Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Славнов, Солитонные решения классических уравнений движения в модифицированной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2015, том 184, номер 3, 520–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8935>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:32:11

© 2015 г.

А. А. Славнов^{*†}

СОЛИТОНЫЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Показано, что в модифицированной формулировке классической теории Янга–Миллса, приводящей к формальной теории возмущений, которая совпадает со стандартной, существуют солитонные решения классических уравнений движения.

Ключевые слова: солитоны, калибровочные поля, теория Янга–Миллса.

DOI: 10.4213/tmf8935

1. ВВЕДЕНИЕ

Матрица рассеяния в теории Янга–Миллса не существует на массовой поверхности из-за инфракрасных расходимостей. Многочисленные попытки построить теорию Янга–Миллса по аналогии с квантовой электродинамикой не привели к успеху из-за нелинейного взаимодействия квантов поля Янга–Миллса. Вероятно, это связано с тем фактом, что теория возмущений не является адекватным методом анализа теории Янга–Миллса. В самом деле, явление невыхода кварков нельзя объяснить в рамках теории возмущений по константе связи. Для объяснения явления невыхода кварков используются обычно численные симуляции на решетке. Существует большое количество непертурбативных моделей, объясняющих невыход кварков. Но обычно эти модели основаны на предположении, что невыход кварков связан с присутствием квазичастичных возбуждений, которые мы будем называть солитонами. С другой стороны, известно, что классические уравнения движения в стандартной формулировке теории Янга–Миллса не имеют квазичастичных решений с конечной положительной энергией [1]–[3].

Недавно была предложена новая формулировка неабелевых калибровочных теорий [4]–[6], применимая вне рамок теории возмущений и допускающая однозначную процедуру квантования, свободную от неоднозначности Грибова [7], [8]. Обычные

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: slavnov@mi.ras.ru

[†]Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

аргументы, запрещающие существование солитонов в теории Янга–Миллса, несправедливы в этой формулировке.

В настоящей работе мы собираемся показать, что, хотя формальное разложение матрицы рассеяния в ряд теории возмущений по константе связи в нашей формулировке и в стандартной формулировке теории Янга–Миллса совпадают, солитоны типа магнитного монополя 'т Хоофта–Полякова [9], [10] действительно возникают в модифицированной формулировке теории Янга–Миллса.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 дана новая формулировка неабелевой калибровочной теории и показано, что в рамках формальной теории возмущений по константе связи она воспроизводит все результаты, полученные в стандартной формулировке. В разделе 3 мы демонстрируем, что в топологически нетривиальных секторах классические уравнения движения имеют солитонные решения типа магнитного монополя. Последний раздел содержит заключительные замечания.

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Мы начинаем с неабелевой модели, описывающейся лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + \frac{1}{2}D_\mu\varphi^i D_\mu\varphi^i - \frac{1}{2}D_\mu\chi^i D_\mu\chi^i + iD_\mu b^i D_\mu e^i \quad (1)$$

(здесь и далее индексы $i, j, k, \dots$ принимают значения 1, 2, 3). Для простоты мы рассматриваем случай калибровочной группы $SU(2)$. Здесь $F_{\mu\nu}$ — обычный тензор кривизны для поля Янга–Миллса. Скалярные поля φ , χ , b , e принадлежат присоединенному представлению группы $SU(2)$. Поля φ , χ коммутируют, а поля b , e антикоммутируют. В формуле (1) D_μ — это обычные ковариантные производные, поэтому лагранжиан (1) калибровочно-инвариантен. Следует обратить внимание на знак минус перед членами, описывающими поле χ . Благодаря этому знаку они обладают отрицательной энергией.

Мы предполагаем, что поля, входящие в лагранжиан (1), имеют следующее нетривиальное асимптотическое поведение:

$$|\varphi| \rightarrow \left| \frac{m}{g} \right|, \quad |\chi| \rightarrow \left| \frac{m\alpha}{g} \right| \quad \text{при} \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $|\alpha| \leq 1$. Параметр $\alpha \rightarrow 1$, когда $g \rightarrow 0$ достаточно быстро. Например, можно выбрать

$$\alpha = \frac{g^{-n} - g^n}{g^{-n} + g^n} = 1 - g^{2n} + \dots, \quad (3)$$

так что $1 - \alpha = O(g^{2n})$, и, выбирая n достаточно большим, мы получим в формальной теории возмущений результаты, совпадающие с обычной теорией Янга–Миллса до произвольного порядка по g . В условии (2) m — константа, имеющая размерность массы.

Под формальной теорией возмущений мы подразумеваем формальный ряд по константе связи, независимо от того, сходится он или нет. Мы также не заботимся о том, что отдельные члены ряда могут не существовать из-за инфракрасных расходимостей. Формальный ряд — это обычное понятие для квантовой теории поля.

Если константа связи g мала, как в электродинамике, это означает, что обычные соотношения, которым должны удовлетворять элементы матрицы рассеяния (условия унитарности, причинности и т. д.), должны быть приближенно верны в данном порядке формальной теории возмущений. Но в теориях, подобных КХД, константа связи не мала, и даже отдельные члены ряда формальной теории возмущений могут не существовать из-за инфракрасных расходимостей. Тем не менее обычно настаивают на выполнении формальных соотношений типа условия унитарности и причинности в КХД. Эта точка зрения подкрепляется наблюдением джетов, хотя никаких строгих утверждений здесь сделать нельзя, так как процесс адронизации является существенно непертурбативным. Заметим также, что корреляторы калибровочно-инвариантных операторов, как правило, не содержат инфракрасных сингулярностей. Можно надеяться, что при подходящем выборе асимптотических состояний эта трудность возникать не будет.

Сначала мы рассмотрим топологически тривиальный сектор, отвечающий теории возмущений для теории Янга–Миллса. В этом случае в качестве третьей оси в зарядовом пространстве можно выбрать направление, в котором скалярные поля асимптотически не исчезают. Делая сдвиг полей, сохраняющий явную лоренц-инвариантность,

$$\varphi^i = \tilde{\varphi}^i + \delta^{i3} m g^{-1}, \quad \chi^i = \tilde{\chi}^i - \delta^{i3} m \alpha g^{-1}, \quad (4)$$

мы получаем лагранжиан, в котором поля $\tilde{\varphi}, \tilde{\chi}$ обращаются в ноль при $r \rightarrow \infty$. Это необходимо, чтобы строить теорию возмущений в окрестности вакуумного состояния.

Мы хотим доказать, что матрица рассеяния, полученная после этого сдвига, в рамках теории возмущений (в пределе $\alpha \rightarrow 1$) совпадает с обычной матрицей рассеяния в теории Янга–Миллса. Если $\alpha \neq 1$, можно говорить о совпадении матриц рассеяния вплоть до произвольного порядка формальной теории возмущений. Разумеется, в теории Янга–Миллса матрица рассеяния на массовой поверхности, строго говоря, не существует из-за инфракрасных расходимостей, тем не менее можно говорить об обращении в ноль матричных элементов, которые соответствуют переходам между состояниями, содержащими только физические возбуждения, и состояниями, содержащими нефизические возбуждения.

Физическими возбуждениями в обоих случаях являются конечно трехмерно-перечные компоненты поля Янга–Миллса. Вместо этого мы можем рассматривать корреляционные функции калибровочно-инвариантных операторов, которые не страдают от инфракрасных расходимостей. Мы покажем, что эти функции также совпадают в обеих теориях с точностью до произвольного порядка теории возмущений. В то же время в топологически нетривиальных секторах эти теории отличаются: теория Янга–Миллса в стандартной формулировке не имеет солитонных возбуждений, в то время как модифицированная формулировка описывает классические солитоны.

В данном случае нас интересуют только результаты теории возмущений, поэтому мы можем положить $\alpha = 1$, так как $\alpha = 1 - O(g^{2n})$, где n – произвольный параметр. Ясно, что в этом случае не возникает массового члена для поля Янга–Миллса, так как благодаря разным знакам перед членами, зависящими от полей φ и χ , их вклады в массовый член для поля Янга–Миллса взаимно компенсируются. Однако

унитарность модифицированной теории в физическом подпространстве отнюдь не очевидна и нуждается в доказательстве.

Лагранжиан, описывающий модифицированную теорию, после сдвига (4) выглядит следующим образом:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + D_\mu \tilde{\varphi}_+^i D_\mu \tilde{\varphi}_-^i + i D_\mu \tilde{b}^i D_\mu \tilde{e}^i + \\ + m \frac{1+\alpha}{\sqrt{2}} D_\mu \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j + m \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} D_\mu \tilde{\varphi}_-^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j + \frac{m^2(1-\alpha^2)}{2} A_\mu^a A_\mu^a \quad (5)$$

(здесь и далее индексы a, b, c принимают значения 1, 2), где использованы очевидные обозначения

$$\tilde{\varphi}_\pm^i = \frac{\tilde{\varphi}^i \pm \tilde{\chi}^i}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Этот лагранжиан при любом α инвариантен относительно “сдвинутых” калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^i &= \partial_\mu \eta^i + g \varepsilon^{ijk} A_\mu^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_-^1 &= -\frac{1+\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^2 + g \varepsilon^{1jk} \tilde{\varphi}_-^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_+^1 &= -\frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^2 + g \varepsilon^{1jk} \tilde{\varphi}_+^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_-^2 &= \frac{1+\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^1 + g \varepsilon^{2jk} \tilde{\varphi}_-^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_+^2 &= \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} m \eta^1 + g \varepsilon^{2jk} \tilde{\varphi}_+^j \eta^k, \\ \delta \tilde{\varphi}_-^3 &= g \varepsilon^{3jk} \tilde{\varphi}_-^j \eta^k, \quad \delta \tilde{\varphi}_+^3 = g \varepsilon^{3jk} \tilde{\varphi}_+^j \eta^k, \\ \delta \tilde{b}^i &= g \varepsilon^{ijk} \tilde{b}^j \eta^k, \quad \delta \tilde{e}^i = g \varepsilon^{ijk} \tilde{e}^j \eta^k. \end{aligned} \quad (7)$$

В теории возмущений отсутствует неоднозначность Грибова, поэтому мы можем выбрать калибровку $\partial_\mu A_\mu^i = 0$, введя одновременно духи Фаддеева–Попова $\bar{c}^i, c^i$.

Матрица рассеяния при $\alpha = 1$ может быть записана в виде континуального интеграла:

$$S = \int d\mu \exp \left\{ i \left[\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + D_\mu \tilde{\varphi}_+^i D_\mu \tilde{\varphi}_-^i + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \lambda^i \partial_\mu A_\mu^i + i \partial_\mu \bar{c}^i D_\mu c^i + D_\mu \tilde{b}^i D_\mu \tilde{e}^i + m \sqrt{2} D_\mu \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j \right) \right] \right\}, \quad (8)$$

где мера интегрирования $d\mu$ представляет собой произведение дифференциалов всех полей, входящих в лагранжиан.

Разлагая матрицу рассеяния для произвольного α в ряд по $1 - \alpha$ в точке $\alpha = 1$, получаем

$$S = \int d\mu \exp \left\{ i \int dx L_\alpha^{\text{eff}} \Big|_{\alpha=1} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} \left[m^2 \int dx (A_\mu^i)^2 + \int dx \frac{m}{2} D_\mu \tilde{\varphi}^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j + \dots \right] \right) \right\}, \quad (9)$$

где эффективное действие определяется формулой (8). Мы игнорируем возможные ультрафиолетовые расходимости, имея в виду, что некоторая инвариантная ультрафиолетовая регуляризация (размерная или полученная путем введения высших ковариантных производных) присутствует в уравнении (9). Поэтому второй и последующие члены имеют по крайней мере порядок $1 - \alpha = O(g^{2n})$. Из этого мы делаем вывод, что результаты, полученные с помощью лагранжиана (5), совпадают с обычными по крайней мере до порядка $2n$. Поскольку число n произвольно, мы заключаем, что полученное таким образом формальное разложение в ряд теории возмущений совпадает с обычным.

При $\alpha = 1$ лагранжиан (5) инвариантен также относительно преобразований суперсимметрии

$$\delta \tilde{\varphi}_-^i = i \tilde{b}^i \epsilon, \quad \delta \tilde{e}^i = \tilde{\varphi}_+^i \epsilon, \quad \delta \tilde{b}^i = \delta \tilde{\varphi}_+^i = 0. \quad (10)$$

Легко видеть, что эти преобразования нильпотентны,

$$\delta^2 \tilde{\varphi}_-^i = 0, \quad \delta^2 \tilde{e}^i = 0. \quad (11)$$

Такая инвариантность обеспечивает отщепление возбуждений, соответствующих полям $\tilde{\varphi}_\pm$, $\tilde{b}$, $\tilde{e}$.

Согласно теореме Нётер эти симметрии порождают сохраняющиеся заряды Q_B и Q_S . Соответствующие сохраняющиеся асимптотические заряды обозначаются как Q_B^0 и Q_S^0 , и асимптотические состояния можно выбрать так, что они будут удовлетворять уравнениям

$$Q_B^0 |\psi\rangle_{\text{ph}} = 0, \quad Q_S^0 |\psi\rangle_{\text{ph}} = 0, \quad [Q_B^0, Q_S^0]_+ = 0, \quad (12)$$

где асимптотические заряды равны

$$Q_B^0 = \int d^3x \left[(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i)^j \partial_i c^j + m \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ij3} \partial_0 \tilde{\varphi}_+^i c^j - \lambda^j \partial_0 c^j \right], \quad (13)$$

$$Q_S^0 = \int d^3x (\partial_0 \varphi_+^i b^i - \partial_0 b^i \varphi_+^i). \quad (14)$$

Варьируя по A_0^i свободное действие, стоящее в показателе экспоненты в (8), мы получим следующее уравнение движения:

$$-\partial_i (\partial_0 A_i^j - \partial_i A_0^j) + m \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}} \partial_0 \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} - \partial_0 \lambda^j = 0. \quad (15)$$

Подставляя это уравнение в соотношение (13), мы получим для асимптотического БРСТ-заряда выражение

$$Q_B^0 = \int d^3x (c \partial_0 \lambda - \lambda \partial_0 c). \quad (16)$$

Без труда можно убедиться в том, что этот заряд совпадает с БРСТ-зарядом в стандартной формулировке теории Янга–Миллса в калибровке Лоренца.

Второе уравнение в (12) обеспечивает отщепление возбуждений, отвечающих полям $\varphi_\pm$, e , b . Поскольку в задаче рассеяния подразумевается, что до и после

взаимодействия частицы свободны, достаточно убедиться в совпадении асимптотических зарядов (конечно, при условии, что они сохраняются). Первое уравнение аналогично соответствующему равенству при БРСТ-квантовании обычной теории Янга–Миллса. Оно обеспечивает отсутствие переходов между состояниями, содержащими только возбуждения, которые отвечают трехмерно-поперечным компонентам поля Янга–Миллса, в состояния, содержащие продольные и временные кванты.

Явный вид сохраняющихся асимптотических зарядов можно также получить следующим образом. Делая масштабное преобразование полей

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_+^i &= \varphi_+^i (m\sqrt{2})^{-1}, & \tilde{\varphi}_-^i &= \varphi_-^i (m\sqrt{2}), \\ \tilde{b}^i &= b^i (m\sqrt{2}), & \tilde{e}^i &= e^i (m\sqrt{2})^{-1},\end{aligned}\quad (17)$$

мы получаем в экспоненте следующий эффективный лагранжиан:

$$\begin{aligned}L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + D_\mu \varphi_+^i D_\mu \varphi_-^i + \\ &+ \lambda^i \partial_\mu A_\mu^i + i \partial_\mu \bar{c}^i D_\mu c^i + D_\mu b^i D_\mu e^i + D_\mu \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j.\end{aligned}\quad (18)$$

После преобразований (17) лагранжиан (18) не зависит от m . Это означает, что интеграл (9) также не зависит от m , и мы можем положить $m = 0$. Граничные условия для состояний, не включающих поля $\tilde{\varphi}_\pm$ и e, b , не меняются.

Любой вектор, удовлетворяющий соотношениям (12)–(14), имеет вид

$$|\psi\rangle_{\text{ph}} = |\psi\rangle_{\text{tr}} + |N\rangle, \quad (19)$$

где $|\psi\rangle_{\text{tr}}$ – это вектор, содержащий только поперечные кванты поля Янга–Миллса, а $|N\rangle$ – вектор с нулевой нормой. Мы покажем это для заряда, связанного с инвариантностью теории относительно преобразований суперсимметрии. Можно построить оператор

$$\hat{K} = \int d^3x (\partial_0 \tilde{\varphi}_-^j e^j - \partial_0 e^j \tilde{\varphi}_-^j). \quad (20)$$

Антикоммутатор этого оператора с $\hat{Q}_S^0$ равен оператору числа нефизических частиц $\tilde{\varphi}_\pm^j, b^j, e^j$:

$$\hat{N} = [\hat{Q}_S^0, \hat{K}]_+. \quad (21)$$

Следовательно, любой вектор, который содержит хотя бы одну нефизическую частицу, может быть записан следующим образом:

$$|\psi\rangle_{\text{ph}} = \frac{\hat{N}}{N} \hat{Q}_S^0 |\chi\rangle. \quad (22)$$

Этот вектор, очевидно, имеет нулевую норму.

Факторизуя пространство таких векторов по векторам $|N\rangle$, мы получаем физическое пространство, совпадающее с пространством наблюдаемых векторов в теории Янга–Миллса. Таким образом, мы доказали в рамках теории возмущений унитарность матрицы рассеяния поля Янга–Миллса в модифицированной формулировке в пространстве физических векторов. Доказательство, однако, было формальным, поскольку матрица рассеяния в теории Янга–Миллса не существует из-за инфракрасных расхождений. Мы можем тем не менее говорить об обращении в ноль

матричных элементов, отвечающих переходам между физическими и нефизическими состояниями.

Единственные нетривиальные объекты, имеющие смысл в пертурбативной теории Янга–Миллса, – это корреляционные функции калибровочно-инвариантных операторов. Легко видеть, что эти корреляционные функции совпадают в стандартной и модифицированной формулировках с точностью до произвольного порядка теории возмущений. В самом деле, можно повторить рассуждения, приведенные выше, и показать, что эти корреляционные функции задаются континуальным интегралом

$$Z = \int d\mu \left\{ \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + D_\mu \varphi_+^i D_\mu \varphi_-^i + m\sqrt{2} D_\mu \tilde{\varphi}_+^i \varepsilon^{ij3} A_\mu^j + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \lambda^i \partial_\mu A_\mu^i + i \partial_\mu \bar{c}^i D_\mu c^i + i D_\mu b^i D_\mu c^i + J(x) O(x) \right) \right] \right\}, \quad (23)$$

где $O(x)$ – некоторый калибровочно-инвариантный оператор, зависящий только от $A_\mu(x)$, и $J(x)$ – источник. Граничные условия для всех полей в равенстве (23) отвечают вакуумным состояниям. В производящем функционале (23) при $m = 0$ мы можем выполнить интегрирование по полям $\varphi_\pm$, c , b . Детерминанты, возникающие при таком интегрировании, компенсируют друг друга, поскольку поля $\varphi_\pm$ и b , c имеют противоположные статистики, и мы получаем стандартное выражение для производящего функционала корреляционных функций калибровочно-инвариантных операторов в теории Янга–Миллса:

$$Z = \int d\tilde{\mu} \left\{ \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i + \lambda^i \partial_\mu A_\mu^i + i \partial_\mu \bar{c}^i D_\mu c^i + J(x) O(x) \right) \right] \right\}, \quad (24)$$

где мера интегрирования $d\tilde{\mu}$ представляет собой произведение дифференциалов,

$$d\tilde{\mu} = dA_\mu^i d\lambda^j d\bar{c}^k dc^l. \quad (25)$$

К такому же выводу можно прийти, если работать в калибровке, применимой вне рамок теории возмущений, например в калибровке $\varphi_-^a = 0$, $\partial_\mu A_\mu^3 = 0$. От нее можно перейти к любой допустимой калибровке. В следующем разделе мы будем рассматривать классическую теорию в гамильтоновой калибровке $A_0 = 0$.

3. КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ТОПОЛОГИЧЕСКИ НЕТРИВИАЛЬНОМ СЕКТОРЕ

В этом разделе мы покажем, что рассмотренная выше модель обладает нетривиальными солитонными возбуждениями типа магнитного монополя 'т Хоофта–Полякова.

Мы рассматриваем классические решения для действия (5) и ищем классические солитоны, которые имеют при больших r асимптотики

$$\varphi^i \sim \frac{x^i m}{rg}, \quad \chi^i \sim -\frac{x^i m \alpha}{rg}. \quad (26)$$

Мы рассматриваем стационарные решения в калибровке $A_0 = 0$.

В отличие от предыдущего раздела, где использовалось формальное разложение теории возмущений, мы будем работать в топологически нетривиальном секторе и искать непerturbативные солитонные решения классических уравнений движения

$$\begin{aligned} D_i F_{ij}^a + g \varepsilon^{alm} (D_j \varphi)^l \varphi^m - g \varepsilon^{akn} (D_j \chi)^k \chi^n &= 0, & A_i^a &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \varepsilon^{aij} \frac{x^j}{gr^2}, \\ D_i (D_i \varphi)^n &= 0, & \varphi^n(x) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{x^n m}{gr}, \\ D_i (D_i \chi)^n &= 0, & \chi^n(x) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{\alpha x^n m}{gr}. \end{aligned} \quad (27)$$

Наложенные асимптотические условия обеспечивают убывание ковариантных производных полей φ , χ , что важно для конечности энергии солитона. Чтобы обеспечить конечность энергии солитона, мы рассматриваем только решения, несингулярные при $r \rightarrow 0$. В данном случае мы не можем пренебречь членами, которые малы при формальном использовании теории возмущений, поскольку мы ищем солитоны, которые нельзя получить в рамках теории возмущений. Заметим также, что на практике эта конструкция применяется в первую очередь к КХД, где константа связи g не мала.

Мы пользуемся анзацем 'т Хоофта–Полякова

$$A_a^i(x) = \varepsilon^{aij} \frac{x^j}{r} W(r), \quad \varphi^i(x) = \delta^{ai} \frac{x_a}{r} F(r), \quad \chi^i(x) = \delta^{ai} \frac{x_a}{r} G(r), \quad (28)$$

где $A_0(x) = 0$ и при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} W(r) &\rightarrow (gr)^{-1}, & F(r) &\rightarrow F \operatorname{ch} \gamma, & G(r) &\rightarrow F \operatorname{sh} \gamma, \\ F \operatorname{ch} \gamma &= \frac{m}{g}, & F \operatorname{sh} \gamma &= -\alpha \frac{m}{g}. \end{aligned}$$

Если g мало при $\alpha \rightarrow 1$, как это происходит в электрослабых моделях, основанных на механизме Хиггса–Брута–Англера [11]–[13], то $\varphi(x) \simeq \chi(x)$, и уравнение для поля Янга–Миллса имеет такой же вид, как и в стандартной теории. Данное уравнение не имеет солитонных решений.

Однако мы можем также рассматривать теории, в которых константа g не мала (например, КХД). В подобных случаях параметры F , γ конечны.

Уравнения (27) можно переписать в терминах функций

$$K(r) = 1 - grW(r), \quad J(r) = F(r)rg, \quad Y(r) = G(r)rg. \quad (29)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 K}{dr^2} &= (K^2 + J^2 - Y^2 - 1)K(r), & K(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \\ r^2 \frac{d^2 J}{dr^2} &= 2K^2 J, & J(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg \operatorname{ch} \gamma, \\ r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} &= 2K^2 Y, & Y(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg \operatorname{sh} \gamma = -\alpha Frg \operatorname{ch} \gamma. \end{aligned} \quad (30)$$

Следуя работе [14], мы выбираем следующий анзац для решений:

$$\begin{aligned} J(r) &= \Lambda(r) \operatorname{ch} \gamma, & Y(r) &= \Lambda(r) \operatorname{sh} \gamma, \\ \Lambda(r) \operatorname{ch} \gamma &\rightarrow Frg \operatorname{ch} \gamma, & \Lambda(r) \operatorname{sh} \gamma &\rightarrow Frg \operatorname{sh} \gamma. \end{aligned} \quad (31)$$

После этого уравнения (30) приобретают вид

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 K}{dr^2} &= (K^2 + \Lambda^2 - 1)K, & K(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \\ r^2 \frac{d^2 \Lambda}{dr^2} &= 2K^2 \Lambda, & \Lambda(r) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} Frg. \end{aligned} \quad (32)$$

Решения этих уравнений хорошо известны [9], [10], [15], [16]:

$$K(r) = \frac{rgF}{\operatorname{sh} rgF}, \quad \Lambda(r) = \frac{rgF}{\operatorname{th} grF} - 1. \quad (33)$$

Эти решения, очевидно, обладают положительной и ограниченной энергией: их энергия равна энергии магнитного монополя

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{lm}^i F_{lm}^i + \frac{1}{2} (D_l \varphi)^i (D_l \varphi)^i - \frac{1}{2} (D_l \chi)^i (D_l \chi)^i \right] = \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{lm}^i F_{lm}^i + \frac{1}{2} (D_l \Lambda)^a (D_l \Lambda^a) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя калибровочно-инвариантное определение электромагнитного тензора напряженности [9]

$$F_{\mu\nu} = \hat{\Lambda}^a F_{\mu\nu}^a - g^{-1} \varepsilon^{abc} \hat{\Lambda}^a (D_\mu \hat{\Lambda})^b (D_\nu \hat{\Lambda})^c, \quad (35)$$

где

$$\hat{\Lambda}^a = \frac{\Lambda^a}{|\Lambda|}, \quad |\Lambda| = \left(\sum_a \Lambda^a \Lambda^a \right)^{1/2},$$

мы находим, что рассматриваемое возбуждение является магнитным монополем, который создает магнитное поле

$$B^i(x) = \frac{x^i}{gr^3}. \quad (36)$$

Видно, что даже при больших g масса и магнитное поле монополя не зависят от γ и определяются константами F и g .

Решение, заданное формулами (31)–(33), не имеет электрического заряда. Легко включить в эту схему также возбуждения, обладающие электрическим и магнитным зарядами (дионы) [14].

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы показали, что классические уравнения движения в модифицированной формулировке теории Янга–Миллса действительно имеют солитонные возмущения. Напомним наши исходные пункты. Мы искали непертурбативные солитонные решения, соответствующие калибровочно-инвариантному лагранжиану, который порождает ту же теорию возмущений, что и обычный лагранжиан Янга–Миллса. На массовой поверхности элементы матрицы рассеяния формально совпадают в рамках теории возмущений с обычными. Однако для КХД они не существуют из-за инфракрасных расходимостей. Корреляторы калибровочно-инвариантных операторов свободны от этой проблемы и в рамках теории возмущений совпадают в обеих теориях в каждом порядке разложения по константе связи. Модифицированная формулировка допускает существование классических решений в топологически нетривиальном секторе. Эти решения соответствуют солитонам.

Благодарности. Я хотел бы поблагодарить Л. Альвареца-Гоме, В. Рубакова, Р. Стора и Л. Фаддеева за полезные дискуссии. Моя работа частично поддержана программой РАН “Нелинейная динамика” и РФФИ (грант № 14-01-00695). Настоящая статья была представлена в качестве доклада на конференции “В поисках фундаментальных симметрий” (Санкт-Петербург, декабрь 2014 года).

Список литературы

- [1] S. Coleman, *Commun. Math. Phys.*, **55**:2 (1977), 113–116.
- [2] S. Deser, *Phys. Lett. B*, **64**:4 (1976), 463–464.
- [3] H. Pagels, *Phys. Lett. B*, **68**:5 (1977), 466.
- [4] A. A. Slavnov, *JHEP*, **08** (2008), 047, 11 pp., arXiv:0807.1795.
- [5] A. A. Славнов, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 204–211.
- [6] A. Quadri, A. A. Slavnov, *JHEP*, **07** (2010), 87.
- [7] V. N. Gribov, *Nucl. Phys. B*, **139**:1–2 (1978), 1–19.
- [8] I. Singer, *Commun. Math. Phys.*, **60**:1 (1978), 7–12.
- [9] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **79**:2 (1974), 276–284.
- [10] А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ*, **20**:3 (1974), 430–433.
- [11] P. W. Higgs, *Phys. Lett.*, **12**:2 (1964), 132–133; *Phys. Rev.*, **145**:4 (1966), 1156–1163.
- [12] F. Englert, R. Brout, *Phys. Lett.*, **13**:9 (1964), 321–323.
- [13] А. Квадри, А. А. Славнов, *ТМФ*, **166**:3 (2011), 336–349.
- [14] B. Julia, A. Zee, *Phys. Rev. D*, **11**:8 (1975), 2227–2232.
- [15] M. K. Prasad, C. N. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.*, **35**:12 (1975), 760–762.
- [16] Е. Б. Богомольный, *ЯФ*, **24**:4 (1976), 861–870.