Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, Двумерное кулоновское рассеяние квантовой частицы: волновые функции и функции Грина, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 252–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8938>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:59:13

© 2016 г.

В. В. Пупышев*

ДВУМЕРНОЕ КУЛОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ: ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ ГРИНА

Решается задача о движении заряженной квантовой частицы в двумерной плоскости трехмерного координатного пространства и ее рассеянии неподвижным кулоновским центром, лежащим в той же плоскости. Исследуются волновая функция такой частицы, функция Грина и все радиальные компоненты этих функций. Для модулей таких компонент выведены равномерные мажорантные оценки. Найдены представление волновой функции через регулярные радиальные функции Кулона и представление амплитуды рассеяния через парциальные фазы. Получены интегральные представления функции Грина и всех ее радиальных компонент.

Ключевые слова: двумерное рассеяние, кулоновские волновые функции, кулоновские функции Грина.

DOI: 10.4213/tmf8938

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время бурно развивается теоретическая и экспериментальная физика ультрахолодных газов в магнитооптических ловушках [1]. В одной из таких ловушек, а именно в дискообразной ловушке, квантовое движение частиц газа происходит в основном в двумерной плоскости их трехмерного координатного пространства.

Одна из особенно интересных для практических приложений особенностей двумерного движения по сравнению с трехмерным такова [2]: при любом сколь угодно слабом, но притягивающем взаимодействии в системе двух квантовых частиц эти частицы имеют хотя бы одно связанное состояние.

Следовательно, в дискообразных ловушках возможен синтез новых химических соединений, не существующих в трехмерном пространстве. Поэтому с точки зрения теоретической физики и квантовой химии особо актуальными в настоящее время

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

являются две задачи: построение квантовой теории двумерного рассеяния для систем нескольких заряженных частиц в пределе их нулевой полной энергии и создание экономичных методов численного анализа физических процессов, происходящих в таких системах.

Первым и неизбежным этапом решения этих задач является исследование двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы неподвижным силовым центром. В англоязычной литературе такое рассеяние принято называть резерфордовским рассеянием в двумерном пространстве. Обширный список работ, посвященных анализу резерфордовского рассеяния в двумерном пространстве, приведен в недавней монографии [3]. Обсудим итоги только тех исследований, продолжением которых является настоящая работа.

Давно известно, что в случае кулоновского потенциала двумерное уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi^c(a, b)$ квантовой частицы допускает разделение аргументов a и b в полярных [4], параболических [5] и эллиптических [6] координатах и таким образом сводится к счетным совокупностям пар одномерных уравнений для функций $F_\lambda(a)$ и $\zeta_\lambda(b)$, связанных друг с другом лишь константой разделения λ . В работах [4]–[13] регулярные решения Ψ^c , $F_\lambda(a)$ и $\zeta_\lambda(b)$, отвечающие задаче рассеяния и задаче на связанные состояния, выражены через известные гипергеометрические и тригонометрические функции.

Представление волновой функции $\Psi^c(u, v)$ двумерного кулоновского рассеяния через функцию Куммера Φ в параболических координатах (u, v) впервые нашел Бартон [7]. Он же впервые получил представление кулоновской амплитуды f^c двумерного рассеяния квантовой частицы через известные функции и показал, что соответствующее такой амплитуде квантово-механическое дифференциальное сечение $d\sigma$ не совпадает с классическим сечением $d\tilde{\sigma}$. Как доказал Яфаев [8], исследовавший классическое и квантовое кулоновское рассеяние в пространстве произвольной размерности $d \geq 2$, равенство $d\sigma = d\tilde{\sigma}$ имеет место только в случае $d = 3$.

Разложение волновой функции $\Psi^c(r, \varphi)$ рассеяния или связанного состояния в полярных координатах (r, φ) по базисным функциям $F_\lambda(u)\zeta_\lambda(v)$ параболических координат исследовано в работе [9]. В этой же работе установлен теоретико-групповой смысл парциальной фазы δ_λ^c двумерного кулоновского рассеяния и дан анализ обратного разложения, а именно разложения функции $\Psi^c(u, v)$ по полярным базисным функциям $F_\lambda(r)\zeta_\lambda(\varphi)$.

Дитрих [12] впервые выразил кулоновскую функцию Грина G^c в двумерном импульсном пространстве через элементарные функции. Представление функции G^c в координатном пространстве в виде интеграла или через известные специальные функции пока не известно.

Нерегулярные комплекснозначные и вещественные решения $H_\lambda(a)$ и $G_\lambda(a)$, соответствующие регулярным базисным функциям $F_\lambda(a)$, интегральные представления и мажорантные оценки проекций $G_\lambda^c(a, a')$ функции Грина $G^c(a, b, a', b')$ на функции $\zeta_\lambda(b - b')$ до сих пор не исследовались.

При выборе полярных координат в качестве базисных функций $\zeta_\lambda(\varphi)$ удобно использовать экспоненциальные функции $e^{im\varphi}$ с целым индексом $m = \pm(\lambda + 1/2)$, $2\lambda = -1, 1, \dots$, или мнимые и вещественные части $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ этих функций. В полярных координатах функции F_λ и G_λ^c имеют прозрачный физический смысл [3], [14]: эти функции являются радиальными компонентами волновой функции Ψ^c и функции Грина G^c . Вследствие общепринятой постановки задачи дву-

мерного рассеяния [3], [14] волновая функция рассеяния Ψ^c является четной функцией угловой переменной φ . Поэтому ее разложение по базисным экспоненциальным функциям вырождается в разложение по системе базисных функций $\cos m\varphi$, $m = 0, 1, \dots$. Такое разложение является косинус-рядом Фурье. Амплитуда рассеяния f^c и функция Грина G^c также являются косинус-рядами Фурье.

В работе [9] использовались функции $e^{im\varphi}$, а в работах [10]–[13] – функции $\cos m\varphi$. В работе [10] обсуждалось представление функций G_λ в виде бесконечного ряда, но лишь в частном случае $2\lambda = -1$, отвечающем индексу $m = 0$. Представление всех функций G_λ^c через функции Уиттекера найдено в работе [11]. Авторы работы [13] вывели разложение амплитуды f^c по функциям δ_λ^c и $\cos m\varphi$, но не исследовали сходимость полученного разложения в направлении рассеяния вперед ($\varphi = 0$) и назад ($\varphi = \pi$).

Главная цель настоящей работы – восполнить указанные выше пробелы теории двумерного кулоновского рассеяния построением и исследованием функций F_λ , H_λ , G_λ и G_λ^c , анализом косинус-рядов Фурье функций Ψ^c , f^c , G^c , выводом мажорантных оценок функций F_λ , G_λ^c и интегральных представлений функций G_λ^c и G^c . При изложении всего материала преследуется еще одна цель – выполнить квантово-механический анализ всех исследуемых уравнений и функций. В работе используются полярные координаты.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 поясняются используемые обозначения и определения. Раздел 3 посвящен представлениям радиальных компонент F_λ и G_λ^c волновой функции Ψ^c кулоновского рассеяния квантовой частицы и функции Грина G^c через гипергеометрические функции. В разделе 4 для всех таких компонент выводятся и исследуются мажорантные оценки. В разделе 5 обсуждаются разложения волновой функции Ψ^c и амплитуды рассеяния f^c в косинус-ряды Фурье. Раздел 6 посвящен выводу интегрального представления функции Грина G^c из ее косинус-ряда Фурье. В разделе 7 перечислены основные результаты.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Перечислим основные предположения. Пусть квантовая частица p_1 имеет конечную положительную массу m_1 , вещественный кулоновский заряд z_1 и движется только в двумерной плоскости $\mathcal{P}$ ее трехмерного координатного пространства $\mathcal{R}^3$. Предполагаем, что некоторая неподвижная точка O этой плоскости является кулоновским силовым центром с вещественным зарядом Z , действующим на частицу p_1 посредством кулоновского потенциала. Считаем, что этот потенциал определяется формулой $z_1 Z/r$, где r – расстояние между частицей p_1 и точкой O в плоскости $\mathcal{P}$.

В плоскости $\mathcal{P}$ введем двумерную декартову систему координат $\mathcal{S}^2$ с координатами (x, y) и осями OX и OY , положительные направления которых определяются ортами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Пусть начальная точка этой системы совпадает с силовым центром O , а орт $\mathbf{e}_1$ направлен вдоль волнового вектора $\mathbf{k}_0$ начального состояния частицы p_1 . Следуя монографиям [3], [14], считаем, что частица p_1 испускается из бесконечно удаленной точки $x = -\infty$ оси OX . В системе $\mathcal{S}^2$ радиус-вектор $\mathbf{r}$ частицы p_1 является двумерным вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, а вектор $\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{e}_1$ имеет одну ненулевую координату $k_0 > 0$. Положив $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, определим полярные координаты (r, φ) радиус-вектора $\mathbf{r}$ частицы p_1 : расстояние $r \geq 0$ и азимутальный угол $\varphi \in [0, 2\pi]$. В силу предположений о кулоновском потенциале волновой вектор $\mathbf{k}$

состояния упругого рассеяния этой же частицы лежит в плоскости $\mathcal{P}$, а волновое число $k \equiv |\mathbf{k}|$ равно начальному волновому числу k_0 .

Перейдем к описанию параметров и аргументов. Напомним, что волновое число k частицы p_1 связано с ее полной энергией E равенством $k = \sqrt{2m_1 E/\hbar^2}$, где $\hbar$ – константа Планка, а модуль параметра $R \equiv \hbar^2/2m_1 z_1 Z$ в случае $z_1 Z < 0$ является аналогом боровского радиуса [15]. По определению вектор $\mathbf{r}'$ принадлежит плоскости $\mathcal{P}$ и имеет полярные координаты (r', φ') . Наряду с размерными переменными r , $x = r \cos \varphi$, $\mathbf{r}'$ и k будем использовать безразмерные аргументы: безразмерные расстояния $\rho \equiv kr$ и $\rho' \equiv kr'$, безразмерное волновое число $q \equiv k|R|$ и параметр Зоммерфельда $\eta \equiv 1/2kR = \text{sgn } R/2q$.

Приведем и обсудим исходные уравнения. Для наших исследований это два уравнения в плоскости $\mathcal{P}$: уравнение Шредингера [3], [14] для волновой функции $\Psi^c(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \eta)$ двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы p_1

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) + \frac{z_1 Z}{r} \right] \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = E \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) \quad (1)$$

и порожденное этим уравнением уравнение для функции Грина $G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) + \frac{z_1 Z}{r} - E \right] G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2)$$

Здесь и далее по определению $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ – дельта-функция.

В уравнении (1) сумма всех операторов, заключенных в квадратные скобки, является полным гамильтонианом H . Этот гамильтониан коммутирует с оператором ∂_φ^2 и с оператором P_φ инверсии $\varphi \rightarrow -\varphi$. Поэтому наборы функций $\{\sin m\varphi\}_{|m|=1}^\infty$ и $\{\cos m\varphi\}_{|m|=0}^\infty$ с индексом $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ являются собственными для обоих операторов ∂_φ^2 и P_φ и образуют удобный и полный угловой базис для редукции обоих двумерных уравнений (1) и (2) к одномерным радиальным уравнениям. Из теории рядов Фурье (см. [16], ч. 2) известно, что разложение непрерывной и инвариантной относительно инверсии $\varphi \rightarrow -\varphi$ функции $f(r, \varphi)$ по такому базису вырождается в косинус-ряд Фурье

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ f_0(r) + \sum_{m=1, 2, \dots} [2f_m(r)] \cos m\varphi \right\} \quad (3)$$

с радиальными компонентами

$$f_m(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos m\varphi d\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь выявим важное следствие предположений о начальном состоянии квантовой частицы p_1 . Как предполагалось выше, частица p_1 испускается из бесконечно удаленной точки $x = -\infty$ оси OX и движется вдоль оси OX , причем в ее положительном направлении. Такое движение описывается функцией e^{ikx} , которая согласно теории двумерного рассеяния [3], [14] является старшим слагаемым асимптотики волновой функции Ψ^c в пределе $kr \rightarrow \infty$. Так как $x = r \cos \varphi$, то функция e^{ikx} инвариантна относительно инверсии $\varphi \rightarrow -\varphi$. Следовательно, волновая функция рассеяния Ψ^c должна обладать тем же свойством при любых значениях ее аргументов. Поэтому эта функция является косинус-рядом Фурье типа (3).

Обсудим свойства решения G^c уравнения (2). Правая часть этого уравнения инвариантна относительно перестановки векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ и относительно одновременной

инверсии $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\varphi' \rightarrow -\varphi'$ угловых координат этих векторов. Следовательно, искомая функция Грина G^c должна обладать теми же свойствами. Угловые базисные функции $(2\pi)^{-1/2} \cos m(\varphi - \varphi')$, $m = 0, 1, 2, \dots$, инвариантны относительно упомянутой выше инверсии. Поэтому функция G^c разлагается в ряд типа (3), но по угловым функциям, зависящим от разности углов φ и φ' .

Отметим еще одно свойство функции G^c . В случае выключенного кулоновского взаимодействия ($qQ = 0$) согласно принятым выше определениям $|R| = \infty$, а $\eta = 0$, поэтому уравнение (2) становится уравнением для свободной функции Грина $G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k})$. Следовательно, кулоновская функция Грина $G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)$, взятая в точке $\eta = 0$, равна функции $G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k})$.

Завершая настоящий раздел, напомним, что функция Куммера $\Phi(a, c; \xi)$ и функция Трикоми $\Psi(a, c; \xi)$ являются линейно независимыми решениями вырожденного гипергеометрического уравнения [17]

$$[\xi \partial_\xi^2 + (c - \xi) \partial_\xi - a]U(\xi) = 0, \quad (4)$$

функция $\Phi(a, c; \xi)$ удовлетворяет тождеству (преобразованию) Куммера

$$\Phi(a, c; \xi) \equiv e^\xi \Phi(c - a, c; -\xi), \quad (5)$$

а представления обеих функций Φ и Ψ в виде бесконечных рядов содержат гамма-функцию Γ и символ Похгаммера $(a)_n$.

3. РАДИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КУЛОНА И ГРИНА

В настоящем разделе ключевыми будут представления волновой функции Ψ^c и функции Грина G^c в виде рядов типа (3). Для анализа таких рядов вместо индекса $m = 0, 1, 2, \dots$ удобнее использовать индекс $\lambda = m - 1/2 = -1/2, 1/2, \dots$ и для сокращения записи считать, что $\varepsilon_\lambda = 1$, если $2\lambda = -1$, и $\varepsilon_\lambda = 2$ в случае $2\lambda \geq 1$.

Угловые базисные функции $\zeta_\lambda(\varphi)$ определим формулами

$$\zeta_\lambda(\varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{(2\lambda + 1)\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos m\varphi, \quad 2\lambda = -1, 1, 3, \dots, \quad m = \lambda + \frac{1}{2}.$$

Объектами нашего исследования будут проекции u_λ и G_λ^c функций Ψ^c и G^c на соответствующие угловые функции $\zeta_\lambda(\varphi)$ и $\zeta_\lambda(\varphi - \varphi')$. Такие проекции называем радиальными компонентами функций Ψ^c и G^c или радиальными волновыми функциями Кулона и радиальными кулоновскими функциями Грина.

3.1. Радиальные волновые функции Кулона полуцелого порядка. Используя индекс λ и символ ε_λ , представим функцию Ψ^c рядом типа (3):

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = (2\pi\rho)^{-1/2} \sum_{2\lambda=-1, 1, 3, \dots} \varepsilon_\lambda u_\lambda(\rho, \eta) \cos \frac{(2\lambda + 1)\varphi}{2}. \quad (6)$$

В уравнении Шредингера (1) заменим функцию Ψ^c таким рядом. Полученное уравнение последовательно спроецируем на все линейно независимые угловые функции $\zeta_\lambda(\varphi)$ и таким образом выведем счетную ($2\lambda = -1, 1, 3, \dots$) последовательность не зацепляющихся друг с другом радиальных уравнений Шредингера:

$$\left[\partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] u_\lambda(\rho, \eta) = 0, \quad \rho > 0, \quad \eta \in (-\infty, \infty). \quad (7)$$

Обсудим одно из них. Только на время обсуждения позволим индексу λ принимать любые вещественные значения. Используем известные в теории дифференциальных уравнений факты (см. [16], т.3, ч.2). Для уравнения (7) при условии $\lambda \geq -1/2$ точка $\rho = 0$ является регулярной, а точка $\rho = \infty$ – существенно особой. Для точки $\rho = 0$ определяющее уравнение $s(s-1) = \lambda(\lambda+1)$ имеет два корня $s_1 = \lambda+1$ и $s_2 = -\lambda$. Разность $s_1 - s_2 = 2\lambda+1$ таких корней равна целому числу, если λ – полуцелое или целое число. Только при таких значениях λ реализуется логарифмический случай: уравнение (7) имеет решение $F_\lambda(\rho, \eta)$, представимое рядом по степеням аргумента ρ , а любое другое решение, линейно независимое с таким рядом, содержит в качестве слагаемого произведение $F_\lambda(\rho, \eta) \ln \rho$. Символом $H_\lambda(\rho, \eta)$ обозначим одно из решений, содержащих такое произведение. Для полного анализа уравнения (7) достаточно знать два его линейно независимых решения F_λ и H_λ , потому что любое другое решение является линейной комбинацией этих решений. В случае целых значений $\lambda = \ell = 0, 1, 2, \dots$ обсуждаемое уравнение (7) превращается в давно известное в теории трехмерного рассеяния радиальное уравнение Кулона [3], [15]. Многие свойства его решений – радиальных кулоновских волновых функций $F_\ell(\rho, \eta)$ и $H_\ell(\rho, \eta)$ целого порядка ℓ – детально изучены [18].

Из данного выше качественного анализа уравнения (7) следуют два вывода. Достаточно найти линейно независимые решения F_λ и H_λ , $2\lambda = -1, 1, 3, \dots$, этого уравнения. Представляется логичным определить эти решения по аналогии с функциями F_ℓ и H_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Поступим именно таким образом.

Регулярной волновой функцией Кулона $F_\lambda(\rho, \eta)$ полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ назовем вещественное решение уравнения (7), обладающее асимптотиками

$$F_\lambda(\rho, \eta) = O(\rho^{\lambda+1}), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (8)$$

и

$$F_\lambda(\rho, \eta) = \sin \left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta) \right] + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Содержащуюся в асимптотике (9) пока неизвестную функцию $\delta_\lambda^c(\eta)$ переменной η логично назвать парциальной кулоновской фазой двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы p_1 .

Нерегулярной комплекснозначной волновой функцией Кулона полуцелого порядка $\lambda = -1/2, 1/2, \dots$ считаем решение $H_\lambda(\rho, \eta)$ уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \begin{cases} O(\sqrt{\rho} \ln \rho), & 2\lambda = -1, \\ O(\rho^{-\lambda}), & 2\lambda > -1, \end{cases}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (10)$$

и

$$H_\lambda(\rho, \eta) = \exp \left\{ i \left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda(\eta) \right] \right\} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Кроме решений F_λ и H_λ потребуется и вещественная нерегулярная функция Кулона полуцелого порядка G_λ . Определим ее формулой

$$G_\lambda(\rho, \eta) \equiv H_\lambda(\rho, \eta) - iF_\lambda(\rho, \eta), \quad 2\lambda = -1, 1, 3, \dots \quad (12)$$

Вследствие такого определения и формул (8)–(11) функция G_λ в пределе $\rho \rightarrow 0$ ведет себя так же, как функция H_λ , а в пределе $\rho \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$G_\lambda(\rho, \eta) = \cos \left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta) \right] + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Докажем, что решения F_λ , H_λ и G_λ уравнения (7), удовлетворяющие соответствующим условиям (8)–(13), существуют. Попутно получим представления этих решений через вырожденные гипергеометрические функции.

Сначала подстановкой

$$\xi = -2i\rho, \quad u_\lambda(\rho, \eta) = \rho^{\lambda+1} e^{i\rho} U(\xi)$$

сведем исследуемое уравнение (7) к вырожденному гипергеометрическому уравнению (4) с параметрами $a = \lambda + 1 + i\eta$ и $c = 2\lambda + 2$. Приведем полученное уравнение:

$$[\xi \partial_\xi^2 + (2\lambda + 2 - \xi) \partial_\xi - (\lambda + 1 + i\eta)]U(\xi) = 0. \quad (14)$$

При тех же параметрах a и c этому уравнению удовлетворяют функции $\Phi(a, c; \xi)$ и $\Psi(a, c; \xi)$. Следовательно, при любых множителях $C_\lambda(\eta)$ и $D_\lambda(\eta)$ решениями исходного уравнения (7) будут произведения

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &\equiv C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} e^{i\rho} \Phi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2; -2i\rho), \\ H_\lambda(\rho, \eta) &\equiv D_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} e^{i\rho} \Psi(\lambda + 1 + i\eta, 2\lambda + 2; -2i\rho). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь нужно показать, что эти произведения при вполне определенном выборе множителей $C_\lambda(\eta)$ и $D_\lambda(\eta)$ станут искомыми функциями Кулона, удовлетворяющими граничным условиям (8)–(11). Используя известные асимптотики [17] функций $\Phi(a, c; \xi)$ и $\Psi(a, c; \xi)$ с параметрами $a = \lambda + 1 + i\eta$ и $c = 2\lambda + 2$, убедимся в том, что обсуждаемые произведения $F_\lambda(\rho, \eta)$ и $H_\lambda(\rho, \eta)$ будут иметь требуемые асимптотики (8)–(11) тогда и только тогда, когда функции $\delta_\lambda^\xi(\eta)$, $C_\lambda(\eta)$ и $D_\lambda(\eta)$ переменной η заданы равенствами

$$\begin{aligned} \delta_\lambda^\xi(\eta) &= \arg \Gamma(\lambda + 1 + i\eta), \quad C_\lambda(\eta) = 2^\lambda \frac{|\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)|}{\Gamma(2\lambda + 2)} e^{-\pi\eta/2}, \\ D_\lambda(\eta) &= (-1)^{\lambda+1/2} 2^{\lambda+1} e^{i\delta_\lambda^\xi(\eta) + \pi\eta/2} = (-1)^{\lambda+1/2} 2^{2\lambda+1} \frac{\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)}{\Gamma(2\lambda + 2)C_\lambda(\eta)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Искомую функцию Кулона G_λ построим по формуле (12), заменив в ней уже найденные функции F_λ и H_λ правыми частями равенств (15).

Продолжим исследование кулоновских функций полуцелого порядка.

Сначала найдем их вронскианы. Уравнение Кулона (7) является дифференциальным уравнением второго порядка и не содержит производной первого порядка. Как известно [16], вронсиан двух любых решений уравнений такого класса равен константе и ее можно найти, заменив эти решения их асимптотиками. Следуя этому правилу и используя асимптотики (9), (11) и (13), получаем искомые вронскианы:

$$W(F_\lambda, H_\lambda) \equiv F_\lambda \partial_\rho H_\lambda - H_\lambda \partial_\rho F_\lambda = -1, \quad W(F_\lambda, G_\lambda) \equiv -1, \quad W(G_\lambda, H_\lambda) \equiv i. \quad (17)$$

Теперь убедимся в том, что обе функции F_λ и G_λ являются вещественными.

Начнем с функции F_λ . Заменив в ее представлении (15) функцию Φ известным разложением в степенной ряд [17], получим

$$F_\lambda(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} e^{i\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda + 1 + i\eta)_n}{(2\lambda + 2)_n} \frac{(-2i\rho)^n}{n!}. \quad (18)$$

Комплексное сопряжение такого ряда равносильно замене $i \rightarrow -i$. Следовательно,

$$F_\lambda^*(\rho, \eta) = C_\lambda(\eta) \rho^{\lambda+1} e^{-i\rho} \Phi(\lambda + 1 - i\eta, 2\lambda + 2; 2i\rho).$$

Правая часть этого равенства в силу тождества Куммера (5) равна исходной функции F_λ , определенной первой из формул (15). Значит, F_λ – вещественная функция.

Предположим, что функция G_λ имеет отличную от тождественного нуля мнимую часть T . Тогда возможны два случая: вронскиан $W(F_\lambda, T)$ равен мнимому числу или нулю. В первом случае вронскиан $W(F_\lambda, G_\lambda)$ окажется комплексным числом. Согласно второму равенству (17) вронскиан $W(F_\lambda, G_\lambda)$ – вещественное число. Во втором случае функции F_λ и T линейно зависимы. Значит, существует константа t такая, что $T = tF_\lambda$. Поэтому в пределе $\rho \rightarrow \infty$ асимптотика функции G_λ должна содержать в качестве слагаемого произведение константы t и старшего члена асимптотики (9) функции F_λ . В асимптотике (13) функции G_λ такого произведения нет. В обоих рассмотренных случаях получены противоречия. Значит, G_λ – вещественная функция.

Выведем представления функций Кулона F_λ и H_λ через функции Уиттекера $M_{\alpha, \beta}$ и $W_{\alpha, \beta}$. Для этого в равенствах (15) выразим функции Φ и Ψ через функции $M_{\alpha, \beta}$ и $W_{\alpha, \beta}$ по известным формулам [17]. В результате получим искомые представления:

$$\begin{aligned} F_\lambda(\rho, \eta) &= e^{-\pi\eta/2} i^{\lambda+1} \frac{|\Gamma(\lambda+1+i\eta)|}{2\Gamma(2\lambda+2)} M_{-i\eta, \lambda+1/2}(-2i\rho), \\ H_\lambda(\rho, \eta) &= e^{\pi\eta/2} i^{-\lambda} \frac{\Gamma(\lambda+1+i\eta)}{|\Gamma(\lambda+1+i\eta)|} W_{-i\eta, \lambda+1/2}(-2i\rho). \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что строение кулоновских функций F_λ и G_λ подробно исследовано в работе [10], но лишь в случае $2\lambda = -1$.

3.2. Радиальные функции Грина полуцелого порядка. Используя известное представление дельта-функции в полярных координатах [15]

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (rr')^{-1/2} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi'),$$

сведем уравнение (2) для функции Грина G^c к уравнению

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 - \frac{1}{rR} + k^2 \right) G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta) = \frac{2m_1}{\hbar^2} \frac{1}{\sqrt{rr'}} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (20)$$

Правая часть этого уравнения содержит дельта-функцию $\delta(\varphi - \varphi')$, аргументом которой является разность углов φ и φ' . Следовательно, искомое решение G^c должно быть разложением типа (3), но по угловым функциям $\zeta_\lambda(\varphi - \varphi')$:

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta) = \frac{m_1}{\pi \hbar^2} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \sum_{2\lambda=-1, 1, 3, \dots} \varepsilon_\lambda G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) \cos \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) (\varphi - \varphi') \right]. \quad (21)$$

В уравнении (20) заменим функцию G^c таким рядом. Полученное соотношение спроецируем на все угловые функции $\zeta_\lambda(\varphi - \varphi')$, выполнив интегрирование по обоим переменным φ и φ' на отрезке $[0, 2\pi]$, затем применим известное равенство [15]

$$\delta(r - r') = k \delta(\rho - \rho').$$

В результате выведем счетную ($2\lambda = -1, 1, 3, \dots$) совокупность незацепляющихся уравнений для радиальных компонент G_λ^c функции Грина G^c :

$$\left[\partial_\rho^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\rho^2} + 1 - \frac{2\eta}{\rho} \right] G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = \delta(\rho - \rho'). \quad (22)$$

Заметим, что каждому такому неоднородному уравнению отвечает ранее исследованное радиальное уравнение Шредингера, записанное в виде уравнения Кулона (7). Поэтому при любом значении λ функция G_λ^c является радиальной кулоновской функцией Грина для задачи рассеяния на полупрямой $\rho > 0$.

Самый простой способ построения радиальной функции Грина для задачи рассеяния описан в монографии [19] на примере радиального уравнения Шредингера с короткодействующим потенциалом. Применяя этот способ к уравнению (22), получим представление каждой $(2\lambda = -1, 1, 3, \dots)$ радиальной функции Грина G_λ^c через функции Кулона:

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = -F_\lambda(\rho_<, \eta) H_\lambda(\rho_>, \eta), \quad \rho, \rho' > 0, \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (23)$$

где $\rho_< = \rho'$, $\rho_> = \rho$, если $\rho' < \rho$, а в случае $\rho' > \rho$ – наоборот: $\rho_< = \rho$, а $\rho_> = \rho'$.

Выполним проверку. В уравнении (22) заменим функцию G_λ^c правой частью равенства (23). В любом из случаев $\rho' < \rho$ или $\rho' > \rho$ одна из функций $F_\lambda(\rho_<, \eta)$ или $H_\lambda(\rho_>, \eta)$ является решением уравнения (7), а при $\rho' = \rho$ вронскиан таких функций равен единице. Поэтому исследуемое уравнение вырождается в тождество.

Приступим к выводу интегрального представления функции G_λ^c .

Сначала в равенстве (23) выразим функции Кулона через функции Уиттекера по формулам (19). В результате получим равенство

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = -i \frac{\Gamma(\lambda + 1 + i\eta)}{2\Gamma(2\lambda + 2)} M_{-i\eta, \lambda+1/2}(-2i\rho_<) W_{-i\eta, \lambda+1/2}(-2i\rho_>). \quad (24)$$

Отметим, что это равенство воспроизводит давно известное соотношение, выведенное в работе [11] другим способом, основанным на осцилляторном представлении уравнения Кулона в многомерном конфигурационном пространстве.

Далее потребуется известное интегральное представление произведения функций Уиттекера [20] через модифицированную функцию Бесселя $I_{2\beta}$:

$$M_{\alpha, \beta}(ac) W_{\alpha, \beta}(bc) = \frac{c\sqrt{ab}\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(1/2+\beta-\alpha)} \times \\ \times \int_0^\infty e^{-(c/2)(a+b)\operatorname{ch} u} \left[\operatorname{cth} \frac{u}{2} \right]^{2\alpha} I_{2\beta}(c\sqrt{ab}\operatorname{sh} u) du. \quad (25)$$

Это представление верно при условиях $b > a$, $\operatorname{Re}(1/2 + \beta - \alpha) > 0$ и, как отметил Кларсфельд [21], во всей комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \beta > -1/2$ параметра β .

Теперь произведение функций Уиттекера, содержащееся в представлении (24), заменим табличным интегралом (25), положив в нем $\alpha = i\eta$, $\beta = \lambda + 1/2$ и $c = -2i$, а также $a = \rho'$, $b = \rho$ при $\rho > \rho'$ и, наоборот, $a = \rho$, $b = \rho'$ в случае $\rho < \rho'$. В результате получим искомое интегральное представление радиальной функции Грина:

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = i^{\lambda+3/2} \sqrt{\rho\rho'} \int_0^\infty \left[\operatorname{th} \frac{u}{2} \right]^{2i\eta} e^{i(\rho+\rho')\operatorname{ch} u} J_{2\lambda+1}(2\sqrt{\rho\rho'}\operatorname{sh} u) du, \quad (26)$$

где $J_{2\lambda+1}$ – функция Бесселя первого рода. Запишем полученное представление в переменных $s = t \operatorname{sh}(u)$ и $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'}$ в виде равенства

$$G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta) = (-1)^{\lambda+3/2} \frac{t}{2} \int_0^\infty \left[\frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2} + t} \right]^{2i\eta} \times \\ \times e^{i(\rho+\rho')\sqrt{1+(s/t)^2}} J_{2\lambda+1}(s) \frac{ds}{\sqrt{s^2 + t^2}}. \quad (27)$$

В следующем разделе это равенство окажется ключевым.

4. МАЖОРАНТНЫЕ ОЦЕНКИ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА И КУЛОНА

В настоящем разделе используется обозначение $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'}$ и решается следующая задача: начиная с интегрального представления (27) функции G_λ^c , последовательно вывести простые, но равномерные по параметру η и индексу λ мажорантные оценки функций $|G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta)|$, $|F_\lambda(\rho', \eta)H_\lambda(\rho, \eta)|$, $|F_\lambda(\rho, \eta)|$ и $|F_\lambda(\rho', \eta)G_\lambda(\rho, \eta)|$.

Приступим к решению. Как известно [16], модуль определенного интеграла от некоторой подынтегральной функции не превышает интеграла от модуля этой же функции. Поэтому из представления (27) следует, что при любых λ и η

$$|G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta)| \leq B_\lambda(t) \equiv \frac{t}{2} \int_0^\infty \frac{|J_{2\lambda+1}(s)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} ds. \quad (28)$$

Предположим, что удалось найти довольно простую функцию $P_\lambda(t)$, превышающую интеграл $B_\lambda(t)$ при любых λ и t . Тогда согласно (28) эта функция будет искомой мажорантной оценкой для функции $|G_\lambda^c|$ в следующем смысле:

$$|G_\lambda^c(\rho, \rho', \eta)| \leq B_\lambda(t) < P_\lambda(t). \quad (29)$$

Покажем, как, используя эту оценку, вывести все остальные искомые оценки. Сначала в неравенствах (29) заменим функцию Грина G_λ^c произведением (23) и таким образом докажем оценку

$$|F_\lambda(\rho', \eta)H_\lambda(\rho, \eta)| < P_\lambda(t), \quad \rho' \leq \rho. \quad (30)$$

Положив в этой оценке $\rho = \rho'$, получим следующую цепочку неравенств:

$$|F_\lambda(\rho', \eta)| < |F_\lambda(\rho', \eta)H_\lambda(\rho', \eta)| < P_\lambda(2\rho'), \quad \rho' \geq 0. \quad (31)$$

Выведем еще две оценки. Вследствие определения (12) функции $G_\lambda(\rho, \eta)$ имеем

$$|F_\lambda(\rho', \eta)H_\lambda(\rho, \eta)| = \{[F_\lambda(\rho', \eta)F_\lambda(\rho, \eta)]^2 + [F_\lambda(\rho', \eta)G_\lambda(\rho, \eta)]^2\}^{1/2},$$

поэтому верно неравенство

$$|F_\lambda(\rho', \eta)G_\lambda(\rho, \eta)| < |F_\lambda(\rho', \eta)H_\lambda(\rho, \eta)|, \quad \rho' \leq \rho.$$

Правая часть этого неравенства подчиняется соотношению (30). Следовательно, и левая часть этого неравенства удовлетворяет соотношению

$$|F_\lambda(\rho', \eta)G_\lambda(\rho, \eta)| < P_\lambda(t), \quad \rho' \leq \rho. \quad (32)$$

Итак, если известна функция $P_\lambda(t)$, мажорирующая интеграл $B_\lambda(t)$, то верны оценки (29)–(32). Осталось найти такую функцию. Для этого придется отдельно рассмотреть разными способами случаи $2\lambda \geq 1$ и $2\lambda = -1$.

Случай $2\lambda \geq 1$. В этом случае сумма $2\lambda + 1$ больше или равна двум, а известные неравенства [21]

$$\int_0^\infty \frac{|J_\nu(s)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} ds < \int_0^\infty |J_\nu(s)| \frac{ds}{s} < \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \quad (33)$$

выполняются при условии $\nu \geq 1$. Поэтому в этих неравенствах можно положить $\nu = 2\lambda + 1$, а затем умножить получившиеся соотношения на множитель $t/2$. В результате получается верхняя оценка интеграла $B_\lambda(t)$ и искомое представление функции $P_\lambda(t)$:

$$B_\lambda(t) \equiv \frac{t}{2} \int_0^\infty \frac{|J_{2\lambda+1}(s)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} ds < P_\lambda(t) \equiv \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{2\lambda + 1}}, \quad 2\lambda \geq 1. \quad (34)$$

Подставим найденную функцию $P_\lambda(t)$ в доказанные выше неравенства (29)–(32). Обсудим полученные таким образом оценки. Начнем с преимуществ. Все эти оценки убывают в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ как $O(\lambda^{-1/2})$ и содержат функцию $P_\lambda(t)$, которую нетрудно вычислить при любых значениях аргументов ρ , ρ' , η и индекса λ . Основной недостаток обсуждаемых оценок проявляется в пределе больших значений аргументов ρ и ρ' , когда левые части этих оценок близки к единице, а правые части неограниченно возрастают как $O(\sqrt{\rho\rho'})$. В этом пределе оценки (29)–(32) становятся слишком грубыми. Явно завышенной является и оценка (30) для функции $F_\lambda(\rho', \eta)$ в пределе $\rho' \rightarrow 0$. Действительно, в этом пределе согласно формуле (8) такая функция убывает быстрее, чем функция ρ' , а именно как $O(\rho'^{\lambda+1})$.

Случай $2\lambda = -1$. В этом случае $\nu \equiv 2\lambda + 1 = 0$, а неравенство (33) верно при условии $\nu \geq 1$. Поэтому это неравенство нельзя использовать для оценки функции $|J_0(s)|$. В известных справочниках [17], [18] для этой функции приводится лишь одна оценка сверху $|J_0(s)| \leq 1$, $s \geq 0$, которая порождается интегралом Пуассона:

$$J_0(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dw \cos(s \sin w).$$

Другие мажорантные оценки функции $|J_0(s)|$, справедливые при любом $s \geq 0$, по-видимому, неизвестны. Поэтому придется доказать равномерную оценку

$$|J_0(s)| < \sqrt{\frac{2}{\pi s}}, \quad s \geq 0. \quad (35)$$

Если $0 \leq s \leq 2/\pi$, то $\sqrt{2/\pi s} \geq 1$, но $|J_0(s)| \leq 1$ при любом $s \geq 0$. Поэтому на отрезке $0 \leq s \leq 2/\pi$ оценка (35) заведомо верна. Теперь воспользуемся известной асимптотикой [18] суммы квадратов функций Бесселя $J_0(s)$ и $Y_0(s)$ первого и второго родов. Запишем эту асимптотику в виде произведения:

$$J_0^2(s) + Y_0^2(s) = \frac{2}{\pi s} \left[1 - \frac{1}{8s^2} + \varepsilon(s) \right], \quad \varepsilon(s) > 0, \quad \varepsilon = O(s^{-4}), \quad s \rightarrow \infty.$$

Исследуем его второй сомножитель $S(s)$, равный сумме, заключенной в квадратные скобки. Слагаемое $\varepsilon(s)$ положительное и убывает быстрее слагаемого $(8s^2)^{-1}$. Поэтому существует конечное значение s_0 аргумента s такое, что на всей полупрямой $s \geq s_0$ функция $S(s)$ меньше единицы. Следовательно, на этой полупрямой обе функции $|J_0^2(s)|$ и $|Y_0^2(s)|$ не превышают первого сомножителя обсуждаемой асимптотики. Значит, оценка (35) верна в случае $s \geq s_0$. Доказать эту оценку в оставшемся случае $2/\pi < s < s_0$ удалось, но лишь путем вычислений функции $|J_0(s)|$ с четырнадцатизначной точностью на отрезке $2/\pi \leq s \leq 10^{15}$.

Для исследования мажорантной оценки $P_{-1/2}(t)$ интеграла (28), $2\lambda = -1$, кроме неравенства (35) потребуется эллиптический интеграл первого рода $F(\varphi|\alpha)$. Напомним определение такого интеграла и его известные представления [18], [20]. Интеграл $F(\varphi|\alpha)$ с аргументом φ и модулярным углом α определяется равенством

$$F(\varphi|\alpha) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2 (\sin \theta)^2}}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right],$$

и поэтому является четной функцией угла α . В случае $\varphi = \pi/2$ интеграл $F(\varphi|\alpha)$ называется полным и обозначается символом $K(\alpha)$. В случае $\alpha = \pi/4$ для интеграла $F(\varphi|\alpha)$ имеются два представления [20]:

$$\begin{aligned} F\left(\varphi\left|\frac{\pi}{4}\right.\right) &= 2 \int_0^w \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}, & \varphi &= \arccos\left[\frac{1-w^2}{1+w^2}\right], & 0 \leq w \leq 1, \\ F\left(\varphi\left|\frac{\pi}{4}\right.\right) &= 2 \int_w^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}, & \varphi &= \arccos\left[\frac{w^2-1}{1+w^2}\right], & w \geq 1. \end{aligned} \quad (36)$$

Перейдем к анализу интеграла (28) в случае $2\lambda = -1$. Заменим в нем функцию $|J_0(s)|$ правой частью неравенства (35). Полученный интеграл подстановкой $s = tu^2$ сведем к сумме двух интегралов (36) с одним и тем же пределом $w = 1$. Такая сумма по определению является полным эллиптическим интегралом $K(\pi/4) = 1.85407647\dots$ первого рода с модулярным углом $\alpha = \pi/4$. Запишем выполненные преобразования в виде следующей цепочки соотношений:

$$\int_0^\infty \frac{|J_0(s)|}{\sqrt{s^2+t^2}} ds < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}} = \sqrt{\frac{8}{\pi t}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = \sqrt{\frac{8}{\pi t}} K\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Основное следствие этой цепочки – равномерная по переменной $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'}$ оценка

$$\begin{aligned} B_{-1/2}(t) &< P_{-1/2}(t) \equiv \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K\left(\frac{\pi}{4}\right) = \beta(\rho\rho')^{1/4}, \\ \beta &\equiv \frac{2K(\pi/4)}{\sqrt{\pi}} = 2.09209924\dots \end{aligned} \quad (37)$$

Перейдем к построению более точных оценок интеграла $B_{-1/2}(t)$. Начнем с того, что введем неотрицательный параметр b и запишем этот интеграл в виде суммы интеграла по отрезку $[0, b]$ и интеграла по полупрямой $[b, \infty)$. В первом интеграле заменим функцию $|J_0(s)|$ единицей, а во втором – правой частью неравенства (35). Таким образом получим справедливую при любом $b > 0$ оценку

$$B_{-1/2}(t) < Q(t, b) \equiv \frac{t}{2} \int_0^b \frac{ds}{\sqrt{s^2+t^2}} + \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_b^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}. \quad (38)$$

Из всех таких оценок выберем наилучшую. Для этого найдем производную

$$\partial_b Q(t, b) = \frac{t}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi b}}\right) \frac{1}{\sqrt{b^2+t^2}}$$

и заметим, что она имеет единственный нуль $b = 2/\pi$ и является отрицательной, если $b < 2/\pi$, и положительной, если $b > 2/\pi$. Следовательно, при любом $t \geq 0$ функция $Q(t, b)$ по переменной b имеет единственный локальный минимум и такой минимум достигается в точке $b = 2/\pi$. Поэтому наилучшей является оценка $Q(t, b)$ при значении $b = 2/\pi$.

Исследуем эту оценку. В сумме $Q(t, b)$ двух интегралов (38) положим $b = 2/\pi$, первый интеграл считаем функцией $f(t)$, а второй – функцией $g(t)$:

$$\begin{aligned} Q\left(t, \frac{2}{\pi}\right) &= f(t) + g(t), \\ f(t) &\equiv \frac{t}{2} \int_0^{2/\pi} \frac{ds}{\sqrt{s^2+t^2}}, & g(t) &\equiv \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{2/\pi}^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Рис. 1. (а) – Отношения $f(t)/Q(t, 2/\pi)$ и $g(t)/Q(t, 2/\pi)$ функций $f(t)$ и $g(t)$, определенных равенствами (40) и (41) к их сумме $Q(t, 2/\pi)$ – сплошная и штриховая кривые; функции $c_1(t) \equiv 1$ и $c_2(t) \equiv 0$ – сплошная и штриховая прямые. (б) – Отношения $B_{-1/2}(t)/Q(t, 2/\pi)$, $B_{-1/2}(t)/Q_{-}(t)$ и $B_{-1/2}(t)/Q_{+}(t)$ интеграла (28) к функциям $Q(t, 2/\pi)$ и $Q_{-}(t)$, $Q_{+}(t)$, заданным формулами (39) и (42), – сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые; функции $c_1(t) \equiv 1$ и $c_3(t) = 0.63667807\dots$ – сплошная и штриховая прямые.

Оба интеграла сведем к табличным [20], а затем исследуем. Перечислим итоговые выводы. Интеграл $f(t)$ содержит логарифмическую функцию,

$$f(t) = \frac{t}{2} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi t} \right)^2} + \frac{2}{\pi t} \right], \quad (40)$$

а интеграл $g(t)$ в силу равенств (36) выражается через эллиптические интегралы:

$$g(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \times \begin{cases} F\left(\varphi \middle| \frac{\pi}{4}\right), & t \leq \frac{2}{\pi}, \\ 2K\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\varphi \middle| \frac{\pi}{4}\right), & t \geq \frac{2}{\pi}, \end{cases} \quad \varphi \equiv \arccos\left(\frac{|2 - \pi t|}{2 + \pi t}\right). \quad (41)$$

Следовательно, обе функции $f(t)$ и $g(t)$ сходятся к нулю в пределе $t \rightarrow 0$ как $O(t \ln t)$ и $O(t)$ и монотонно возрастают при увеличении аргумента t . Значения функции $f(t)$ ограничены сверху числом $1/\pi$, а функция $g(t)$ такова, что $g(t) = O(t^{1/2})$, если $t \rightarrow \infty$. В силу перечисленных свойств функций в их сумме при малых значениях аргумента доминирует первое слагаемое ($f(t) \gg g(t)$), а при больших – второе ($g(t) \gg f(t)$). Этот вывод иллюстрирует рис. 1а, на котором изображены графики отношений функций $f(t)$ и $g(t)$ к их сумме $Q(t, 2/\pi)$. Старшие слагаемые $Q_{-}(t)$ и $Q_{+}(t)$ асимптотик этой суммы в соответствующих пределах $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ являются довольно простыми функциями:

$$Q_{-}(t) \equiv \frac{t}{2} \left(\ln \frac{4}{\pi t} + 2 \right), \quad Q_{+}(t) \equiv \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (42)$$

Перечислим следствия описанных выше свойств функций $Q(t, 2/\pi)$ и ее асимптотик $Q_{\pm}(t)$. Для интеграла $B_{-1/2}(t)$, заданного формулой (28), функция $Q_{-}(t)$

является оценкой сверху при достаточно малых значениях t ; функция $Q(t, 2/\pi)$ является верхней оценкой, но при любых значениях t ; этим же свойством обладает и функция $Q_+(t)$, потому что она совпадает с функцией $P_{-1/2}(t)$, определенной формулами (37). Качество оценок $Q(t, 2/\pi)$ и $Q_{\pm}(t)$ поясняет рис. 16, на котором изображены графики отношений этих функций к интегралу $B_{-1/2}(t)$, вычисленному с четырнадцатизначной точностью. Как видно, оценка $B_{-1/2}(t) < Q_-(t)$ является довольно точной, если $10^{-4} < t < 10^{-1}$, и неприменима в области $t > 10$, оценка $B_{-1/2}(t) < Q(t, 2/\pi)$ верна на всем отрезке $10^{-4} \leq t \leq 10^4$, но слишком завышена в области $10^{-4} < t < 1$, оценка $B_{-1/2}(t) < Q_+(t)$ лишена всех недостатков предыдущих оценок и является наиболее точной при всех значениях аргумента $t \equiv 2\sqrt{\rho\rho'} \in [10^{-4}, 10^4]$.

Анализ случая $2\lambda = -1$ закончим следующим замечанием: в этом случае в качестве наиболее простых мажорантных оценок функций $|G_{\lambda}^c(\rho, \rho', \eta)|$, $|F_{\lambda}(\rho', \eta)H_{\lambda}(\rho, \eta)|$, $|F_{\lambda}(\rho, \eta)|$ и $|F_{\lambda}(\rho', \eta)G_{\lambda}(\rho, \eta)|$ можно использовать неравенства (29)–(32), полагая в этих неравенствах $P_{-1/2}(t) = Q_-(t)$, если $0 < t < 0.1$, и $P_{-1/2}(t) = Q_+(t)$, если $t \geq 0$.

Подчеркнем, что в настоящем разделе впервые выведены мажорантные оценки (29), (32), (34), (37) всех $(2\lambda = -1, 1, \dots)$ функций G_{λ}^c и F_{λ} .

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ И АМПЛИТУДЫ ДВУМЕРНОГО КУЛОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

В настоящем разделе исследуется строение регулярной волновой функции рассеяния Ψ^c , подчиненной уравнению Шредингера (1). Сначала выводятся представления этой функции через функции Куммера и через функции Кулона F_{λ} . Затем для амплитуды кулоновского рассеяния f^c строится и анализируется ряд типа (3), содержащий парциальные фазы δ_{λ}^c .

5.1. Представления волновой функции через функции Куммера. Регулярное решение уравнения Шредингера (1) в случае упругого рассеяния впервые получено в работе [7] с помощью параболических координат.

Предложим иной способ. Пусть $C(\eta)$ – некоторый множитель. Подстановкой

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = C(\eta)e^{ikx}U(\xi), \quad \xi \equiv 2ikr \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 = ik(r - x), \quad (43)$$

сведем уравнение Шредингера (1) к гипергеометрическому уравнению (4) с параметрами $a = -i\eta$ и $c = 1/2$. В качестве решения $U(\xi)$ такого уравнения возьмем функцию Куммера $\Phi(-i\eta, 1/2, \xi)$. Множитель $C(\eta)$ определим равенством

$$C(\eta) = \frac{\Gamma(1/2 + i\eta)}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi\eta/2}. \quad (44)$$

Используя известную асимптотику [17] функции $\Phi(-i\eta, 1/2, \xi)$ в пределе $|\xi| \rightarrow \infty$, проверим, что только при таком определении этого множителя обсуждаемое решение

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = C(\eta)e^{ikx}\Phi\left(-i\eta, \frac{1}{2}, \xi\right), \quad \Phi\left(-i\eta, \frac{1}{2}; \xi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\eta)_n}{(1/2)_n} \frac{\xi^n}{n!}, \quad (45)$$

уравнения Шредингера (1) в случае $\rho \equiv kr \rightarrow \infty$, $x \neq r$, т. е. $\varphi \neq 0$, имеет асимптотику

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = e^{ikx+i\eta \ln[k(r-x)]} + r^{-1/2} e^{ikr-i\eta \ln(2kr)} f^c(\varphi; k, \eta) + O(|\xi|^{3/2}). \quad (46)$$

Обсудим эту асимптотику. Оба ее слагаемых обладают прозрачным физическим смыслом: первое слагаемое описывает линейную волну, распространяющуюся вдоль оси OX коллинеарно орту $\mathbf{e}_1$, второе слагаемое в качестве множителей содержит расходящуюся круговую волну и амплитуду кулоновского рассеяния

$$f^c(\varphi; k, \eta) \equiv \frac{\Gamma(1/2 + i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} (2ik)^{-1/2} \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right]^{-1-2i\eta}, \quad \varphi \neq 0. \quad (47)$$

Вследствие дальнедействующей природы кулоновских сил амплитуды

$$e^{i\eta \ln[k(r-x)]} = [k(r-x)]^{i\eta}, \quad e^{-i\eta \ln(2kr)} = (2kr)^{-i\eta}$$

линейной и круговой волн быстро осциллируют в области больших значений их аргументов, кулоновская амплитуда в направлении рассеяния вперед ($\varphi = 0$) не определена, точка $\varphi = 0$ является существенно особой. Согласно формулам (45) в этой точке при любых $\mathbf{r}$, $\mathbf{k}$ и η верно тождество $\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) \equiv C(\eta)e^{ikx}$.

Теперь в формулах (45) применим к функции $\Phi(-i\eta, 1/2, \xi)$ преобразование Куммера (5) и таким образом выведем еще одно представление решения Ψ^c :

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = C(\eta)e^{ikr} \Phi\left(\frac{1}{2} + i\eta, \frac{1}{2}, -\xi\right) = C(\eta)e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2 + i\eta)_n}{(1/2)_n} \frac{(-\xi)^n}{n!}. \quad (48)$$

Построенное решение (45), (48) уравнения Шредингера (1) удовлетворяет всем принятым в квантовой механике [15] и теории рассеяния [19] ограничениям на волновую функцию упругого рассеяния. Действительно, такое решение имеет непрерывные производные первого и второго порядков по обоим аргументам r и φ и обладает физически приемлемой асимптотикой (46), содержащей падающую и рассеянную волны и амплитуду рассеяния (47). Поэтому обсуждаемое решение считаем физической волновой функцией двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы p_1 .

Необходимо отметить, что представления (45) и (47) впервые получены в работе [7], однако особый случай $\varphi = 0$ и физические свойства функций Ψ^c и f^c в этой работе не обсуждались.

5.2. Разложение волновой функции по регулярным функциям Кулона.

Докажем, что волновую функцию Ψ^c , заданную формулами (44) и (48), можно представить через регулярные функции Кулона F_λ и парциальные фазы δ_λ^c в виде

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) = \sqrt{\frac{2i}{\pi\rho}} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda i^\lambda e^{i\delta_\lambda^c(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta) \cos\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varphi\right]. \quad (49)$$

Используем разложение (6) волновой функции Ψ^c . Любая радиальная компонента u_λ такого разложения является следующим интегралом:

$$u_\lambda(\rho, \eta) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{2\pi} \Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) \cos\left[\frac{(2\lambda+1)\varphi}{2}\right] d\varphi. \quad (50)$$

Выразим этот интеграл через функции δ_λ^c и F_λ , определенные формулами (16) и (18). Для этого функцию Ψ^c , стоящую под интегралом, заменим правой частью равенства (48), содержащего ряд Куммера $\Phi(1/2 + i\eta, 1/2, \xi)$ и множитель $C(\eta)$. Этот множитель заменим правой частью равенства

$$C(\eta) = \frac{\Gamma(2\lambda+2)}{2^\lambda \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 + i\eta)}{\Gamma(\lambda+1 + i\eta)} e^{i\delta_\lambda^c(\eta)} C_\lambda(\eta),$$

которое следует из определений (16) и (44).

После упомянутых выше замен в интеграле (50) подынтегральная функция представится бесконечным рядом с индексом суммирования $n = 0, 1, \dots$, а каждое слагаемое этого ряда будет содержать произведение $[\sin(\varphi/2)]^{2n} \cos m\varphi$ с фиксированным индексом $m = \lambda + 1/2$. Проинтегрируем этот ряд почленно. Для этого сделаем замену $\varphi \rightarrow 2\varphi$ и используем табличный интеграл [20]

$$\int_0^\pi (\sin 2\varphi)^{2n} \cos(2m\varphi) d\varphi = \pi \frac{(-1)^m}{4^n} \frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}, \quad n \geq m, \quad (51)$$

равный нулю в случае $n < m$. Затем, применив известные формулы [18]

$$\left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{\Gamma(1/2+n)}{\Gamma(1/2)} = 2^{-n}(2n-1)!!, \quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

сведем полученный ряд к разложению (18) функции F_λ и таким образом покажем, что при любом значении λ имеет место равенство

$$u_\lambda(\rho, \eta) = 2i^{\lambda+1/2} e^{i\delta_\lambda^c(\eta)} F_\lambda(\rho, \eta). \quad (52)$$

Теперь в исходном разложении (6) волновой функции Ψ^c заменим каждую компоненту u_λ правой частью этого равенства. В итоге получим представление (49).

5.3. Представление амплитуды рассеяния через парциальные фазы.

Докажем, что амплитуду кулоновского рассеяния f^c , заданную равенством (47), можно представить через парциальные фазы δ_λ^c в следующем виде:

$$f^c(\varphi; k, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi k}} \sum_{2\lambda=-1,1,\dots} \varepsilon_\lambda \{e^{2i\delta_\lambda^c(\eta)} - 1\} \cos\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varphi\right], \quad \varphi \neq 0, \pi. \quad (53)$$

Для доказательства применим способ, давно известный в теории рассеяния [14] в случае короткодействующего потенциала. Напомним его основные этапы. Сначала асимптотика полной волновой функции рассеяния в пределе больших расстояний представляется через амплитуду рассеяния. Затем для этой же волновой функции и в том же пределе выводится асимптотическое представление через парциальные фазы рассеяния. Наконец, найденные асимптотики полагаются равными друг другу и из полученного таким образом соотношения находится представление амплитуды рассеяния через парциальные фазы.

Последуем этой схеме и уделим пристальное внимание двум особым случаям: рассеянию вперед ($\varphi = 0$) и рассеянию назад ($\varphi = \pi$).

Сначала преобразуем асимптотику (46) функции Ψ^c . В этой асимптотике перейдем к переменной $\rho = kr$, а функцию e^{ikx} заменим ее известным разложением [17]

$$e^{ikx} = e^{i\rho \cos \varphi} = J_0(\rho) + 2 \sum_{m=1,2,\dots} i^m \cos m\varphi J_m(\rho), \quad \rho = kr.$$

В этом разложении положим $m = \lambda + 1/2$, а все функции Бесселя J_m аппроксимируем их известными асимптотиками [17]

$$J_{\lambda+1/2}(\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left(\rho - \frac{\pi\lambda}{2}\right), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

В результате исходная асимптотика (46) функции Ψ^c примет следующий вид:

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) \sim \sqrt{\frac{2i}{\pi\rho}} (2\rho)^{i\eta} \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right]^{2i\eta} \sum_{\lambda=-1,1,3,\dots} i^\lambda \varepsilon_\lambda \sin\left(\rho - \frac{\pi\lambda}{2}\right) \cos\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varphi\right] + \\ + r^{-1/2} (2\rho)^{-i\eta} e^{i\rho} f^c(\varphi; k, \eta), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \varphi \neq 0. \quad (54)$$

Теперь выведем другое представление асимптотики этой же функции. Для этого используем равенство (49). В нем положим $\rho \rightarrow \infty$, а все функции F_λ аппроксимируем по формулам (9). В результате получим искомое соотношение:

$$\Psi^c(\mathbf{r}; \mathbf{k}, \eta) \sim \sqrt{\frac{2i}{\pi\rho}} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda i^\lambda e^{i\delta_\lambda^c(\eta)} \times \\ \times \sin\left[\rho - \eta \ln(2\rho) - \frac{\pi\lambda}{2} + \delta_\lambda^c(\eta)\right] \cos\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varphi\right], \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Итак, для волновой функции Ψ^c в одном и том же пределе $\rho \rightarrow \infty$, $\varphi \neq 0$, выведены два разных асимптотических представления: представление (54) через амплитуду рассеяния f^c и представление (55) через фазы рассеяния δ_λ^c . Приравняв правые части этих соотношений друг к другу, затем применим формулу

$$\sin t = -\frac{i}{2}[e^{it} - e^{-it}]$$

и, разрешив получившееся уравнение относительно амплитуды, получим равенство

$$f^c(\varphi; k, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi k}} \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda \{e^{2i\delta_\lambda^c(\eta)} - 1\} \cos\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varphi\right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \left\{ \left[1 - \left(2\rho \sin \frac{\varphi}{2}\right)^{2i\eta}\right] S^+(\varphi) + \right. \\ \left. + \left[1 - \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{2i\eta}\right] (2\rho)^{2i\eta} S^-(\varphi) \right\}, \quad (56)$$

где символами $S^\pm(\varphi)$ обозначены следующие ряды:

$$S^\pm(\varphi) \equiv \sum_{2\lambda=-1,1,3,\dots} \varepsilon_\lambda (\pm 1)^{\lambda+1/2} \cos\left[\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\varphi\right] = 1 + 2 \sum_{m=1,2,\dots} (\pm 1)^m \cos m\varphi.$$

Для исследования этих рядов используем табличные суммы [20]

$$s^\pm(\varphi; a) \equiv 1 + 2 \sum_{m=1,2,\dots} (\pm 1)^m e^{-ma} \cos m\varphi = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a \mp \cos \varphi}, \quad a > 0.$$

Заметим, что в пределе $a \rightarrow 0+$ сумма $s^+(\varphi; a)$ становится суммой $S^+(\varphi)$, а сумма $s^-(\varphi; a)$ переходит в сумму $S^-(\varphi)$. В этом пределе сумма $s^+(\varphi; a)$ тождественно равна нулю, если $\varphi \neq 0$, и расходится при $\varphi = 0$; сумма $s^-(\varphi; a)$ вырождается в нуль, если $\varphi \neq \pi$, и не существует при $\varphi = \pi$. Следовательно, обе суммы $S^\pm(\varphi)$ равны нулю на интервалах $0 < \varphi < \pi$ и $\pi < \varphi < 2\pi$; сумма $S^+(\varphi)$ терпит разрыв второго рода в точке $\varphi = 0$, а сумма $S^-(\varphi)$ – в точке $\varphi = \pi$. Поэтому разложение (56) теряет смысл в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, а при всех остальных значениях угла φ из этого разложения следует представление (53), которое и требовалось доказать.

Стоит отметить, что в работе [13] представление амплитуды f^c кулоновского рассеяния через парциальные фазы δ_λ^c получено способом, отличным от приведенного выше, а особые случаи $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \pi$ не исследовались.

6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Используем интегральные представления (26) радиальных функций Грина G_λ^c для вывода интегрального представления кулоновской функции Грина G^c и представления свободной функции Грина G^0 через функцию Ханкеля $H_0^{(1)}$.

Сначала докажем равенство

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta) = -\frac{m_1}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty \left[\operatorname{th} \frac{u}{2} \right]^{2i\eta} \times \\ \times e^{i(\rho + \rho') \operatorname{ch} u} \cos \left\{ 2\sqrt{\rho\rho'} \operatorname{sh} u \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2} \right\} du. \quad (57)$$

Для этого в разложении (21) функции G^c заменим все функции G_λ^c соответствующими интегралами (26). Затем поменяем порядок суммирования и интегрирования. Получившуюся сумму найдем по известной формуле [18]

$$J_0(t) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(t) \cos(2m\varphi) = \cos(t \sin \varphi)$$

и таким образом завершим доказательство равенства (57).

Обсудим интеграл в правой части равенства (57). Модуль подынтегральной функции не превышает единицы во всей области интегрирования. Поэтому обсуждаемый интеграл сходится на полуинтервале $0 \leq u < \infty$. Для доказательства сходимости этого интеграла на верхнем пределе при любом вещественном аргументе η сначала исследуем случай $\eta = 0$ и попутно покажем, что из равенства (57) в этом случае следуют соотношения

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)|_{\eta=0} = G^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}) \equiv -i \frac{m_1}{2\hbar^2} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (58)$$

Итак, в исходном интеграле (57) положим $\eta = 0$. Тогда подынтегральная функция станет четной относительно замены $u \rightarrow -u$. Используя это свойство, заменим исследуемый интеграл половиной интеграла с такой же подынтегральной функцией, но с нижним пределом, равным $-\infty$. Затем выполним замену переменной интегрирования u на переменную t по формулам

$$t = e^u, \quad dt = t du, \quad \operatorname{ch} u = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad \operatorname{sh} u = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

и для удобства введем функции $a_\pm$ и $b_\pm$ равенствами

$$a_\pm \equiv \rho + \rho' \pm 2\sqrt{\rho\rho'} \cos[2(\varphi - \varphi')], \quad b_\pm^2 = \frac{a_\pm}{a_\pm}.$$

Запишем получившееся представление в виде произведения

$$G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)|_{\eta=0} = -i \frac{m_1}{4\hbar^2} [I_+(a_+, b_+) + I_-(a_-, b_-)],$$

содержащего табличные интегралы [17]

$$I_\pm(a_\pm, b_\pm) \equiv -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left[\frac{i}{2} a_\pm \left(t + \frac{b_\pm^2}{t} \right) \right],$$

равные соответствующим функциям Ханкеля $H_0^{(1)}(a_\pm b_\pm)$. Осталось заметить, что в силу определения функций $a_\pm$ и $b_\pm$ верны равенства $a_\pm b_\pm = |\rho - \rho'|$, и тем самым закончить доказательство представления (58).

Доказанные выше равенства (58) означают, что в случае $\eta = 0$ интеграл (57) сходится на верхнем пределе. Положим в его подынтегральной функции $\eta \neq 0$ и $u \rightarrow \infty$. В этом пределе множитель $[\text{th}(u/2)]^{2i\eta}$ сходится к единице. Поэтому в том же пределе исследуемая подынтегральная функция сходится к подынтегральной функции в случае $\eta = 0$. Следовательно, интеграл (57) существует при любом η .

Сделаем важные замечания. Представление кулоновской функции Грина $G^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mathbf{k}, \eta)$ в виде однократного интеграла (57) получено впервые. К сожалению, в случае $\eta \neq 0$ этот интеграл не удалось выразить через элементарные или известные специальные функции. Не увенчались успехом и все попытки найти такое представление, как обратный фурье-образ функции Грина $\tilde{G}^c(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \eta)$, построенной в работе [12] в импульсном пространстве. Предложенный выше вывод соотношений (58) является альтернативным по отношению к давно известному выводу [22] представления функции G^0 через функцию Ханкеля $H_0^{(1)}$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые получены следующие соотношения: мажорантные оценки (29), (32), (34), (37) всех $(2\lambda = -1, 1, \dots)$ радиальных компонент G_λ^c и F_λ функции Грина G^c и волновой функции Ψ^c двумерного кулоновского рассеяния квантовой частицы, представления волновой функции Ψ^c и амплитуды рассеяния f^c в виде косинус-рядов Фурье (49) и (53), интегральные представления (27) и (57) всех радиальных функций Грина G_λ^c и функции Грина G^c .

Перечисленные выше соотношения предлагается использовать при построении квантовой теории двумерного рассеяния для систем нескольких заряженных частиц.

В заключение отметим, что настоящая работа является следующим звеном цепочки недавних исследований [23] двумерного рассеяния квантовой частицы.

Благодарности. Автор благодарен профессорам В. Б. Беляеву и В. С. Мележку за интерес к настоящей работе и полезные замечания.

Список литературы

- [1] L. D. Carr, D. DeMille, R. V. Krems, J. Ye, *New J. Phys.*, **11** (2009), 055049, 87 pp.
- [2] B. Simon, *Ann. Phys.*, **97**:2 (1976), 279–288.
- [3] H. Friedrich, *Scattering Theory*, Lecture Notes in Physics, **872**, Springer, Berlin, 2013.
- [4] B. Zaslav, M. E. Zandler, *Am. J. Phys.*, **35**:12 (1967), 1118–1119.
- [5] A. Cisneros, H. V. McIntosh, *J. Math. Phys.*, **10**:2 (1968), 277–286.
- [6] Л. Г. Мардоян, Г. С. Погосян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян, *ТМФ*, **61**:1 (1984), 99–117.
- [7] G. Barton, *Am. J. Phys.*, **51**:5 (1983), 420–422.
- [8] D. Yafaev, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:19 (1997), 6981–6992.
- [9] Л. С. Давтян, Г. С. Погосян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян, *ТМФ*, **66**:2 (1986), 222–233; **74**:2 (1988), 240–246.
- [10] D. Bollé, F. Gesztesy, *Phys. Rev. A*, **30**:3 (1984), 1279–1293.
- [11] J. Bellandi Filho, E. S. Caetano Neto, *Lett. Nuovo Cimento*, **16**:11 (1976), 331–332.
- [12] W. Dittrich, *Am. J. Phys.*, **67**:9 (1999), 768–775, arXiv:physics/9902070.
- [13] J. Wang Jing, J. Zeng, *Science in China. Ser. G*, **47**:6 (2004), 676–684.
- [14] В. В. Бабилов, *Метод фазовых функций в квантовой механике*, Наука, М., 1976.

- [15] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1974.
- [16] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Наука, М., 1974.
- [17] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.
- [18] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [19] Я. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Наука, М., 1971.
- [20] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, т. 1: *Элементарные функции*, 1981; т. 3: *Специальные функции*, Наука, М., 1983.
- [21] S. Klarsfeld, *Nuovo Cimento*, **43**:4 (1966), 3869–3886.
- [22] P. M. Morse, N. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [23] В. В. Пупышев, *ЯФ*, **77**:5 (2014), 699–710; *ТМФ*, **179**:1 (2014), 102–122; **180**:3 (2014), 342–367; **182**:2 (2015), 316–338.

Поступила в редакцию 19.03.2015,
после доработки 12.05.2015