Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Быков, О дифференциальной геометрии раздутий,
ТМФ, 2015, том 185, номер 2, 313–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8934>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:53:12

© 2015 г.

Д. В. Быков*

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ РАЗДУТИЙ

Обсуждается локальная геометрия в окрестности сферы $\mathbb{CP}^1$, вложенной с отрицательным нормальным расслоением. Показано, что поведение кэлерова потенциала вблизи сферы, вложенной с заданным нормальным расслоением, можно определить с помощью формулы присоединения. Одним из сопутствующих результатов является построение (асимптотически локально комплексно-гиперболических) метрик Кэлера–Эйнштейна на тотальных пространствах линейных расслоений $\mathcal{O}(-m)$, $m \geq 3$, над $\mathbb{CP}^1$.

Ключевые слова: раздутие, формула присоединения, метрика Кэлера–Эйнштейна.

DOI: 10.4213/tmf8934

1. ВВЕДЕНИЕ

Раздутия – встречающаяся повсеместно конструкция в геометрии. Интуитивно раздутие можно представить себе как сферу $\mathbb{CP}^1$, вклеенную голоморфно “в точку” комплексной поверхности X , хотя возможно обобщение и на случай многообразий больших размерностей. Раздутия в физике известны, пожалуй, несколько меньше, но в настоящей статье мы покажем, что существуют ситуации, в которых они незаменимы. Следуя работе [1], в п. 1.1 мы опишем раздутия пространства-времени, возникающие при построении обычных инстантонов в калибровочных теориях. Другой пример, связанный с так называемыми “гравитационными инстантонами”, описывающими окрестности особенностей поверхностей КЗ, будет подробно разобран в сопутствующей статье [2]. Главная топологическая характеристика вложенной сферы $\mathbb{CP}^1$ – это степень ее нормального расслоения. В связи с этим вполне естественно исследовать общую ситуацию, когда сфера вложена с произвольным нормальным расслоением – именно на этом мы и сфокусируем внимание в основной части статьи. Оказывается, все эти случаи можно описать явно и весьма подробно при помощи методов дифференциальной геометрии. Поскольку в физических

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: dbykov@mi.ras.ru

приложениях как раз такие явные описания зачастую наиболее полезны, им будет уделено много внимания в настоящей работе.

Введем основные понятия. Под комплексной поверхностью X будем понимать алгебраическое многообразие комплексной размерности два, $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$, т. е. вещественной размерности четыре. В локальной карте можно выбрать две комплексные координаты z_1 и z_2 . Голоморфная сфера в комплексной поверхности – это копия сферы $\mathbb{CP}^1$, вложенная голоморфным образом в X . В настоящей статье будет сделано важное допущение относительно группы симметрии пространства X : мы потребуем, чтобы X допускало $U(2)$ в качестве группы изометрий. Это весьма сильное требование, которое позволит свести возникающие уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям и тем самым существенно упростит задачу. Вследствие $U(2)$ -инвариантности удобно ввести следующую комбинацию локальных координат (z_1, z_2) :

$$x := |z_1|^2 + |z_2|^2. \quad (1)$$

Один из основных результатов настоящей статьи состоит в том, что в $U(2)$ -инвариантном случае кэлеров потенциал вблизи сферы $\mathbb{CP}^1$, вложенной с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-m)$, имеет вид

$$K = a_m \ln x + b_m x^m + \dots \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad (2)$$

где $a_m, b_m > 0$. Здесь мы предполагаем, что $\mathbb{CP}^1$ вложена в начале координат, т. е. при $x = 0$. Эту формулу очень легко понять интуитивно. Если опустить все поправки к ведущему члену $\ln x$, то получится кэлеров потенциал на сфере $\mathbb{CP}^1$. Это означает, в частности, что для поверхности X он соответствует вырожденной метрике. Поэтому роль поправочного члена x^m состоит в том, что он снимает вырождение метрики в направлениях, “нормальных” ко вклеенной копии сферы $\mathbb{CP}^1$.

Окрестность сферы, вложенной с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-m)$, выглядит как тотальное пространство этого линейного расслоения. Назовем его Y_m . Как мы увидим, при $m \geq 3$ можно в достаточно явном виде построить метрику Кэлера–Эйнштейна на Y_m , имеющую характерную асимптотику (2) при $x \rightarrow 0$. Оказывается, что по сути мы получаем комплексное гиперболическое пространство (т. е. единичный шар в $\mathbb{C}^2$) со вклеенной в него сферой. Вблизи границы шара метрика стремится к метрике постоянной отрицательной кривизны, т. е. к метрике комплексного гиперболического пространства.

Структура статьи следующая.

- В п. 1.1 описано, каким образом возникают раздутия при деформации конструкции инстантонов Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина (АДХМ) в калибровочной теории.

- В п. 1.2 описана метрика Егучи–Хэнсона, т. е. риччи-плоская метрика на тотальном пространстве расслоения $\mathcal{O}(-2)$.

- В разделе 2 с использованием формулы присоединения дано доказательство того факта, что нормальное расслоение ко вложенной сфере $\mathbb{CP}^1$ “закодировано” в разложении кэлерова потенциала в окрестности данной сферы.

• В разделе 3 дан обзор основных топологических характеристик 4-многообразий и вводятся формулы Черна–Вейля, позволяющие найти топологические числа при помощи кэлера потенциала.

• В разделе 4 показано, что существуют метрики Кэлера–Эйнштейна отрицательной кривизны на тотальных пространствах расслоений $\mathcal{O}(-m)$ над $\mathbb{CP}^1$ при $m \geq 3$; эти метрики строятся явно; исследована топология соответствующих им комплексных поверхностей.

1.1. $\mathcal{O}(-1)$ расслоение над $\mathbb{CP}^1$. Инстантоны и раздутия. Цель данного пункта – описать, следуя работе [1], каким образом раздутое пространство $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ неизбежно возникает при рассмотрении естественной деформации уравнений АДХМ [3], описывающих пространство модулей инстантонов (калибровочных связностей с антисамодуальным тензором напряженности) на $\mathbb{R}^4$.

Пространство модулей $\mathcal{M}_{n,k}$ инстантонов калибровочной группы $U(n)$ и инстантонного заряда k проще всего описать как гиперкэлеров фактор $\mathbb{C}^{2k(n+k)} //_{\mathbb{H}} U(k)$. Чтобы ввести действие группы $U(k)$ на $\mathbb{C}^{2k(n+k)}$, удобнее всего рассматривать данное пространство как набор двух матриц B_0, B_1 размера $k \times k$ и двух матриц I, J размеров $k \times n$ и $n \times k$ соответственно. Точнее, лучше всего представлять себе эти матрицы как отображения,

$$B_0, B_1: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad I: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad J: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Тогда действие группы $U(k)$ на эти матрицы можно представить следующим образом:

$$B_{0,1} \rightarrow g B_{0,1} g^\dagger, \quad I \rightarrow g I, \quad J \rightarrow J g^\dagger, \quad \text{где } g \in U(k).$$

Определим отображения момента для действия группы $U(k)$:

$$\mu_{\mathbb{R}} := [B_0, B_0^\dagger] + [B_1, B_1^\dagger] + I I^\dagger - J^\dagger J, \quad \mu_{\mathbb{C}} = [B_0, B_1] + I J.$$

Уравнения АДХМ [3] имеют вид $\mu_{\mathbb{R}} = \mu_{\mathbb{C}} = 0$. Важный факт, связанный с этими уравнениями, состоит в том, что с математической точки зрения они не являются полностью естественными. Действительно, ничто не запрещает “центральный” член в правой части: $\mu_{\mathbb{R}} = \xi_1 \mathbb{1}_k$, $\mu_{\mathbb{C}} = (\xi_2 + i\xi_3) \mathbb{1}_k$. Следовательно, его естественно ввести в уравнения. Прежде чем исследовать эти уравнения более подробно, несколько упростим их. Так как пространство матриц $\mathbb{C}^{2k(n+k)}$ совпадает с $\mathbb{H}^{k(n+k)}$, существует кватернионная $SU(2)$ -симметрия, действующая на эти матрицы. При преобразованиях этой симметрии переменные (ξ_1, ξ_2, ξ_3) преобразуются, как вектор, и мы можем сделать так, чтобы этот вектор был направлен вдоль любой удобной нам оси, например, можно положить $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_1 := \xi > 0$, тогда получим уравнения

$$\mu_{\mathbb{R}} = \xi \mathbb{1}_k, \quad \mu_{\mathbb{C}} = 0. \quad (3)$$

При $\xi \neq 0$ эти уравнения более не описывают пространство модулей инстантонов на $\mathbb{R}^4$. Действительно, если на основе решения уравнений (3) построить калибровочное поле по правилам АДХМ, его кривизна не будет антисамодуальной (отклонения от антисамодуальности имеют порядок ξ). Следовательно, возникает вопрос о физической интерпретации деформированных уравнений (3). Были предложены

по крайней мере два ответа – они состоят в том, чтобы рассматривать (3) либо как пространство модулей инстантонов в некоммутативном пространстве $\mathbb{R}_\xi^4$ (т.е. $[x_1, x_2] \sim \xi$) [4], либо как пространство модулей инстантонов на коммутативном многообразии $X \neq \mathbb{R}^4$ [1]. Для нас наиболее полезна вторая интерпретация.

Для простоты ограничимся случаем группы $U(1)$ (т.е. $n = 1$) и инстантонного заряда $k = 1$. Удивительно, но факт, что в ξ -деформированном случае существуют инстантоны калибровочной группы $U(1)$ [1]. Мы не будем описывать, каким образом по заданному решению уравнений АДХМ строится калибровочное поле $A_\mu^{(1)}$, и просто выпишем ответ для напряженности поля:

$$F = \xi \left(\frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{x(\xi + x)} - \frac{\xi + 2x}{x^2(\xi + x)^2} \bar{z}_j dz_j \wedge z_k d\bar{z}_k \right), \quad (4)$$

где x определен в (1). Легко видеть, что при $x \rightarrow 0$, т.е. при приближении к центру инстантона, напряженность поля F принимает вид

$$F \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{x} - \frac{\bar{z}_j dz_j \wedge z_k d\bar{z}_k}{x^2},$$

а это есть не что иное, как форма Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^1$ с однородными координатами $(z_1 : z_2)$. В частности, это означает, что напряженность поля является плохо определенной величиной в пространстве $\mathbb{R}^4$, так как ее значение в точке $z_1 = z_2 = 0$ зависит от того, под каким углом z_2/z_1 мы подходим к началу координат. Иными словами, значения F образуют своего рода “ежик”. Важное наблюдение из работы [1] состояло в следующем: для того чтобы сделать калибровочное поле хорошо определенным, нужно изменить само пространство, а именно нужно раздуть точку $z_1 = z_2 = 0$ в $\mathbb{C}^2$. Формально раздутое многообразие X определяется уравнением

$$\widetilde{\mathbb{C}^2} = \{z_1 w_2 = z_2 w_1 \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1\}, \quad (5)$$

где $(w_1 : w_2)$ – однородные координаты на $\mathbb{CP}^1$. Очевидно, существует отображение проекции $\pi: \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$, которое имеет особенность в точке $z_1 = z_2 = 0$ – его якобиан обращается в нуль. Однако многообразие $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ неособое. Из выражения (5) видно, что пути в $\mathbb{C}^2$, ведущие к началу координат под разными углами, заканчиваются в различных точках сферы $\mathbb{CP}^1$. Следовательно, в этом случае “ежик” оказывается размазанным по $\mathbb{CP}^1$, и напряженность поля F однозначно определена в каждой точке сферы $\mathbb{CP}^1$.

И это еще не все. Из работы [1] следует, что напряженность поля (4) является антисамодуальной на $\widetilde{\mathbb{C}^2}$, если на этом многообразии выбрать метрику, индуцированную метрикой в $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$. Весьма полезно понять, что собой представляет эта метрика. Кэлеров потенциал в $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$ имеет вид $K_0 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ln(|w_1|^2 + |w_2|^2)$, и из (5) следует, что $w \propto z$, поэтому индуцированный кэлеров потенциал таков:

$$K = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ln(|z_1|^2 + |z_2|^2) = \ln x + x. \quad (6)$$

Ниже мы увидим, что это поведение универсально для кэлерова потенциала вблизи сферы $\mathbb{CP}^1$, вклеенной с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-1)$. Как уже говорилось выше, одна из задач настоящей статьи – рассмотреть на равных основаниях ситуации,

¹⁾Это описано, например, в книге [5].

когда $\mathbb{CP}^1$ вклеена в точку комплексной поверхности с произвольным отрицательным нормальным расслоением $\mathcal{O}(-m)$, $m \geq 1$, в этом случае поведение кэлерова потенциала имеет вид (2).

1.2. $\mathcal{O}(-2)$ расслоение над $\mathbb{CP}^1$. Метрика Егучи–Хэнсона. В этом разделе мы исследуем другую метрику, которая описывает, в частности, геометрию вблизи сферы, вклеенной с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-2)$. Речь идет о метрике Егучи–Хэнсона – простейшем примере метрики Калаби–Яу, которую можно построить на тотальном пространстве канонического расслоения. В качестве базы берется $\mathbb{CP}^1$, поэтому каноническое расслоение – это $K = \mathcal{O}(-2)$. Будем искать кэлеров потенциал в виде

$$K = K(|z_1|^2 + |z_2|^2). \quad (7)$$

В данной формуле K – функция, которую нам предстоит определить из условия, что результирующая кэлерова метрика является риччи-плоской. Важный факт, который существенно упрощает вычисления, состоит в том, что для произвольной кэлеровой метрики $g_{i\bar{j}}$ ее тензор Риччи $R_{i\bar{j}}$ эрмитов и дается явной формулой

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} \ln \det \|g_{m\bar{n}}\|.$$

В частности, отсюда следует, что он определяет замкнутую 2-форму. Для того чтобы она была равна нулю, $\det \|g_{m\bar{n}}\|$ должен быть произведением голоморфной и антиголоморфной функций.

Метрика, отвечающая кэлерову потенциалу (7), имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} K' + |z_1|^2 K'' & \bar{z}_2 z_1 K'' \\ z_2 \bar{z}_1 K'' & K' + |z_2|^2 K'' \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из условия $\det \|g_{m\bar{n}}\| = |\sigma(z)|^2$, означающего, что метрика является риччи-плоской, вытекает, что $K'(K'x)' = |\sigma(z)|^2$. Это равенство может быть выполнено, только если $|\sigma(z)|^2 = \text{const} = \tilde{A}$. В этом случае

$$K' = c \frac{\sqrt{r^2 + 4x^2}}{x} \implies K = \sqrt{r^2 + 4x^2} + r \ln \frac{\sqrt{r^2 + 4x^2} - r}{2x}, \quad r > 0. \quad (9)$$

В последней формуле мы положили общий масштаб метрики равным единице: $c = 1$. Это всё, что требуется для нахождения метрики Егучи–Хэнсона из формулы (8).

Разложение кэлерова потенциала (9) в окрестности раздутой с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-2)$ сферы $\mathbb{CP}^1$ (т. е. при $x \rightarrow 0$) дает

$$K = a_2 \ln x + b_2 x^2 + \dots, \quad a_2, b_2 > 0. \quad (10)$$

Здесь, как и в формуле (6), a_2 – кэлеров модуль раздутой сферы, а b_2 – несущественная константа (важно лишь то, что она положительна).

Сравнивая формулы (6) и (10), приходим к естественному предположению о том, что в $U(2)$ -инвариантном случае, если сфера $\mathbb{CP}^1$ вложена в комплексную поверхность X с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-m)$, локальное поведение кэлерова потенциала вблизи $\mathbb{CP}^1$ (при $x \rightarrow 0$) таково:

$$K = a_m \ln x + b_m x^m + \dots, \quad a_m, b_m > 0. \quad (11)$$

В следующем разделе мы докажем это утверждение.

Если сфера $\mathbb{CP}^1$ вложена в X с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-m)$, то ее окрестность выглядит как тотальное пространство линейного расслоения $\mathcal{O}(-m)$. В разделе 4 мы увидим, что при $m \geq 3$ на этих пространствах можно построить метрики Кэлера–Эйнштейна отрицательной кривизны. Эти решения представляют собой обобщения метрики Егучи–Хэнсона, отвечающей $m = 2$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ ИЗ ФОРМУЛЫ ПРИСОЕДИНЕНИЯ

В этом разделе мы покажем, что если кэлеров потенциал допускает разложение (11) в окрестности сферы $\mathbb{CP}^1$, расположенной в точке $x = 0$, то данная сфера вложена с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-m)$. Для начала рассмотрим еще более общий случай, когда L – одномерное комплексное подмногообразие комплексной поверхности M . В этом случае касательное расслоение поверхности M при ограничении на L распадается очевидным образом:

$$TM|_L = TL \oplus NL, \quad (12)$$

где NL – нормальное расслоение к L в M . В алгебраическом подходе разновидность формулы (12) называется формулой присоединения. Теперь ограничим рассмотрение на случай, когда L – сфера, т.е. $L = \mathbb{CP}^1$. Так как любое голоморфное расслоение над $\mathbb{CP}^1$ является степенью тавтологического расслоения, мы имеем $NL = \mathcal{O}(-\tilde{m})$ для некоторого целого числа $\tilde{m}$. Вычисляя первый класс Черна обеих частей равенства (12) и интегрируя по L , получим

$$\int_L c_1(TM|_L) = \int_L c_1(L) - \tilde{m}. \quad (13)$$

Вспомним, что первый класс Черна комплексной кривой L – это то же самое, что ее класс Эйлера, поэтому интеграл от $c_1(L)$ – это просто эйлерова характеристика кривой L , т.е. в нашем случае $L = \mathbb{CP}^1$ мы имеем $\int_L c_1(L) = 2$. Чтобы понять, что означает левая часть формулы (13) с точки зрения дифференциальной геометрии, воспользуемся прежде всего функториальностью класса Черна, из которой, в частности, следует, что $c_1(TM|_L) = c_1(M)|_L$, и, во-вторых, тем фактом, что первый класс Черна многообразия M можно выразить через тензор Риччи следующим образом:

$$c_1(M) = \frac{i}{2\pi} R_{i\bar{j}} dz_i \wedge dz_{\bar{j}}.$$

Совмещая эти два факта, перепишем (13) как

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \frac{i}{2\pi} R_{i\bar{j}} dz_i \wedge dz_{\bar{j}}|_{\mathbb{CP}^1} = 2 - \tilde{m}. \quad (14)$$

Так как в эту формулу входит только ограничение формы Риччи на L , нам нужно знать лишь разложение метрики в окрестности $L = \mathbb{CP}^1$. Такое разложение легко получить из разложения кэлерова потенциала (11). Действительно, тензор Риччи можно найти по формуле $R_{i\bar{j}} = -\partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} \ln \det g$, где g – кэлерова метрика, вычисленная по кэлерову потенциалу (11), $g_{i\bar{j}} = \partial_i \bar{\partial}_{\bar{j}} K = K' \delta_{i\bar{j}} + K'' z_i \bar{z}_{\bar{j}}$. Имеем

$$\ln \det g = \text{const} + (m - 2) \ln x + \dots,$$

где многоточие обозначает члены, которые обращаются в нуль при $x \rightarrow 0$. Следовательно, соотношение (14) можно переписать в таком виде:

$$(2 - m) \int_{\mathbb{CP}^1} \frac{i}{2\pi} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2} = 2 - \tilde{m}.$$

Вычислив интеграл, получаем искомое равенство $m = \tilde{m}$.

Таким образом, нормальное расслоение $\mathcal{O}(-\tilde{m})$ к $\mathbb{CP}^1$ “закодировано” в разложении кэлерова потенциала (11).

3. ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть X – компактная односвязная комплексная поверхность, в этом случае $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$. Из двойственности Пуанкаре также следует, что

$$H^0(X, \mathbb{Z}) = H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^1(X, \mathbb{Z}) = H^3(X, \mathbb{Z}) = 0,$$

поэтому эйлерова характеристика равна $\text{Eu}(X) = 2 + \dim H^2(X, \mathbb{Z})$. Помимо эйлеровой характеристики, существует еще один важный инвариант, связанный с топологией X – это сигнатура $\text{Sgn}(X)$. Этот инвариант характеризует форму пересечения на $H^2(X, \mathbb{Z})$, которая возникает из сопоставления любым двум элементам $\alpha, \beta \in H^2(X, \mathbb{Z})$ числа пересечения $(\alpha, \beta) := \int_X \alpha \wedge \beta$. Это квадратичная форма на векторном пространстве $H^2(X, \mathbb{R})$. При этом $\text{Sgn}(X)$ – это по определению сигнатура данной квадратичной формы, т. е. если $n_{\pm}$ – число положительных/отрицательных собственных значений формы $(\cdot, \cdot)$, то $\text{Sgn}(X) = n_+ - n_-$. В свою очередь эйлерова характеристика²⁾ – это $\text{Eu}(X) = 2 + n_+ + n_-$.

В некомпактном случае формула для эйлеровой характеристики меняется. Действительно, для некомпактных поверхностей, которые будут представлять для нас интерес, имеет место равенство $H^4(X, \mathbb{Z}) = 0$, поэтому

$$\text{Eu}(X_{\text{noncompact}}) = 1 + n_+ + n_-.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На комплексной поверхности X можно построить следующее разложение комплексифицированной второй группы когомологий:

$$H^2(X, \mathbb{C}) = H^{(2,0)}(X) \oplus H^{(1,1)}(X) \oplus H^{(0,2)}(X),$$

где $H^{(i,j)}$ – группы когомологий Дольбо. Форма пересечения распадается на форму пересечения, ограниченную на $H^{(1,1)}(X)$, и форму спаривания между $H^{(2,0)}(X)$ и $H^{(0,2)}(X)$, при этом последняя является положительно определенной. Полагая $g := \dim H^{(2,0)}(X)$, можно представить n_+ как $n_+ = 2g + \tilde{n}_+$, где $\tilde{n}_+$ – число положительных собственных значений формы пересечения, ограниченной на $H^{(1,1)}(X)$. Теорема Ходжа утверждает, что $\tilde{n}_+ = 1$, т. е. форма пересечения на $H^2(X, \mathbb{R})$ имеет сигнатуру $(2g + 1, n_-)$. Многие из поверхностей, с которыми мы имеем дело в настоящей статье, являются некомпактными, однако в любом случае следует иметь в виду данный результат.

²⁾Мы предполагаем, что форма пересечения не имеет нулевых собственных значений.

Формулы Черна–Вейля. Теория Черна–Вейля позволяет вычислить топологические инварианты (для многообразия, а также для векторных расслоений над многообразием) с помощью дифференциальной геометрии. Нас будут интересовать выражения для эйлеровой характеристики и сигнатуры поверхностей в терминах кэлеровых метрик на этих поверхностях. Эти выражения можно найти, например, в статье [6], и сейчас мы напомним, как они выглядят.

Пусть, как и раньше, X – 4-многообразие, быть может, с границей ∂X , и пока что мы не будем требовать, чтобы оно было кэлерово. Будем обозначать эйлерову характеристику как $\text{Eu}(X, \partial X)$, а сигнатуру – как $\text{Sgn}(X, \partial X)$. В простейшем случае у X нет границы, т. е. $\partial X = \emptyset$, тогда $\text{Eu}(X, \emptyset)$ и $\text{Sgn}(X, \emptyset)$ выражаются через тензор кривизны по формулам³⁾

$$\begin{aligned}\text{Eu}(X, \emptyset) &= \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{abcd} \epsilon^{mnpq} R_{abmn} R_{cdpq}, \\ \text{Sgn}(X, \emptyset) &= -\frac{1}{24\pi^2} \int d^4x \epsilon^{abcd} R_{ab}^m R_{mcd}^n.\end{aligned}$$

В настоящей статье мы ограничиваемся случаем, когда многообразие кэлерово и имеет группу изометрий $U(2)$, в этом случае оба подынтегральных выражения зависят только от $x = |z_1|^2 + |z_2|^2$, поэтому интегралы можно вычислить явно, и результат выражается через кэлеров потенциал $K(x)$. На самом деле соответствующие формулы можно записать гораздо более компактно при помощи функции $Q(x) := xK'(x)$:

$$\begin{aligned}\text{Eu}(X, \emptyset) &= \left(-\frac{x^2 Q'(x)^2}{Q(x)^2} + \frac{2x(xQ''(x) + Q'(x))}{Q(x)} - \frac{2xQ''(x)}{Q'(x)} \right) \Big|_0^\infty, \\ \text{Sgn}(X, \emptyset) &= \frac{1}{3} \left(\frac{3x^2 Q'(x)^2}{Q(x)^2} + \frac{x^2 Q''(x)^2}{Q'(x)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2x(xQ''(x) + 3Q'(x))}{Q(x)} + \frac{2xQ''(x)}{Q'(x)} \right) \Big|_0^\infty.\end{aligned}\tag{15}$$

В точке $x = 0$ произведено раздутие, поэтому следует ожидать, что вклад, который вносит эта точка, связан с топологическими свойствами раздутия.

В выписанных формулах мы предполагали, что многообразие X не имеет границы. Во многих случаях, в том числе тех, которые будут представлять для нас непосредственный интерес, многообразие X имеет границу. Если $\partial X \neq \emptyset$, нужно учесть дополнительные вклады границы при вычислении эйлеровой характеристики и сигнатуры. Один из этих вкладов описывает то, каким образом граница “вложена” в $\bar{X}$ (замыкание X). Будем обозначать эти вклады как $\delta \text{Eu}[\partial X \subset \bar{X}]$ и $\delta \text{Sgn}[\partial X \subset \bar{X}]$.

³⁾ Отметим, что множитель $\sqrt{g}$ должен стоять в знаменателе, для того чтобы интеграл был инвариантен относительно репараметризаций. Выражение для эйлеровой характеристики приобретает более канонический вид, если его записать в локальном базисе в терминах (обратной) тетрады E_A^a , $R_{AB} := E_A^a E_B^b R_{abmn} dx^m \wedge dx^n$. В этом случае

$$\text{Eu}(X, \emptyset) = \frac{1}{32\pi^2} \int \epsilon^{ABCD} R_{AB} \wedge R_{CD}.$$

Они выражаются через вторую фундаментальную форму $\Pi(\partial X \subset \bar{X})$ и, в частности, обращаются в нуль, если ∂X – полностью геодезическое подмногообразие в $\bar{X}$. По существу поправку, связанную с наличием границы, можно вывести из требования, чтобы она обращалась в нуль для метрики, распадающейся в произведение вблизи границы [6] (т. е. когда вторая фундаментальная форма границы равна нулю). Результат состоит в следующем:

$$\begin{aligned}\delta \text{Eu}[\partial X \subset \bar{X}] &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_{\partial X} d^3x \, 2\epsilon^{abcd} \left(\zeta_{ab} R_{cd} - \frac{2}{3} \zeta_{ab} (\zeta^2)_{cd} \right), \\ \delta \text{Sgn}[\partial X \subset \bar{X}] &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{\partial X} \text{tr}(\zeta \wedge R),\end{aligned}\quad (16)$$

где ζ – вторая фундаментальная форма. Если граница задана уравнением $E_0 = 0$, где E_0 – компонента тетрады, то форма ζ выражается через связность ω по формуле $\zeta_{0i} = \omega_{0i} = -\zeta_{i0}$ (все остальные компоненты равны нулю).

Для метрики, получающейся из $U(2)$ -инвариантного кэлерова потенциала, эти формулы дают следующий ответ (здесь x_B обозначает граничное значение для x):

$$\begin{aligned}\delta \text{Eu}[\partial X \subset \bar{X}] &= \left(\frac{x^2 Q'(x)^2}{Q(x)^2} - \frac{2x(xQ''(x) + Q'(x))}{Q(x)} + \frac{2xQ''(x)}{Q'(x)} \right) \Big|_{x \rightarrow x_B} + 2, \\ \delta \text{Sgn}[\partial X \subset \bar{X}] &= - \frac{(xQ'(x)^2 - Q(x)(xQ''(x) + Q'(x)))^2}{3Q(x)^2 Q'(x)^2} \Big|_{x \rightarrow x_B}.\end{aligned}$$

Существует еще один тип вклада в сигнатуру, который обозначается как $\eta[\partial X]$, и он зависит только от метрики, индуцированной на граничном многообразии ∂X [7]. Мы не будем объяснять, каким образом он возникает, и рекомендуем интересующемуся читателю обратиться к исходным работам [7], [8] или к обзору [6]. Окончательные формулы для топологических инвариантов выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\text{Eu}(X, \partial X) &= \text{Eu}(X, \emptyset) + \delta \text{Eu}[\partial X \subset \bar{X}], \\ \text{Sgn}(X, \partial X) &= \text{Sgn}(X, \emptyset) + \delta \text{Sgn}[\partial X \subset \bar{X}] + \eta[\partial X].\end{aligned}\quad (17)$$

Вычисление величины $\eta[M]$ нужно проводить отдельно для каждого многообразия M , но нас будет интересовать лишь случай, когда M – линзовое пространство, $M = L(m, 1) := S^3/\mathbb{Z}_m$. Если определить сферу S^3 уравнением $|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1$, то действие $\mathbb{Z}_m$ дается формулой $(w_1, w_2) \rightarrow (\omega w_1, \omega w_2)$, где ω – m -й корень из единицы, $\omega = e^{2\pi i/m}$. Для этого многообразия η -инвариант имеет вид [6]

$$\eta[L(m, 1)] = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\text{ctg} \frac{\pi k}{m} \right)^2 = \frac{1}{3m} (m^2 - 3m + 2). \quad (18)$$

При помощи этих формул в конце следующего раздела мы вычислим эйлерову характеристику и сигнатуру пространств Кэлера–Эйнштейна Y_m , которые будут определены ниже.

4. МЕТРИКИ КЭЛЕРА–ЭЙНШТЕЙНА

Рассмотрим кэлерову метрику $g_{i\bar{j}}$, возникающую из $U(2)$ -инвариантного потенциала $K = K(|z_1|^2 + |z_2|^2) = K(x)$. Такая метрика имеет вид

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = \delta_{ij} K' + z_j \bar{z}_i K''. \quad (19)$$

Чтобы установить, в каком случае метрика положительно определена, вычислим норму $\|v\|$ произвольного вектора v :

$$\|v\|^2 = \bar{v}_i v_i K' + |\bar{v}_i z_i|^2 K''.$$

Если $K' > 0$ и $K'' > 0$, то эта величина с очевидностью положительна. Если же $K' > 0$, но $K'' < 0$, то неравенство Коши–Буняковского дает

$$\|v\|^2 \geq \bar{v}_i v_i K' + \bar{v}_i v_i x K'' = \bar{v}_i v_i (x K')'.$$

Заметим, что неравенство превращается в равенство при $v \sim z$, так что эта оценка является наилучшей. Следовательно, необходимое и достаточное условие положительной определенности метрики следующее:

$$K' > 0, \quad (x K')' > 0. \quad (20)$$

Условие эйнштейновости

$$R_{i\bar{j}} = a g_{i\bar{j}} \quad (21)$$

для $U(2)$ -инвариантной кэлеровой метрики $g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}$, где $K = K(x)$, принимает вид

$$\frac{d}{dx} \ln \det g_{i\bar{j}} = -a K'.$$

Вводя новую функцию $Q := x K'$, перепишем это уравнение следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left(x(Q^2)' - 2Q^2 + a \frac{2}{3} Q^3 \right) = 0. \quad (22)$$

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с многообразиями отрицательной кривизны, поэтому положим $a = -1$. Тогда уравнение (22) имеет решение (где b – постоянная интегрирования), которое задается формулой

$$\ln x = \sum_{i=1}^3 \frac{\ln(Q - y_i)}{2 + y_i}, \quad (23)$$

где y_i удовлетворяют уравнению

$$y_i^3 + 3y_i^2 + b = 0, \quad (24)$$

следовательно,

$$x = \prod_{i=1}^3 (Q - y_i)^{1/(2+y_i)}. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полученное выражение (25) имеет смысл при $b \neq -4$, так как при $b = -4$ кубическое уравнение (24) имеет двойной корень $y = -2$, в силу чего знаменатели в (23) обращаются в бесконечность⁴⁾. Данную проблему можно разрешить, рассмотрев (существующий) предел $b \rightarrow -4$, в результате чего получим

$$b = -4: \quad \ln x = \frac{-2}{Q+2} + \frac{1}{3} \ln \frac{Q-1}{Q+2}. \quad (26)$$

В силу условия положительной определенности (20) необходимо, чтобы Q была возрастающей функцией переменной x . Легко убедиться, что это требование удовлетворяется при $Q > \max_i y_i := y$. Из формулы (25) следует, что поведение функции Q вблизи точки y (условие $Q \rightarrow y$ означает, что $x \rightarrow 0$) таково: $Q = y + x^{2+y} + \dots$. Так как $Q = xK'$, такая асимптотика для Q означает, что кэлеров потенциал ведет себя вблизи $x = 0$ следующим образом:

$$K = y \ln x + \frac{1}{2+y} x^{2+y} + \dots, \quad (27)$$

что, очевидно, совпадает с (2) при $m = 2 + y$. Так как $y = m - 2$ должно быть решением уравнения $y^3 + 3y^2 + b = 0$, мы имеем $b = -(m-2)^2(m+1)$. Случай $m = 3$ соответствует $b = -4$, и это упомянутый выше специальный случай, в котором разложение кэлерова потенциала качественно такое же, но с другим коэффициентом перед ведущим членом:

$$m = 3: \quad K = \ln x + \frac{e^2}{3} x^3 + \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Разложение (27) верно лишь при $y > 0$. Если положить $b = 0$ в (24), то решение (25) будет описывать комплексное гиперболическое пространство, и в этом случае разложение при $x \rightarrow 0$ таково: $Q \sim 3x + 3x^2 + \dots$. Из (25) невозможно получить решение Егучи–Хэнсона, так как решение (25) соответствует случаю отрицательной кривизны $a = -1$, в то время как для пространства Егучи–Хэнсона $a = 0$.

Посмотрим, как ведет себя x при больших Q . Для корней y_i кубического уравнения (24) справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2+y_i} = 0.$$

Из формулы (23) следует, что $x \rightarrow 1$ при $Q \rightarrow \infty$, т.е. тотальное пространство линейного расслоения $\mathcal{O}(-m)$ при $m \geq 3$ есть шар $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$. Чтобы понять, как ведет себя метрика вблизи границы шара, разложим правую часть формулы (25): $x = 1 - 3/Q + \dots$. Отсюда следует, что $Q \sim 3/(1-x)$ при $x \rightarrow 1$. Таким образом, кэлеров потенциал ведет себя следующим образом вблизи границы $x = 1$:

$$K = -3 \ln(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2) + \dots \quad \text{при} \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 \rightarrow 1. \quad (28)$$

⁴⁾ Я благодарен Р. Ройчудхури, который обратил мое внимание на этот факт.

Рис. 1. Топальные пространства линейных расслоений $\mathcal{O}(-m)$ для различных m . Здесь $\mathbb{L}(m, 1)$ – линзовое пространство, $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{L}(2, 1)$.

В результате мы получаем не что иное, как кэлеров потенциал комплексного гиперболического пространства! Действительно, комплексное гиперболическое пространство можно представить в виде фактора

$$H = \frac{U(1, 2)}{U(1) \times U(2)}.$$

Кэлеров потенциал в однородных координатах на таком пространстве имеет вид $K_H \sim -\ln(|z_0|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2)$, что совпадает с выписанным членом в (28), если выбрать “калибровку” $z_0 = 1$ и использовать z_1, z_2 в качестве неоднородных координат.

Наше утверждение состоит в том, что метрика, отвечающая кэлерову потенциалу, Q -функция которого (связанная с K соотношением $Q = xK'$) дается формулами (24), (25) при $b = -(m-2)^2(m+1)$, $m = 3, 4, \dots$, является метрикой на пространстве Y_m – тотальном пространстве линейного расслоения $\mathcal{O}(-m)$ над $\mathbb{CP}^1$. Для доказательства нужно исследовать топологические свойства пространства Y_m . Во-первых, так как Y_m – тотальное пространство расслоения со стягиваемым слоем, его когомологии те же, что и у $\mathbb{CP}^1$. В частности, $\text{Eu}(Y_m) = 2$. Во-вторых, Y_m – тотальное пространство отрицательного расслоения над $\mathbb{CP}^1$, и, исходя из того что было сказано в разделе 2, получим $\text{Sgn}(Y_m) = -1$ (число самопересечения вклеенной сферы $\mathbb{CP}^1$ – это степень нормального расслоения, отсюда $n_- = 1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Два других случая отвечают положительному или тривиальному нормальному расслоению, т. е., к примеру, $\mathbb{CP}^2$ или $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ соответственно. В случае $\mathbb{CP}^2$ можно воспользоваться формулой (15), в которой нужно положить

$$Q = x \frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{x}{1+x},$$

при этом получим $\text{Sgn}(\mathbb{CP}^2) = 1$. В случае $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ матрица R_{ab} , представляющая тензор Римана, расщепляется следующим образом:

$$R := \{R_{ab}\} = \begin{pmatrix} r_1 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 & 0 \\ 0 & r_2 dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \end{pmatrix},$$

где $r_{1,2}$ – некоторые функции. Поэтому $\text{tr } R^2 = 0$, откуда $\text{Sgn}(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) = 0$. Этот результат согласуется с тем фактом, что две прямые, представляющие два разных класса когомологий (“левый” и “правый” множители в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$), вложены с тривиальными нормальными расслоениями и пересекаются в одной точке. Матрица пересечения имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ее собственные значения равны ± 1 .

Используя формулы Черна–Вейля (17), можно убедиться, что эйлеровы характеристики и сигнатуры многообразий Y_m такие, какие и должны быть. Вычисление

показывает, что в объемных членах в формулах (17) единственный вклад, содержащий зависимость от m , дается точкой $x = 0$, т. е. он возникает из раздутой сферы. Если предположить, что границей является сфера⁵⁾ S^3 , для которой $\eta[S^3] = 0$, в результате вычисления возникает следующий ответ:

$$\text{Eu}(Y_m) = 2m, \quad \text{Sgn}(Y_m) = -\frac{1}{3}(2 + m^2). \quad (29)$$

Этот результат нам не подходит. Для того чтобы получить правильный ответ, мы утверждаем, что нужно дополнительно провести отождествление

$$(z_1, z_2) \sim e^{2\pi i/m}(z_1, z_2). \quad (30)$$

Ясно, что в интегральных членах в формулах (17) такое отождествление сводится к сужению области интегрирования по одному из углов ϕ до сегмента $[0, 2\pi/m]$ вместо исходного интервала $[0, 2\pi)$. Поэтому выражения в правых частях равенств (29) просто делятся на m . Однако отождествление в (30) меняет границу 4-многообразия – теперь это уже не S^3 , а линзовое пространство $\mathbb{L}(m, 1) = S^3/\mathbb{Z}_m$ (см. определение выше, перед формулой (18), и рис. 1), а η -инвариант линзового пространства уже не нулевой! Он дается формулой (18), и этот дополнительный вклад нужно учесть при вычислении сигнатуры. В результате получим окончательный ответ для пространств Y_m при учете фактора (30):

$$\begin{aligned} \text{Eu}(Y_m) &= 2m \cdot \frac{1}{m} = 2, \\ \text{Sgn}(Y_m) &= -\frac{1}{3}(2 + m^2) \cdot \frac{1}{m} + \frac{1}{3m}(m^2 - 3m + 2) = -1. \end{aligned}$$

Отметим, что аналогичное вычисление для пространства Егучи–Хэнсона дает тот же ответ, но в этом случае η -член равен нулю, так как граница $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{L}(2, 1)$ и $\eta[\mathbb{RP}^3] = 0$.

Подводя итог, можно сказать, что вклад точки $x = 0$, связанный с “сингулярным” поведением кэлерава потенциала (2), т. е. вклад вклеенной сферы $\mathbb{CP}^1$, в точности сокращается с η -вкладом граничного линзового пространства $\mathbb{L}_m$. Таким образом, имеется весьма нетривиальное сокращение между “граничными” и “внутренними” частями пространства Y_m .

Еще один факт относительно многообразий Y_m , который следует проверить, состоит в том, что их первые числа Черна должны быть равны $2 - m$. Действительно, мы ожидаем, что $c_1(Y_m) = (2 - m)\omega_{\text{FS}}$, где ω_{FS} – форма Фубини–Штуди или любая форма, интеграл которой по раздутой сфере $\mathcal{S}$ (единственной гомологически

⁵⁾Так как $\eta[\partial M]$ зависит от метрики на границе, для справедливости дальнейшего рассуждения необходимо, чтобы граница была сферой не только топологически, но и метрически. Выписывая метрику в явном виде, можно видеть, что поверхность $x = \text{const}$ является сферой в метрическом смысле лишь в одной точке x_0 , определяемой уравнением $x_0 Q'(x_0) = Q(x_0)$. Полное пространство стягивается на шар $\{x \leq x_0\}$, поэтому для вычисления топологических инвариантов можно считать, что эффективно граница находится в точке $x = x_0$. Другой подход состоит в том, чтобы использовать значения η для многообразий Зайферта из [9] – тогда можно вычислить сигнатуру, пользуясь метрикой вблизи настоящей границы, т. е. вблизи $x = 1$. Результат оказывается тем же самым.

нетривиальной сфере в Y_m) равен единице. Следовательно,

$$\int_S c_1(Y_m) = 2 - m.$$

Чтобы убедиться в справедливости этой формулы, совершим замену переменных $z = z_1$, $w = z_2/z_1$. Подмногообразие $\mathcal{S} = \{z \rightarrow 0, w \text{ произвольно}\}$ – это и есть сфера $\mathbb{CP}^1 \subset Y_m$. В пределе $z \rightarrow 0$ интеграл $(i/2\pi) \int_S R_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ можно вычислить, используя формулу $R_{i\bar{j}} = -g_{i\bar{j}}$ и первый член разложения кэлера потенциала (27), т. е. по сути из кэлера потенциала $K = (m-2) \ln(1 + |w|^2)$ на $\mathcal{S} = \mathbb{CP}^1$:

$$\int_S c_1(Y_m) = -(m-2) \frac{i}{2\pi} \int_S \partial_w \partial_{\bar{w}} \ln(1 + |w|^2) dw \wedge d\bar{w} = 2 - m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Интересно, что вклад граничного члена типа Черна–Саймонса для многообразия Y_m равен аналогичному вкладу для комплексного гиперболического пространства, умноженному на $1/m$. Множитель $1/m$ происходит из того, что область интегрирования по угловым переменным в m раз меньше поверхности сферы S^3 . Тот факт, что член типа Черна–Саймонса не дает более нетривиального вклада в сигнатуру, связан с тем, что разложение функции Q вблизи границы, т. е. при $x \rightarrow 1$, имеет вид

$$Q(Y_m) = \frac{3}{1-x} - 3 + a_m(1-x)^2 + \dots$$

Здесь важное наблюдение состоит в том, что в данном разложении отсутствует линейный член $O(1-x)$. Если бы разложение для Q содержало линейный член, т. е. $Q(Y) = 3/(1-x) - 3 + \alpha(1-x) + \dots$, то возник бы дополнительный вклад в сигнатуру $\delta \text{Sgn} = -8\alpha/9$. Также интересно, что $\text{Eu}(X, \emptyset)|_x + \delta \text{Eu}(\partial X \subset \bar{X}) = 2$, т. е. константа. Поэтому полный вклад границы шара в эйлерову характеристику вообще не зависит от $Q(x)$, вследствие чего поведение Q вблизи границы не влияет на значение эйлеровой характеристики.

После завершения работы над статьей мы обнаружили, что метрики, которые обсуждались в данном разделе, были ранее построены в работе [10].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что в $U(2)$ -инвариантном случае нормальное расслоение к голоморфной сфере $\mathbb{CP}^1 \subset X$ в комплексной поверхности X “закодировано” в характерном поведении кэлера потенциала в окрестности данной сферы. Более конкретно, имеет место следующее разложение вблизи сферы, вложенной с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-m)$, $m \geq 1$:

$$K(x) = a_m \ln x + b_m x^m + \dots \quad \text{при } x = |z_1|^2 + |z_2|^2 \rightarrow 0, \quad a_m, b_m > 0.$$

Естественно возникает следующий вопрос: зная характерное поведение кэлерова потенциала при $x \rightarrow 0$, можно ли восстановить кэлеров потенциал на тотальном пространстве линейного расслоения $\mathcal{O}(-m)$ над $\mathbb{CP}^1$, который обладал бы какими-то желанными геометрическими свойствами? Мы попытались ответить на этот вопрос, потребовав, чтобы результирующая кэлерова метрика удовлетворяла уравнениям Эйнштейна. Оказывается, что соответствующие уравнения допускают решения с отрицательной космологической постоянной (отрицательной кривизной) при $m \geq 3$. При помощи функции $Q = xK'$ решение можно записать таким образом:

$$Y_m: \begin{cases} x = \prod_{i=1}^3 (Q - y_i)^{1/(2+y_i)}, \text{ где } y_i^3 + 3y_i^2 - (m-2)^2(m+1) = 0, & \text{при } m > 3; \\ x = e^{-2/(Q+2)} \left(\frac{Q-1}{Q+2} \right)^{1/3} & \text{при } m = 3. \end{cases}$$

Примечателен тот факт, что для $m \geq 3$ кэлеров потенциал стремится к бесконечности при $|z_1|^2 + |z_2|^2 \rightarrow 1$. Более того, асимптотически при $|z_1|^2 + |z_2|^2 \simeq 1$ метрика ведет себя так же, как метрика комплексного гиперболического пространства H_4 вблизи границы. Однако из требования того, чтобы топологические индексы этого пространства – эйлерова характеристика и сигнатура – были целыми, следует, что граница не может быть сферой S^3 , а должна быть ее фактором, а именно линзовым пространством $L(m, 1) = S^3/\mathbb{Z}_m$. При учете того, что граница – подходящее линзовое пространство, возникает нетривиальное сокращение между вкладками в топологические индексы от границы и от сферы $\mathbb{CP}^1$, вклеенной в начале координат, и в результате этого сокращения топологические индексы пространства Y_m совпадают с топологическими индексами линейного расслоения над $\mathbb{CP}^1$. Поэтому пространства, описываемые данными метриками, можно назвать асимптотически локально комплексно-гиперболическими по аналогии с хорошо известными асимптотически локально-евклидовыми пространствами.

Оказывается, существует еще один класс метрик на тотальных пространствах расслоений $\mathcal{O}(-m)$ при $m \geq 3$, обнаруженный в работе [11]. Эти метрики являются кэлеровыми и обладают антисамодуальным тензором Вейля. Их скаляр Риччи равен нулю, и метрики асимптотически локально-евклидовы, а не гиперболические.

Благодарности. Я хочу поблагодарить И. Я. Арефьеву, П. Ди Веккья, С. Горчинского, К. Зарембо, В. Пржиялковского за интересные обсуждения. Я также благодарен Н. А. Некрасову за то, что он обратил мое внимание на работу [1]. Я признателен А. А. Славнову и моим родителям за поддержку.

Список литературы

- [1] H. W. Braden, N. A. Nekrasov, *Commun. Math. Phys.*, **249**:3 (2004), 431–448, arXiv: hep-th/9912019.
- [2] Д. В. Быков, “Инстантоны, раздутия и кэлеровы метрики”, *ТМФ*, 2015 (в печати).
- [3] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, Yu. I. Manin, *Phys. Lett. A*, **65**:3 (1978), 185–187.
- [4] N. Nekrasov, A. S. Schwarz, *Commun. Math. Phys.*, **198**:3 (1998), 689–703, arXiv: hep-th/9802068.
- [5] M. F. Atiyah, *Geometry of Yang–Mills Fields*, *Lezioni Fermiane*, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.

- [6] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson, *Phys. Rep.*, **66**:6 (1980), 213–393.
- [7] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77**:1 (1975), 43–69.
- [8] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **78**:3 (1975), 405–432.
- [9] M. Ouyang, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **346**:2 (1994), 641–659.
- [10] H. Pedersen, Y. S. Poon, *Commun. Math. Phys.*, **136**:2 (1991), 309–326.
- [11] C. LeBrun, *Commun. Math. Phys.*, **118**:4 (1988), 591–596.

Поступила в редакцию 29.12.2014