Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, Разностное уравнение Шредингера и квазисимметрические многочлены, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 2, 200–211

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 07:09:10

© 2015 г.

А. Б. Шабат*

РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Исследуется особенность в точке $k = 0$ решений уравнения Шредингера с финитным потенциалом. Показано, что характер этой особенности в случае дельтаобразных потенциалов является в определенном смысле автомодельным. Обсуждаются приложения полученных результатов к приближенному решению обратной задачи рассеяния на всей оси, для чего вводится понятие квазисимметрического многочлена, ассоциированного с заданной кривой.

Ключевые слова: оператор Шредингера, функция Грина, дополнительный спектр, разностные модели.

DOI: 10.4213/tmf8933

1. ДЕЛЬТАОБРАЗНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Рассматривая теорию рассеяния для уравнения Шредингера с финитным потенциалом, мы заменяем, следуя работе [1], потенциал $q(x)$ (не обязательно конечной) суммой дельта-функций:

$$\psi_{xx} = [k^2 + q(x)]\psi, \quad q(x) = \sum \gamma_j \delta(x - x_j). \quad (1)$$

Наличие в дифференциальном уравнении $\psi_{xx} = U(x, k)\psi$ дополнительного параметра k является характерной чертой теории рассеяния, и специальный интерес представляет исследование поведения решений в окрестности особых точек в нуле и на бесконечности. При $k = 0$ уравнение (1) упрощается, и график его кусочно-линейного решения $\psi(x)$ определяется условиями непрерывности и условиями на скачки его производной $\psi' = \psi_x$ в точках $x = x_j$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \psi(x_{j+1}) &= \psi(x_j) + l_j g_j, & g_j &= g_{j-1} + \gamma_j \psi(x_j), \\ l_j &\stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} - x_j, & g_j &= \psi'(x_j + 0). \end{aligned} \quad (2)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: shabat@itp.ac.ru

Рассматривая эти разностные уравнения как дискретный аналог дифференциального уравнения второго порядка, мы получаем, исключив $\psi(x_j)$, следующую достаточно простую рекуррентную формулу для вычисления g_j :

$$\frac{1}{\gamma_{j+1}}g_{j+1} + \frac{1}{\gamma_j}g_{j-1} = \left(\frac{1}{\gamma_{j+1}} + \frac{1}{\gamma_j} + x_{j+1} - x_j \right) g_j. \quad (3)$$

С другой стороны, при $k \neq 0$ общее решение уравнения (1) на отрезке $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ между узлами записывается в виде линейной комбинации экспонент:

$$\psi(x, k) = a_n e^{kx} + b_n e^{-kx}, \quad x \in I_n. \quad (4)$$

В этом случае условия сшивки производных ψ_x в узлах x_j определяют формулы расчета коэффициентов $(a, b)_n = (a_n, b_n)$ разложений (4) при переходе с отрезка I_{n-1} на следующий отрезок I_n . Переписав эти формулы в матричном виде, мы получаем

$$(a_j, b_j) = (a_{j-1}, b_{j-1}) S_j(k), \quad S_j(k) = \begin{pmatrix} 1 + \hat{\gamma}_j & -e_j \hat{\gamma}_j \\ \bar{e}_j \hat{\gamma}_j & 1 - \hat{\gamma}_j \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Элементы полученных *матриц перехода* $S_j(k)$ выражаются через безразмерные коэффициенты $\hat{\gamma}_j$ потенциала (1) и координаты узлов x_j по следующим формулам:

$$\hat{\gamma}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\gamma_j}{2k}, \quad e_j = e^{2kx_j}, \quad \bar{e}_j = e^{-2kx_j}. \quad (6)$$

Перемножение нескольких матриц перехода (5) соответствует, очевидно, последовательному пересечению нескольких следующих друг за другом узлов x_j . Ясно, что элементы полученной результирующей матрицы являются голоморфными функциями комплексной переменной k всюду, за исключением точки $k = 0$, а в пределе $k \rightarrow 0$ мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть матрица $S(k; n)$ является упорядоченным произведением $n \geq 1$ матриц перехода $S_j(k)$:

$$S(k; n) = S_1(k) S_2(k) \dots S_n(k) = \begin{pmatrix} a(n, k) & b(n, k) \\ b(n, -k) & a(n, -k) \end{pmatrix}, \quad \det S(k; n) = 1. \quad (7)$$

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow 0} 2k S(k; n) = g(n) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где

$$g(n) = \sum_{j=1}^n \gamma_j + \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j x_{ji} + \sum_{i < j < l} \gamma_i \gamma_j \gamma_l x_{ji} x_{lj} + \dots, \quad x_{ij} = x_i - x_j. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ утверждение теоремы следует из формулы (5). Используя соотношение

$$S(k; n) = S(k; n-1) \begin{pmatrix} 1 + \hat{\gamma}_n & -e_n \hat{\gamma}_n \\ \bar{e}_n \hat{\gamma}_n & 1 - \hat{\gamma}_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

мы получаем, опуская в правых частях для краткости зависимость от параметра k , равенства

$$\begin{aligned} 2ka(n, k) &= \gamma_n[a(n-1) + b(n-1)] + 2ka(n-1) + \gamma_n(\bar{e}_n - 1)b(n-1), \\ 2kb(n, k) &= -\gamma_n[a(n-1) + b(n-1)] + 2kb(n-1) - \gamma_n(e_n - 1)a(n-1). \end{aligned}$$

Отсюда выводится регулярность в точке $k = 0$ суммы $a(n, k) + b(n, k)$ при любом n , а также и сама формула (8). Явный вид коэффициента (9) в этой формуле определяется при помощи цепочки уравнений (3)¹⁾, дополненных начальными данными $g(0) = 0$, $g(1) = \gamma_1$. Теорема доказана.

Найдем вид цепочки уравнений, аналогичной (3), при $k \neq 0$. Отметим, что соответствующие дискретные уравнения второго порядка записываются в виде

$$\beta_{j+1}f(j+1) + \beta_j f(j-1) = \alpha_j f(j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

и что характерным свойством уравнений этого вида является закон сохранения *дискретного вронскиана*:

$$\langle f, g \rangle_j \stackrel{\text{def}}{=} \beta_j[f(j)g(j-1) - f(j-1)g(j)] = \text{const}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

где $f(j)$ и $g(j)$ – произвольные решения дискретного уравнения (11). Вид коэффициентов α_j роли при этом не играет.

ЛЕММА 1. При произвольном $k \in \mathbb{C}$ элементы $a(j) = a(j, k)$ и $\tilde{b}(j) = b(j, -k)$ произведения $j \geq 1$ матриц перехода (см. формулу (7)) удовлетворяют следующему разностному уравнению Шредингера с оператором сдвига $T: j \mapsto j+1$:

$$(T-1) \circ \beta \circ (1-T^{-1})f = \frac{1}{2k}(T-1)(e)f, \quad \beta = \beta_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e_j}{\gamma_j}, \quad e = e_j \stackrel{\text{def}}{=} e^{2kx_j}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемое уравнение является следствием рекуррентной формулы (10), переписанной в следующем виде:

$$\begin{aligned} a(n, k) &= (1 + \hat{\gamma}_n)a(n-1, k) + \hat{\gamma}_n \bar{e}_n b(n-1, k), \\ b(n, k) &= -\hat{\gamma}_n e_n a(n-1, k) + (1 - \hat{\gamma}_n)b(n-1, k). \end{aligned} \quad (14)$$

Действительно, исключение $b(n, k)$ из этой системы уравнений при помощи формул

$$b(n, k) = \frac{e_{n+1}}{\hat{\gamma}_{n+1}}[a(n+1, k) - (1 + \hat{\gamma}_{n+1})a(n, k)], \quad n > 0, \quad b(0, k) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad (15)$$

дает уравнение для $a(n, k)$ вида (11) с коэффициентами

$$\beta_j = \frac{e_j}{\gamma_j}, \quad \alpha_j = \beta_j + \beta_{j+1} + \frac{e_{j+1} - e_j}{2k}, \quad e_j = e^{2kx_j}. \quad (16)$$

Тот факт, что $f(j) = b(j, -k)$ удовлетворяет тому же дискретному уравнению (11) с учетом (16), следует из симметрии дискретной системы уравнений (14) относительно замены $k \rightarrow -k$. Наконец, раскрыв скобки в разностном уравнении (13), можно проверить совпадение двух форм дискретных уравнений, рассматриваемых в лемме.

¹⁾Ниже мы покажем, что формула (9) дает также общее решение этого дискретного уравнения.

Ограничившись для наглядности случаем трех узлов,

$$q(x) = \gamma_1 \delta(x - x_1) + \gamma_2 \delta(x - x_2) + \gamma_3 \delta(x - x_3),$$

приведем для последующих ссылок явные формулы для двух решений $a^\pm$ уравнений (11), удовлетворяющих граничным условиям $a^\pm = 1$ соответственно на левом x_1 и правом x_3 концах цепочки. Здесь и далее в дополнение к формулам (4) на конечных отрезках мы будем доопределять решение уравнения (1) на полубесконечных интервалах $I_0 = (-\infty, x_1]$ и $I_3 = [x_3, \infty)$, полагая $a_0^+ = 1$, $b_0^+ = 0$ на I_0 и $a_3^- = 0$, $b_3^- = 0$ на I_3 . Для того чтобы продолжить решение разностного уравнения (11) на всю дискретную ось, можно положить $\gamma_j = 0$ при $j \leq 0$ и $j > n$ и переписать уравнение (11), умножив его на $\beta_j \beta_{j+1}$, в следующем виде:

$$\hat{\gamma}_j \bar{e}_j f(j+1) + \hat{\gamma}_{j+1} \bar{e}_{j+1} f(j-1) = [\hat{\gamma}_j \bar{e}_j + \hat{\gamma}_{j+1} \bar{e}_{j+1} + \hat{\gamma}_j \hat{\gamma}_{j+1} (\bar{e}_j - \bar{e}_{j+1})] f(j). \quad (17)$$

ПРИМЕР 1. В обозначениях теоремы 1, перемножив матрицы $S_1(k)$, $S_2(k)$ и $S_3(k)$, мы получаем

$$a(3, k) = 1 + \sum_j \hat{\gamma}_j + \sum_{i < j} \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_j E_{ij} + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{12} E_{23},$$

$$b(3, -k) = \sum \bar{e}_j \hat{\gamma}_j + \bar{e}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 E_{12} + \bar{e}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3 E_{13} + \bar{e}_2 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{23} + \bar{e}_1 \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{12} E_{23},$$

где $E_{ij} = 1 - e^{2k(x_i - x_j)}$. Используя лемму 1, имеем

$$a_0^+ = 1, \quad a_1^+ = 1 + \hat{\gamma}_1, \quad a_2^+ = 1 + \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 E_{12}, \quad a_3^+ = a(3, k), \quad (18)$$

где формула для a_2^+ получается из “многочлена” $a(3, k)$ при $\hat{\gamma}_3 = 0$ и т. д. Двойственное к (18) решение a^- уравнения (11),

$$a_0^- = a(3, -k), \quad a_1^- = 1 - \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{32}, \quad a_2^- = 1 - \hat{\gamma}_3, \quad a_3^- = 1, \quad (19)$$

нетрудно найти, рассмотрев произведение матриц, обратных к матрицам (5). Непосредственное вычисление вроскиана (12) построенных двух решений $a^\pm$ приводит к формуле

$$\langle a^+, a^- \rangle_j = \frac{1}{2k} b(3, k), \quad j = 2, 3.$$

Характер аналитической зависимости от k решений дискретного уравнения (11) определяется, как будет показано ниже, интегралами вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_+} \frac{P(k)}{Q(k)} e^{-kx} dk, \quad (20)$$

где $P(k)$ и $Q(k)$ – многочлены от $k \in \mathbb{C}$ (ср. с монографией [2]), а интегрирование производится по границе ∂K_+ правой полуплоскости комплексной переменной k :

$$K_+ = \{k \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} k \geq 0\}. \quad (21)$$

Здесь имеется в виду, что интеграл не зависит от пути интегрирования для функций $f(k)$, допускающих аналитическое продолжение с вертикальной оси (которая

рассматривается как граница правой полуплоскости K_+). Связь представления (20) с обычным интегралом Фурье

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx \quad (22)$$

устанавливает очевидная формула

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_+} f(k) e^{-kx} dk, \quad \xi = ik, \quad (23)$$

где $\hat{\varphi}(\xi) = f(-i\xi)$. Коэффициенты (16) дискретного уравнения (11) выписаны ниже в теореме 2 в виде интегралов (20), соответствующих преобразованиям Фурье от дельта-функций и характеристических функций отрезков I_n .

ПРИМЕР 2. Для характеристической функции $\chi(x)$ отрезка $I = [x_1, x_2]$ с концами x_1 и x_2 интеграл (20) записывается как

$$\chi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_+} (e^{k(x_2-x)} - e^{k(x_1-x)}) \frac{dk}{k} = \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases} \quad (24)$$

В случае дельта-функции $\varphi(x) = \delta(x - x_1)$ интеграл Фурье (22) дает $\hat{\varphi}(\xi) = e^{-i\xi x_1}$, и формула (23) принимает вид

$$\delta(x - x_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_+} e^{k(x_1-x)} dk. \quad (25)$$

Напомним (см. соотношения (2)), что при $k = 0$ уравнение (1) вырождается и его решениями являются непрерывные кусочно-линейные функции $\psi(x)$. График решения $\psi(x)$ полностью определяется значениями $\psi_j = \psi(x_j)$ функции в узлах x_j , $j = 1, 2, \dots$, а наклон $\psi'(x) = g_j$ ломаной определяется на каждом из отрезков $x_j \leq x < x_{j+1}$ формулами

$$g_j = \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{x_{j+1} - x_j}, \quad x \in I_j \quad (26)$$

(см. рис. 1). Это позволяет установить взаимно однозначное соответствие между ломаными Γ и дельтаобразными потенциалами, при котором узлам x_j потенциала соответствуют углы ломаной, а величина этих углов определяет коэффициенты γ_j перед дельта-функциями. Полученные таким образом дельтаобразный потенциал и многочлен из формулы (9) мы будем обозначать через

$$q_\Gamma(x) = \sum \gamma_j \delta(x - x_j), \quad g_\Gamma(n) = g(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Для аналитического продолжения данного соответствия на ненулевые значения $k \in \mathbb{C}$ подходит, как оказывается, формула (24), записанная в виде

$$x_j - x_i \rightarrow \hat{E}_{ij}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - e^{2k(x_i - x_j)}}{2k}. \quad (28)$$

Рис. 1. Функция $\psi(x, 0)$. Здесь $l_j = 0.48, 0.59, 0.35, 0.43, 0.44, 0.50, 0.42, 0.49$ и $\gamma_j = -4.75, 3.25, -3.34, 3.04, -5.14, 5.89, -5.89, 3.50$.

Напомним, что в силу (9) при любом $n > 1$ многочлен $g_\Gamma(n)$ от $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ имеет положительные коэффициенты, записанные в терминах произведений расстояний $x_j - x_i$, $i < j$, между узлами. Легко видеть, что в пределе $k \rightarrow 0$ коэффициенты (16) дискретного уравнения (11) переходят в коэффициенты уравнения (3) и что $2k[a(n, k) - 1] \rightarrow g(n)$ (см. теорему 1). Используя совпадение с точностью до замены (28) коэффициентов разностных уравнений (11) и (3), мы можем доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ломаная Γ с узлами x_j , $j = 1, 2, \dots$, определяет график функции $\psi(x) = 1$, $x \leq x_1$. Тогда замена (28) в коэффициентах многочлена $g_\Gamma(n)$ определяет его продолжение $g_\Gamma(n, k)$ на всю комплексную плоскость и полученная таким образом целая функция от $k \in \mathbb{C}$ удовлетворяет соотношению

$$2k[a(n, k) - 1] = g_\Gamma(n, k). \quad (29)$$

В качестве иллюстрации к теореме 2 можно получить тождество (29) при $n = 3$, сравнив формулу для $a(3, k)$ из примера 1 с формулой

$$g(3) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j x_{ji} + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 x_{21} x_{32}. \quad (30)$$

Уточним взаимно однозначное соответствие

$$\Gamma \longleftrightarrow g_\Gamma(n) \quad (31)$$

между ломаными Γ и многочленами вида (30), которые мы называем *квазисимметрическими*. Считая заданным многочлен $g(n)$, рассмотрим разностное уравнение

$$(T - 1) \circ \frac{1}{l} \circ (1 - T^{-1})\psi = \gamma\psi, \quad l = l_j \stackrel{\text{def}}{=} x_{j+1} - x_j, \quad \gamma = \gamma_j. \quad (32)$$

Из формул (2) и (26) следует, что уравнение (32) является двойственным к (3). Решения $\psi_j = \psi(x_j)$ этого уравнения, определяющего ломаную Γ , записываются

в терминах заданного многочлена $g(n)$ формулами, аналогичными (18), (19). Точнее, эти формулы для пары решений $\varphi^\pm$ уравнения (32), удовлетворяющих тем же краевым условиям, что и $a^\pm$ из примера 1, можно определить в случае n узлов следующими явными выражениями (ср. с работой [1]):

$$\begin{aligned} \varphi_1^+ &= 1, \quad \varphi_2^+ = 1 + \gamma_1 x_{21}, \quad \varphi_3^+ = 1 + \gamma_1 x_{31} + \gamma_2 x_{32} + \gamma_1 \gamma_2 x_{21} x_{32}, \dots, \\ \varphi_1^- &= g(n), \quad \varphi_2^- = g^{(1)}(n), \quad \varphi_3^- = g^{(2)}(n), \dots, \varphi_{n-1}^- = 1 + \gamma_n (x_n - x_{n-1}), \quad \varphi_n^- = 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $\varphi_n^+ = \varphi_1^- = g(n)$, а значение $g^{(1)}(n)$ получается из $g(n)$ при $\gamma_1 = 0$, значение $g^{(2)}(n)$ – при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и т. д. Вычисление разностного вронскиана (12) для этих двух решений уравнения (32) приводит также к формуле

$$\langle \varphi^+, \varphi^- \rangle_j = \frac{1}{l_j} (\varphi_j^+ \varphi_{j-1}^- - \varphi_{j-1}^+ \varphi_j^-) = g(n).$$

Резюмируя, можно сказать, что квазисимметрический многочлен $g(n)$ и построенный по нему *квазимногочлен* (очевидно, тот же, что и в формуле (29))

$$a(n, k) = 1 + \sum_1^n \hat{\gamma}_j + \sum_{i < j} \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_j E_{ij} + \sum_{i < j < l} \hat{\gamma}_i \hat{\gamma}_j \hat{\gamma}_l E_{ij} E_{jl} + \dots \quad (34)$$

играют роль производящих функций при построении решений разностных уравнений (32) и (13) соответственно. При этом в последнем случае значения решений $a^\pm(j)$, $j = 1, \dots, n$, построенных по квазимногочлену (34), получаются так же, как в формуле (33): последовательным приравниванием нулю аргументов $\hat{\gamma}_i$ у многочлена $a(n, k)$. Таким образом, явные формулы примера 1 обобщаются на произвольное произведение n матриц перехода (7) и сводятся в конечном счете к квазисимметрическому многочлену $g(n)$ из теоремы 1.

Заметим также, что однородной задаче Дирихле для разностного уравнения (32) в случае n узлов соответствует трехдиагональная “матрица Якоби” J следующего вида:

$$J = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_1 & 1/l_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/l_1 & \tilde{\gamma}_2 & 1/l_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1/l_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 1/l_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1/l_{n-1} & \tilde{\gamma}_n \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где $\tilde{\gamma}_j = 1/l_j + 1/l_{j+1} - \gamma_j$. Кроме того, заметим, что для равномерной решетки разностное уравнение (32) с $l_j = x_{j+1} - x_j = h$ записывается как

$$\frac{1}{h} (\psi_{j+1} + \psi_{j-1} - 2\psi_j) = \gamma_j \psi_j. \quad (36)$$

В заключение этого раздела отметим, что для уравнения Шредингера с вещественным потенциалом (1) в виде финитной суммы дельта-функций число собственных значений конечно и, в силу осцилляционных теорем Штурма, совпадает с числом перемен знака в последовательностях $\varphi_j^\pm$, $j = 1, 2, \dots, n$, которые определяются

формулами (33). Таким образом, квазисимметрический многочлен $g(n)$ позволяет, в частности, сформулировать условие положительности оператора Штурма–Лиувилля $L = -D_x^2 + q(x)$ как условие отсутствия перемен знака в последовательностях (33). Это условие в определенном смысле аналогично известному критерию Якоби положительности квадратной матрицы, согласно которому требуется положительность ее главных миноров.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Для оператора Штурма–Лиувилля L общего вида с финитным потенциалом $q(x)$ роль квазимногочлена (34) играет коэффициент $a(k)$ в формуле

$$\psi^+(x, k) = e^{kx}, \quad x \ll 0 \iff \psi^+(x, k) = a(k)e^{kx} + b(k)e^{-kx}, \quad x \gg 0. \quad (37)$$

Функция $\psi^+(x, k)$ определяется тем самым как решение задачи Коши для уравнения Шредингера с данными e^{kx} левее носителя потенциала и поэтому при фиксированном x является голоморфной функцией от k во всей комплексной плоскости. Аналогичными свойствами обладает функция $\psi^-(x, k)$, которая определяется как решение задачи Коши с данными e^{-kx} правее носителя потенциала. Легко видеть, что

$$a(k) = -\frac{1}{2k} \langle \psi^+, \psi^- \rangle, \quad \psi^-(x, k) = a(k)e^{-kx} + b(-k)e^{kx}, \quad x \ll 0. \quad (38)$$

Здесь угловые скобки обозначают не зависящий от x вронскиан двух рассматриваемых решений уравнения Шредингера $\psi'' = (k^2 + q(x))\psi$:

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g_x(x) - f_x(x)g(x). \quad (39)$$

Точнее говоря, рассматриваемые два решения $\psi^\pm$ уравнения Шредингера, называемые функциями Йоста, определяются как решения интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \phi^+(x, k) &= 1 + \int_{-\infty}^x R(x-x', k)q(x')\phi^+(x', k) dx', & \psi^+(x, k) &= \phi^+(x, k)e^{kx}, \\ \phi^-(x, k) &= 1 + \int_x^{\infty} R(x'-x, k)q(x')\phi^-(x', k) dx', & \psi^-(x, k) &= \phi^-(x, k)e^{-kx}. \end{aligned} \quad (40)$$

Разностное ядро $R(y, k)$, $y \geq 0$, допускает здесь при $k \in K_+$ (см. формулу (21)) оценку

$$R(y) = \frac{1 - e^{-2ky}}{2k} \implies |R(y)| \leq \int_0^y |e^{-2ks}| ds \leq y, \quad k \in K_+, \quad y \geq 0. \quad (41)$$

В случае финитного дельтаобразного потенциала

$$q(x) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \delta(x - x_j), \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < x_N, \quad (42)$$

уравнения (40) позволяют при выполнении условий

$$\sum |\gamma_j| + \sum |x_j \gamma_j| \leq M = \text{const} \quad (43)$$

получить (см. работу [1]) равномерные (т.е. зависящие только от M) оценки для $|\phi^\pm(x, k)|$ в правой полуплоскости K_+ , включая точку $k = 0$. Начиная с работы Повзнера [3] известно также, что в общем случае условие

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|q(x)| dx < \infty \quad (44)$$

обеспечивает однозначную разрешимость интегральных уравнений (40) методом итераций и равномерные оценки для $|\phi^\pm(x, k)|$ в правой полуплоскости K_+ .

Для дельтаобразного потенциала (42), как было отмечено в работе [1], метод итераций за конечное число шагов приводит к точным решениям интегральных уравнений (40). При этом ось x , как и в предыдущем разделе, разбивается на $N - 1$ конечных отрезков $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ и два полубесконечных интервала $I_0 = (-\infty, x_1]$, $I_N = [x_N, \infty)$, а для $\phi^-(x, k)$ метод итераций приводит к рекуррентной формуле для продолжения решения с I_n на I_{n-1} (для краткости мы опускаем иногда зависимость от k):

$$\phi_{n-1}^-(x) = \tilde{\phi}_n^-(x) + \hat{\gamma}_n \phi_n^-(x_n)(1 - \bar{e}_n e^{2kx}), \quad \phi_N^-(x) = 1. \quad (45)$$

В этой формуле нижний индекс j указывает номер интервала I_j , на котором строится решение, а $\tilde{\phi}_n^-$ обозначает продолжение решения, полученного ранее на I_n , на интервал I_{n-1} в виде (4).

ПРИМЕР 3. При $N = 3$ мы получаем, применив формулу (45) с граничным условием $\phi_3^-(x, k) = 1$,

$$\begin{aligned} \phi_2^-(x) &= 1 + \hat{\gamma}_3(1 - \bar{e}_3 e^{2kx}), \\ \phi_1^-(x) &= 1 + \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{23} - e^{2kx}(\bar{e}_2 \hat{\gamma}_2 + \bar{e}_3 \hat{\gamma}_3 + \bar{e}_2 \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{23}), \\ \phi_1^-(x_1) &= 1 + \hat{\gamma}_3 E_{13} + \hat{\gamma}_2 E_{12} + \hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_3 E_{12} E_{23}, \\ \phi_0^-(x) &= \tilde{\phi}_1^-(x) + \hat{\gamma}_1 \phi_1^-(x_1)(1 - \bar{e}_1 e^{2kx}). \end{aligned}$$

Аналогично при $\phi_0^+(x) = 1$ мы получаем, используя метод итераций, решение первого из интегральных уравнений (40):

$$\phi_1^+(x) = 1 + \hat{\gamma}_1(1 - e_1 e^{-2kx}), \quad \phi_2^+(x) = a(2) + b(2)e^{-2kx}, \quad \phi_3^+(x) = a(3) + b(3)e^{-2kx}.$$

Нижний индекс в этих формулах указывает интервал I_n , на котором рассматривается решение, а $a(n) = a(n, k)$ и $b(n) = b(n, k)$, как и в теореме 1, обозначают элементы первой строки произведения n матриц перехода из формулы (7). Непосредственное вычисление вронскиана (39) полученных функций Йоста (ср. с примером 1) дает

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle = \langle a(3, k)e^{kx} + b(3, k)e^{-kx}, e^{-kx} \rangle = -2ka(3, k). \quad (46)$$

Из формулы (38) следует (ср. с теоремой 1), что функция $2ka(k)$ является целой функцией от k и не имеет особенностей в точке $k = 0$ для финитных потенциалов общего вида. Такими же свойствами обладает функция $2kb(k)$, и в работе [4] приведено доказательство теоремы единственности для задачи о восстановлении финитного потенциала $q(x)$ по двум целым функциям $2ka(k)$ и $2kb(k)$. Кроме того, используя приведенные выше интегральные уравнения (40), легко доказать, что

указанные функции являются целыми функциями экспоненциального типа и однозначно восстанавливаются по своим нулям. В работе [5] в случае дельтаобразных потенциалов с двумя и тремя узлами было исследовано несколько примеров задачи о нулях вронскиана (38). В результате численных экспериментов были установлены, в частности, асимптотические формулы для двух бесконечных последовательностей комплексных нулей $k_n^\pm = \xi_n \pm i\eta_n$ квазимногочлена $a(3, k)$ из примера 1 в случае $\gamma_j = \pm 2$ для всех j и $x_{21} = x_{32} = 1$. Общий вид указанной в работе [5] асимптотической формулы для комплексных корней вронскиана (38) сохраняется и, например, при $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 3$. В этом случае, как показывают вычисления,

$$k_1^\pm \approx -0.302 \pm 1.563i, \quad k_n^\pm = \xi_n \pm i\eta_n, \quad \eta_n \approx \frac{n\pi}{2} \quad \text{при } n \geq 1 \quad (47)$$

и $\xi_n \approx -0.514 \ln n$ для $n \gg 1$.

Представляет интерес задача аналитического описания свойств этих кривых, на которых располагаются нули целых функций вида (29), в зависимости от параметров потенциала. В случае $N = 3$ из формул примера 1 следует, что при $\operatorname{Re} k < 0$ приближенная формула для вронскиана имеет следующий вид:

$$a(3, k) \approx 1 - \frac{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{8k^3} \left(\left(\frac{2k}{\gamma_1} + 1 \right) e^{2kx_{23}} + \left(\frac{2k}{\gamma_2} - 1 \right) e^{2kx_{13}} + \left(\frac{2k}{\gamma_3} + 1 \right) e^{2kx_{12}} \right), \quad (48)$$

где $\operatorname{Re} k \ll 0$.

Выписанные в примере 3 формулы для функций Йоста $\psi^\pm(x, k)$ служат полезным дополнением к формулам в примерах 1, 3 и теореме 2 и позволяют перейти к изучению *функции Грина*

$$G(x, x'; k) = \frac{1}{\langle \psi^+, \psi^- \rangle} \psi^+(x, k) \psi^-(x', k), \quad (49)$$

которая соответствует при $k \in K_+$ нулевым краевым условиям на обеих бесконечностях. Как уже говорилось, функции Йоста $\psi^\pm(x, k)$ в случае финитного потенциала общего вида являются целыми функциями экспоненциального типа и восстанавливаются, следовательно, по своим нулям с использованием известных в теории целых функций формул [2] типа

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) = \pi z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z}, \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{nz}. \quad (50)$$

Вместо функции Грина мы вводим в рассмотрение *амплитудную* функцию

$$A(x, k) = \psi^+(x, k) \psi^-(x, k), \quad (51)$$

которая является произведением функций Йоста, соответствует диагональным значениям $G(x, x; k)$ функции Грина (49), но не имеет особенностей в нулях вронскиана (46). В простейшем случае (ср. с формулой (50))

$$q(x) = \gamma_1 \delta(x - x_1) \implies A = 1 + \frac{\gamma_1}{2k} (1 - e^{-2k|x-x_1|}) = 1 + \gamma_1 \int_0^{|x-x_1|} e^{-2kt} dt.$$

Следующее утверждение остается верным в широком классе потенциалов, удовлетворяющих условию (44) и не обязательно финитных (ср. с работой [1]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k \in K_+$ и $2ka(k) = \langle \psi^-, \psi^+ \rangle \neq 0$. Тогда однозначно разрешима следующая краевая задача для амплитудной функции (51):

$$A_{xxx} = 4UA_x + 2U_xA, \quad A(x, k) \rightarrow a(k), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} k > 0, \quad (52)$$

где $U = U(x, k) = q(x) + k^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см., например, статью [6]), из формул

$$D \ln \psi^\pm = \frac{\psi_x^\pm}{\psi^\pm}, \quad \langle \psi^+, \psi^- \rangle = \psi^+ \psi_x^- - \psi_x^+ \psi^- = -2ka(k)$$

и уравнения Риккати следует, что амплитудная функция (51) удовлетворяет билинейному уравнению

$$4U(x, k)A^2 + A_x^2 - 2AA_{xx} = 4k^2a^2(k), \quad (53)$$

дифференцирование которого дает линейное уравнение (52) третьего порядка. Билинейному уравнению (53) с нулевой правой частью удовлетворяют квадраты функций Йоста $(\psi^\pm)^2$. Можно проверить [6], что вронскиан указанных трех решений линейного уравнения (52) пропорционален $\langle \psi^-, \psi^+ \rangle^3$. Поэтому при $2ka(k) \neq 0$ общее решение $\Phi(x, k)$ этого линейного уравнения записывается в виде

$$\Phi(x, k) = c_1 \psi^+(x, k) \psi^-(x, k) + c_2 (\psi^+(x, k))^2 + c_3 (\psi^-(x, k))^2.$$

Отсюда, применив граничные условия, при $\operatorname{Re} k > 0$ находим, что

$$\Phi(x, k) - a(k) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty \iff c_2 = c_3 = 0, \quad c_1 = a(k).$$

Теорема доказана.

Отметим в дополнение к теореме 3, что в случае финитного потенциала общего вида левее и правее носителя потенциала имеют место соотношения

$$a(k) + b(-k)e^{2kx} \leftarrow A(x, k) = \psi^+(x, k)\psi^-(x, k) \rightarrow a(k) + b(k)e^{2kx}, \quad (54)$$

являющиеся следствием формул (37) и (38) для функций Йоста. С другой стороны, в солитонном секторе $b(k) = 0$ и

$$a(k)a(-k) = 1, \quad a(k) = \prod_1^m \frac{k - k_j}{k + k_j}, \quad k_j \in K_+. \quad (55)$$

Вместо рациональной по переменной k амплитудной функции (51) удобно перейти в этом случае к пропорциональному ей, но удовлетворяющему условию четности $B(x, k) = B(x, -k)$ полиномиальному решению $B(x, k) = A(x, k) \prod (k^2 - k_j^2)$ уравнения третьего порядка (52) из теоремы 3. Переход от функций Йоста к их произведению $A(x, k) \propto B(x, k)$ приводит к интересным задачам, связанным с изучением так называемого дополнительного спектра оператора Шредингера, определяющегося нулями $k_j(x)$ амплитудной функции $A(x, k)$. Для полиномиальных решений уравнения (52) поведение этих корней $k_j(x)$ при изменении x управляется динамическими системами, играющими важную роль в классической теории гиперэллиптических функций и в современной теории интегрируемых систем [7].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопрос о правильном выборе данных в обратной задаче рассеяния для построения ее приближенного решения представляет несомненный интерес и является актуальным с разных точек зрения. В случае финитных потенциалов (ср. работу [8]) в рассматриваемом нами “конструктивном” подходе в качестве данных рассеяния выбирается “произвольная” кривая, моделирующая поведение функций Йоста при $k = 0$. Приблизив заданную кривую ломаной (см. рис. 1), мы получаем в качестве первого приближения дельтаобразный потенциал (42), собственные значения которого определяются вещественными нулями целой функции $2ka(N, k)$ из формулы (29) (см. теорему 2), расположенными в правой полуплоскости K_+ . Отметим, что число этих вещественных нулей совпадает с числом перемен знака выбранной ломаной (см. рис. 1) и в высокочастотном приближении [1]

$$a(N, k) \approx \prod_{j=1}^N \left(1 + \frac{\gamma_j}{2k}\right), \quad \operatorname{Re} k \gg 0. \quad (56)$$

Однако, в отличие от солитонного случая (55), вронскиан $a(N, k)$ экспоненциально растет в левой полуплоскости (см. формулу (48)), и дальнейшее продвижение в приближенном решении обратной задачи рассеяния требует построения модели, описывающей поведение решений краевой задачи (52) при умеренных значениях k . Мы рассчитываем привлечь для этого интерполяционную задачу, сформулированную в работе [6], и “кривые комплексных нулей” вронскиана, аналогичные (47).

Список литературы

- [1] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **183**:1 (2015), 105–119.
- [2] В. Levin, *Lectures on Entire Functions*, AMS, New York, 1996.
- [3] А. Повзнер, *Матем. сб.*, **23(65)**:1 (1948), 3–52.
- [4] А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 75–78.
- [5] М. Ш. Бадахов, О. Ю. Веремеенко, А. Б. Шабат, *Владикавказ. матем. журн.*, **16**:4 (2014), 34–40.
- [6] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **179**:3 (2014), 303–316.
- [7] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [8] Е. Korotyaev, *Inverse Problems*, **21**:1 (2005), 325–341.

Поступила в редакцию 8.03.2015