p + 2a_1 + a_2 + 3)/3)!}. \quad (19)$$

Это выражение совпадает с выражением, полученным нами в работах [1], [7].

4. АЛГЕБРА $so(5)$

4.1. Спинорный фундаментальный модуль алгебры $so(5)$. Рассмотрим модуль алгебры $so(5)$ со старшим весом ω_2 и найдем $M(p, m_1, m_2)_{so(5), \omega_2}$. Имеем

$$(C_{so(5)}^{\omega_2}(x, y))^p = (1 + x + y + xy)^p = (1 + x)^p (1 + y)^p = \\ = \sum_{m_1=0}^p \sum_{m_2=0}^p \frac{p! p!}{m_1! m_2! (p - m_1)! (p - m_2)!} x^{m_1} y^{m_2}, \quad (20)$$

где m_1, m_2 – комбинаторные координаты. Перейдем к алгебраическим координатам n_1, n_2 относительно базиса $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2)$ (см. рис. 4): $m_1 = n_1 - n_2, m_2 = n_2$. В этих

 Рис. 5. Вейль-антисимметризация $(so(5), \omega_2)$ -пирамиды.

координатах

$$(p, n_1, n_2)_{so(5), \omega_2} = \frac{p!p!}{(n_1 - n_2)!n_2!(p - n_1 + n_2)!(p - n_2)!}. \quad (21)$$

Вейль-антисимметризация приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} M(p, n_1, n_2)_{so(5), \omega_2} = & (p, n_1, n_2)_{so(5), \omega_2} - (p, n_1 - 1, n_2)_{so(5), \omega_2} + \\ & + (p, n_1 - 3, n_2 - 1)_{so(5), \omega_2} - (p, n_1 - 4, n_2 - 2)_{so(5), \omega_2} + \\ & + (p, n_1 - 4, n_2 - 3)_{so(5), \omega_2} - (p, n_1 - 3, n_2 - 3)_{so(5), \omega_2} + \\ & + (p, n_1 - 1, n_2 - 2)_{so(5), \omega_2} - (p, n_1, n_2 - 1)_{so(5), \omega_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Перейдем к координатам a_1, a_2 относительно векторов $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ (фундаментальные векторы, отложенные из центра симметрии сингулярного элемента; см. рис. 5). Координаты n_1, n_2 выражаются через них следующим образом:

$$n_1 = \frac{-a_1 - a_2 + 2p + 4}{2}, \quad n_2 = \frac{-a_2 + p + 3}{2}.$$

После упрощения окончательно имеем

$$\begin{aligned} M(p, a_1, a_2)_{so(5), \omega_2} = \\ = \frac{a_1 a_2 (a_1^2 - a_2^2) (p + 2)! p!}{4((p + a_1 + 3)/2)!((p - a_1 + 3)/2)!((p + a_2 + 3)/2)!((p - a_2 + 3)/2)!}. \end{aligned} \quad (23)$$

Это выражение совпадает с выражением, которое было получено нами в работах [8], [2].

4.2. Векторный фундаментальный модуль алгебры $so(5)$. При помощи сформулированного алгоритма получим явное выражение для $M(p, m_1, m_2)_{so(5), \omega_1}$.

Рис. 6. $(so(5), \omega_1)$ -Пирамида.

Известно, что оно не распадается на мономы, поэтому получить это выражение методами, сформулированными нами в работах [1], [2], [7], [8], представлялось невозможным. Методы других авторов (см., в частности, [9]–[11]) предполагают суммирование по разбиениям чисел, что затрудняет вычисления и не позволяет получить явного выражения.

Сформулированный выше алгоритм позволяет получить более удобную формулу кратности для степени векторного представления.

Полином $C_{so(5)}^{\omega_1}(x, y)$ имеет вид

$$C_{so(5)}^{\omega_1}(x, y) = 1 + xy + x^2 + y^2 + x^2y^2.$$

Воспользуемся формулами для биномиальных и триномиальных коэффициентов:

$$\begin{aligned} (C_{so(5)}^{\omega_1}(x, y))^p &= (1 + xy + x^2 + y^2 + x^2y^2)^p = [(1 + x^2y^2) + (x^2 + xy + y^2)]^p = \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} (1 + x^2y^2)^{p-k} (x^2 + xy + y^2)^k = \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!(p-k)!} \sum_{r=0}^{p-k} \frac{(p-k)!}{r!(p-k-r)!} (x^2y^2)^r \times \\ &\quad \times \sum_{l=0}^2 k \sum_{q=0}^k \frac{k!}{q!(k-q)!} \frac{q!}{(l-q)!(2q-l)!} x^l y^{2k-l}. \end{aligned}$$

Перейдем к комбинаторным координатам относительно векторов β_1, β_2 (рис. 6). Обозначим общую степень при x за m_1 , а при y – за m_2 . Тогда

$$l = \frac{m_2 - m_1 + 2k}{2}, \quad p = \frac{m_2 + m_1 - 2k}{4}$$

и суммирование ведется по таким m_1, m_2 , чтобы $l, p \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\begin{aligned} (C_{so(5)}^{\omega_1}(x, y))^p &= \sum_{m_1, m_2=0}^{2p} x^{m_1} y^{m_2} \times \\ &\times \sum_{k=0}^p \frac{p!}{((m_2 + m_1)/4 - k/2)!(p - ((m_2 + m_1)/4 + k/2))!} \times \\ &\times \sum_{q=0}^k \frac{1}{q!(k-q)!((m_2 - m_1)/2 + k - q)!(2q - ((m_2 - m_1)/2 + k))!}. \end{aligned} \quad (24)$$

Можно уточнить пределы суммирования, тогда окончательно получим

$$\begin{aligned} (p, m_1, m_2)_{so(5), \omega_1} &= \sum_{k=(m_1-m_2)/2}^{(m_1+m_2)/2} \frac{p!}{((m_2 + m_1)/4 - k/2)!(p - ((m_2 + m_1)/4 + k/2))!} \times \\ &\times \sum_{q=(m_2-m_1)/2+k/2}^{(m_2-m_1)/2+k} \frac{1}{q!(k-q)!((m_2 - m_1)/2 + k - q)!(2q - ((m_2 - m_1)/2 + k))!}. \end{aligned} \quad (25)$$

Если $m_1 + m_2$ кратно 4, то суммирование ведется по четным k . В противном случае суммирование ведется по нечетным k .

С помощью соответствующей вейль-антисимметризации получаем

$$\begin{aligned} M(p, m_1, m_2)_{so(5), \omega_1} &= (p, m_1, m_2)_{so(5), \omega_1} - (p, m_1 - 1, m_2 + 1)_{so(5), \omega_1} + \\ &+ (p, m_1 - 3, m_2 + 1)_{so(5), \omega_1} - (p, m_1 - 4, m_2)_{so(5), \omega_1} + \\ &+ (p, m_1 - 4, m_2 - 2)_{so(5), \omega_1} - (p, m_1 - 3, m_2 - 3)_{so(5), \omega_2} + \\ &+ (p, m_1 - 1, m_2 - 3)_{so(5), \omega_1} - (p, m_1, m_2 - 2)_{so(5), \omega_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

ПРИМЕР 2. Вычислим кратность модуля со старшим весом $p\omega_1 - 2\alpha_1 - 3\alpha_2$ в разложении $(L_{so(5)}^{\omega_1})^{\otimes p}$ на неприводимые подмодули:

$$M(p, 2, 4)_{so(5), \omega_1} = p(p-1)^2 - \frac{p(p-1)(p-2)}{2} + p - \left(p + \frac{3p(p-1)}{2} \right) = \frac{p(p-1)(p-3)}{2}.$$

Это выражение совпадает с полиномом, полученным в работе [8] рекуррентным образом.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В предыдущих разделах нами был сформулирован алгоритм нахождения функции кратности $M_{\xi}^{\otimes p \omega}$ в разложении тензорной степени сингулярного элемента модуля полупростой алгебры g на неприводимые подмодули $\Psi((L_g^{\omega})^{\otimes p}) = \sum_{\xi} M_{\xi}^{\otimes p \omega} \Psi(L_g^{\xi})$ и получены ответы для фундаментальных представлений алгебр $sl(3)$ и $so(5)$. Необходимо заметить, что данный алгоритм по сути является применением формулы Вейля в частном случае тензорной степени модуля. Действительно, формула Вейля для характера [12]

$$\text{ch}(L_g^{\omega}) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{w(\omega + \rho)}}{e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})} = \frac{\Psi(L_g^{\omega})}{\Psi(L_g^0)} \quad (27)$$

для тензорной степени модуля

$$\mathrm{ch}((L_g^\omega)^{\otimes p}) = \frac{\Psi((L_g^\omega)^{\otimes p})}{\Psi(L_g^0)}, \quad (28)$$

и интересующий нас сингулярный элемент имеет вид

$$\Psi((L_g^\omega)^{\otimes p}) = \Psi(L_g^0) \cdot \mathrm{ch}((L_g^\omega)^{\otimes p}). \quad (29)$$

Как было показано выше, $\mathrm{ch}(L_g^\omega)$ есть C_g^ω в алгебре формальных экспонент. В этой алгебре умножение $\mathrm{ch}((L_g^\omega)^{\otimes p})$ на $\Psi(L_g^0)$ дает вейль-антисимметричную линейную комбинацию элементов алгебры. Если мы будем рассматривать эту процедуру в проекции на определенный вес с координатами m_i , то получим выведенную нами формулу (8) для кратностей

$$M(p, \mu)_{g, \omega} = \sum_{\{\widetilde{m}_i\}: m_i - \widetilde{m}_i = (w(\rho) - \rho)_i} (-1)^{\mathrm{det}(w)}(p, \{\widetilde{m}_i\})_{g, \omega}.$$

Данная формула, как и формула Вейля, применима для всех полупростых алгебр Ли и модулей любой размерности.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-09148).

Список литературы

- [1] П. П. Кулиш, В. Д. Ляховский, О. В. Постнова, *ТМФ*, **171**:2 (2012), 283–293.
- [2] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *J. Phys. Conf. Ser.*, **343**:1 (2012), 012095, 7 pp.
- [3] H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, Dover, New York, 1977.
- [4] H. Bethe, *Z. Phys.*, **71**:3–4 (1931), 205–226.
- [5] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **109** (1981), 134–178.
- [6] Б. А. Бондаренко, *Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения*, Фан, Ташкент, 1990.
- [7] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *J. Phys. Conf. Ser.*, **343**:1 (2012), 012070.
- [8] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, O. V. Postnova, *J. Phys. Conf. Ser.*, **346**:1 (2012), 012012, arXiv: 1106.2002.
- [9] А. Н. Кириллов, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **131** (1983), 88–105.
- [10] А. Н. Кириллов, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **205** (1993), 30–37.
- [11] M. Kleber, “Finite dimensional representations of quantum affine algebras”, arXiv: math/9809087.
- [12] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, Berlin, 1997.