Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ян Ли, Юань Сун, Появление гигантской компоненты
в растущих сетях с преимущественным прирастанием,
ТМФ, 2016, том 186, номер 3, 496–507

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8939>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:18:43

© 2016 г.

Ян Ли*, Юань Сун*

ПОЯВЛЕНИЕ ГИГАНТСКОЙ КОМПОНЕНТЫ В РАСТУЩИХ СЕТЯХ С ПРЕИМУЩЕСТВЕННЫМ ПРИРАСТАНИЕМ

Исследуется перколяционный переход в эволюционирующих безмасштабных сетях. На каждом шаге эволюции добавляется новый узел, который связывается со случайным числом предыдущих узлов в соответствии с механизмом преимущественного прирастания. Определено критическое значение параметра модели, при котором в сети возникает гигантская компонента, и доказано, что переход имеет бесконечный порядок. Кроме того, получены асимптотические выражения для распределения кластеров по их размерам в подкритическом, критическом и надкритическом режимах.

Ключевые слова: безмасштабные сети, перколяция, переход Костерлица–Зоулесса, распределение кластеров по размерам.

DOI: 10.4213/tmf8939

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие реально существующие сети, такие как интернет, энергетические сети, социальные сети и т. д., подчиняются безмасштабному распределению по степеням [1], согласно которому доля p_k узлов, имеющих степень (число инцидентных связей) k , асимптотически равна $Ck^{-\alpha}$, где $C > 0$ и $\alpha > 1$. Это наблюдение и практическая важность таких сетей мотивировали интенсивные исследования структурных свойств безмасштабных сетей [2], [3].

Возникновение безмасштабных сетей часто объясняется преимущественным прирастанием. В знаменитой модели Барабаши–Альберта (БА) [4] на каждом шаге алгоритма добавляется один узел, связанный с m существующими узлами, а вероятность Π_i получения новой связи для узлов i пропорциональна степени d_i этого узла, т. е. $\Pi_i = d_i / \sum_i d_i$. Были предложены различные обобщения модели БА, включающие другие типы преимущественного прирастания вероятности Π_i [5], нелинейные

Работа поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 11401368).

*School of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai, China.
E-mail: liyan@shiep.edu.cn

степени роста [6], введение весов на связях [7], динамическое перераспределение связей [8] и т. д. Были достаточно хорошо исследованы многие аспекты этих моделей, например распределение степеней и коэффициент кластеризации [9].

Среди критических явлений в подобных сетях особый интерес вызывает перколяционное поведение, поскольку с его помощью измеряется связность и устойчивость сети [10]–[13]. В хорошо изученной модели случайных графов, введенной Эрдошем и Реньи (ЭР), одним из наиболее интересных явлений оказывается существование порогового значения параметра модели, при котором появляется гигантская компонента связности [14], [15]. Естественно задать вопрос, существуют ли такие перколяционные переходы в динамически растущих сетях? В этой связи в работах [16] и [17] было показано, что перколяционный переход в простых растущих сетях проявляет свойства, весьма отличающиеся от свойств такого перехода в модели ЭР.

В настоящей работе предлагается модель растущей сети, в которой на каждом шаге роста в соответствии с правилом преимущественного прирастания к сети добавляется один новый узел со случайным числом связей, связывающих этот узел с существующими ранее. В отличие от модели БА, которая содержит только одну компоненту связности (кластер), в данной сети возможно существование нескольких кластеров, так как добавляемые новые узлы могут с ненулевой вероятностью оказаться изолированными. Детально исследуется явление перколяции в модели сети с таким преимущественным прирастанием. Доказано, что в модели имеется перколяционный переход бесконечного порядка. Получено выражение для размера гигантского кластера и асимптотическое распределение кластеров по размерам в подкритическом, околоскритическом и критическом режимах. Авторы надеются, что эта сравнительно простая модель позволит прояснить некоторые универсальные свойства перколяции в эволюционирующих безмасштабных сетях.

Рассмотренная нами модель была инспирирована работой Дороговцева с соавторами [17], в которой на каждом шаге эволюции в модель вводился новый узел и в соответствии с правилом преимущественного прирастания добавлялись новые связи между узлами. Основное отличие нашей модели состоит в том, что в ней новые связи добавляются только между новым узлом и старыми узлами, а в модели из работы [17] новые связи добавляются между любыми двумя узлами сети. Несмотря на это отличие, обе модели проявляют совпадающие перколяционные свойства такие, как бесконечный порядок перколяционного перехода и асимптотика распределения кластеров по размерам. Это можно объяснить тем, что в работе [17] два кластера соединяются напрямую новыми добавляемыми связями, а в нашей модели они соединяются опосредованным образом путями, проходящими через новый узел. Поэтому механизм роста кластеров в обеих моделях оказывается весьма схожим.

Работа организована следующим образом. Модель и основные результаты представлены в разделе 2. Доказательства всех теорем даются в разделе 3. Наконец, в разделе 4 обсуждается обобщение данной модели.

Следует отметить, что, хотя модель, рассматриваемая в настоящей работе, отличается от модели, предложенной Каллавеем, Хопкрофтом, Клейнбергом, Ньюманом и Строгацем (КХКНС) [16], равно как и от ее обобщений [17]–[20], упомянутые работы обогатили авторов многочисленными ценными идеями и методами вычислений.

2. МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Барабаши и Альберт указали, что разрастание и преимущественное прирастание оказываются двумя определяющими свойствами, которые приводят к появлению безмасштабных сетей [4], поэтому эти два механизма содержатся и в нашей модели. Вместо добавления фиксированного числа связей на каждом этапе предполагается, что число новых связей представляет собой случайную величину с распределением $\tau = \{\tau_k, k \geq 0\}$. Более точно, на каждом этапе добавляется новый узел, из которого с вероятностью τ_k выходят k связей, соединяющих ее со старыми узлами. Вероятность того, что узел i будет при этом связанным с новым узлом, равна

$$\Pi(d_i) = \frac{d_i + a}{\sum_j (d_j + a)},$$

где $a > 0$ – исходная привлекательность, позволяющая изолированным узлам приобретать новые связи. Чтобы работать с моделью было легче, предположим, что τ – распределение Пуассона с параметром λ ,

$$\tau_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В разделе 4 обсуждаются другие, более общие, распределения.

Оказывается, что вид распределения τ не слишком сильно влияет на распределение $\{p_k\}$ степеней узлов, и получающаяся при этом сеть по-прежнему оказывается безмасштабной. Можно доказать, что $p_k \sim Ck^{-\alpha}$ с $\alpha = 3 + a/\lambda$ при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что $\alpha \rightarrow 3$ при $a \rightarrow 0$, и это находится в согласии с показателем степени модели БА [4].

Наша модель отличается от модели БА тем, что новый узел при добавлении его к сети не обязательно связан со старыми узлами, так как $\tau_0 = e^{-\lambda} > 0$. Вследствие этого сеть в общем случае оказывается несвязной, и в ней возникают кластеры различных размеров. Основная цель настоящей работы – исследование фазового перехода к появлению гигантского кластера. Первый результат состоит в определении критического значения λ , при котором происходит этот переход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $N_k(t)$ – математическое ожидание числа компонент связности (кластеров) размера k в момент времени t , а $n_k = \lim_{t \rightarrow \infty} N_k(t)/t$ – соответствующая предельная плотность. Обозначим через

$$S = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} kn_k$$

плотность кластера бесконечного размера. Если существует значение λ_c такое, что $S = 0$ при $\lambda \leq \lambda_c$ и $S > 0$ при $\lambda > \lambda_c$, то будем называть λ_c *критическим значением для возникновения гигантской компоненты*.

ТЕОРЕМА 1. При каждом $a \geq 0$

$$\lambda_c = \frac{a}{2}(a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a}).$$

Заметим, что критическое значение λ_c убывает с убыванием a , другими словами, оно убывает с усилением тенденции преимущественного разрастания. В предельном случае $a = 0$ всегда имеется кластер бесконечного размера ($\lambda_c = 0$), так как изолированные узлы никогда не обзаводятся новыми связями. При $a \rightarrow \infty$ преимущественное присоединение не имеет места, и мы получаем $\lambda_c \rightarrow 1/4$, что совпадает с ответом из работы [18].

Чтобы изучить характер фазового перехода, приведем оценку среднего размера кластера и предельной плотности бесконечной компоненты в окрестности точки λ_c .

ТЕОРЕМА 2. *Обозначим через $\langle s \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 n_k$ среднее значение конечной компоненты. Имеем*

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &\rightarrow \frac{4\lambda_c^2 - 2a^2\lambda_c + a^2}{2(2+a)^2\lambda_c^2}, & \lambda \uparrow \lambda_c, \\ \langle s \rangle &\rightarrow \frac{4(1-a)\lambda_c^2 + a(2-a)\lambda_c + a^2}{(2+a)^2\lambda_c^2}, & \lambda \downarrow \lambda_c. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. *При $\lambda \downarrow \lambda_c$*

$$S = C \frac{(2\lambda + a)^2}{\lambda^2(2+a)} \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{4\kappa - 1}}\right), \quad C > 0, \quad \kappa = \frac{a(2+a)\lambda}{(2\lambda + a)^2}. \quad (1)$$

Заметим, что в результате появления гигантской компоненты величина $\langle s \rangle$ становится разрывной в точке λ_c . Более того, поскольку $\kappa \downarrow 1/4$ при $\lambda \downarrow \lambda_c$ и $S = 0$ при $\lambda \leq \lambda_c$, с помощью соотношения (1) можно проверить, что производные функции S любого порядка обращаются в нуль в точке λ_c . Поэтому перколяционный переход имеет бесконечный порядок (переход типа Костерлица–Зоулесса), что также наблюдалось в модели КХКНС [16]–[18], [20].

Наконец, рассмотрим распределение $q_k = kn_k$ кластеров по их размерам. При фиксированном k величина q_k интерпретируется как значение правдоподобия при случайном процессе выбора узла, принадлежащего кластеру размера k . Приведенная ниже теорема дает асимптотические выражения для q_k в подкритической, околокритической и надкритической областях.

ТЕОРЕМА 4. *При $k \rightarrow \infty$ имеют место следующие асимптотики.*

1. *Если $\lambda = \lambda_c$, то*

$$q_k \approx \frac{(2\lambda_c + a)^2}{2\lambda_c^2(2+a)^2} \frac{1}{k^2 \ln^2 k}.$$

2. *Если $\lambda < \lambda_c$, то*

$$q_k \approx C_1 \frac{1}{k^{2+\Lambda}}, \quad C_1 = \text{const}, \quad \Lambda = \frac{4\omega}{1-2\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa}, \quad \kappa = \frac{a(2+a)\lambda}{(2\lambda + a)^2}.$$

3. *Если $\lambda > \lambda_c$, то*

$$q_k \approx C_2 k^{-1/2} \exp\left[-C_3 e^{-\pi/2\eta-1} k - \frac{3\pi}{4\eta} - \frac{3}{2}\right], \quad C_2, C_3 = \text{const}, \quad \eta = \sqrt{\kappa - \frac{1}{4}}.$$

Из теоремы 4 следует, что распределение кластеров по размерам имеет степенную зависимость до возникновения гигантского кластера и становится экспоненциальной в надкритической области.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ключевым моментом при выводе уравнений роста для n_k оказывается то, что почти наверное все кластеры конечного размера являются древесными графами [14], [15], [17]. Поэтому кластер размера k содержит $k - 1$ связей, и его полная степень равна $2(k - 1)$. В совокупности с тем обстоятельством, что математическое ожидание полного числа связей в момент времени t равно λt , вероятность того, что возникла новая связь с кластером, равна $[(2 + a)k - 2]/[(2\lambda + a)t]$. Поэтому величина $N_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$N_k(t + 1) - N_k(t) = -\lambda \frac{(2 + a)k - 2}{(2\lambda + a)t} N_k(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k-1} \prod_{j=1}^n \frac{(2 + a)k_j - 2}{(2\lambda + a)t} N_{k_j}(t), \quad (2)$$

в котором первый член в правой части описывает убывание величины N_k , обусловленное связью между новым узлом и кластерами размера k , а второй член описывает слияние кластеров в кластер размера k .

В предельном случае $t \rightarrow \infty$ из уравнения (2) получаем

$$n_k = -\lambda \frac{(2 + a)k - 2}{2\lambda + a} n_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \sum_{k_1 + \dots + k_n = k-1} \prod_{j=1}^n \frac{(2 + a)k_j - 2}{2\lambda + a} n_{k_j}. \quad (3)$$

Вводя производящие функции

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k e^{kz}, \quad g(z) = f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k n_k e^{kz}, \quad (4)$$

приведем уравнение (3) к виду

$$g'(z) = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}, \quad (5)$$

где

$$H_1(z) = -\frac{a}{2\lambda + a} g(z) + \left[1 - \frac{2\lambda}{2\lambda + a} g(z)\right] \exp\left[-\lambda + z + \frac{\lambda(2 + a)}{2\lambda + a} g(z) - \frac{2\lambda}{2\lambda + a} f(z)\right],$$

$$H_2(z) = \frac{\lambda(2 + a)}{2\lambda + a} - \frac{\lambda(2 + a)}{2\lambda + a} \exp\left[-\lambda + z + \frac{\lambda(2 + a)}{2\lambda + a} g(z) - \frac{2\lambda}{2\lambda + a} f(z)\right].$$

Так как на каждом этапе добавляется один узел и λ связей, получим

$$f(0) = \sum_k n_k = 1 - \lambda. \quad (6)$$

Если гигантский кластер отсутствует, выполняется соотношение $g(0) = f'(0) = 1$, и можно показать, что $H_1(0) = H_2(0) = 0$. Из правила Лопиталя следует, что

$$\langle s \rangle = g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{H_1'(z)}{H_2'(z)} = \frac{-g'(0) + \frac{a}{2\lambda + a} \left[\frac{a}{2\lambda + a} + \frac{\lambda(2 + a)}{2\lambda + a} g'(0) \right]}{-\frac{\lambda(2 + a)}{2\lambda + a} \left[\frac{a}{2\lambda + a} + \frac{\lambda(2 + a)}{2\lambda + a} g'(0) \right]}.$$

Переставляя члены, получим

$$\lambda^2(2+a)^2[g'(0)]^2 + (2\lambda a^2 - a^2 - 4\lambda^2)g'(0) + a^2 = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения имеет вид

$$g'(0) = \frac{-(2\lambda a^2 - a^2 - 4\lambda^2) \pm \sqrt{(2\lambda a^2 - a^2 - 4\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(2+a)^2 a^2}}{2\lambda^2(2+a)^2}. \quad (7)$$

Поскольку $\langle s \rangle = g'(0) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow 0$, решение с плюсом перед радикалом следует отбросить.

Фазовый переход возникает при

$$(2\lambda a^2 - a^2 - 4\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(2+a)^2 a^2 = 0,$$

и получающееся при этом физическое решение имеет вид

$$\lambda_c = \frac{a}{2}(a+1 - \sqrt{a^2+2a}). \quad (8)$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $\lambda \uparrow \lambda_c$ из уравнения (7) получаем, что

$$\langle s \rangle = g'(0) \rightarrow \frac{4\lambda_c^2 - 2a^2\lambda_c + a^2}{2(2+a)^2\lambda_c^2}.$$

Если $\lambda > \lambda_c$, то $g(0) < 1$ и гигантский кластер имеет размер

$$S = 1 - g(0). \quad (9)$$

Подстановка $z = 0$ в равенство (5) дает

$$g'(0) = \frac{-\frac{a}{2\lambda+a}(1-S) + \left[1 - \frac{2\lambda}{2\lambda+a}(1-S)\right] \exp\left[-\lambda + \frac{\lambda(2+a)}{2\lambda+a}(1-S) - \frac{2\lambda}{2\lambda+a}(1-\lambda)\right]}{\frac{\lambda(2+a)}{2\lambda+a} - \frac{\lambda(2+a)}{2\lambda+a} \exp\left[-\lambda + \frac{\lambda(2+a)}{2\lambda+a}(1-S) - \frac{2\lambda}{2\lambda+a}(1-\lambda)\right]}.$$

Так как $S \rightarrow 0$ при $\lambda \downarrow \lambda_c$, мы получаем

$$\langle s \rangle = g'(0) \rightarrow \frac{4(1-a)\lambda_c^2 + a(2-a)\lambda_c + a^2}{(2+a)^2\lambda_c^2}.$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть

$$h(z) = -\lambda + z + \frac{\lambda(2+a)}{2\lambda+a}g(z) - \frac{2\lambda}{2\lambda+a}f(z), \quad (10)$$

где $f(z)$ и $g(z)$ заданы в (4). Преобразуя выражение (5), получаем

$$g(z) = 1 - h'(z) + e^{h(z)}h'(z). \quad (11)$$

При $z \rightarrow -\infty$ мы имеем $f(z) \rightarrow 0$, $g(z) \rightarrow 0$, $h(z) \rightarrow -\infty$ и $z - h(z) \rightarrow \lambda$, таким образом,

$$f(z) = \int_{-\infty}^z g(t) dt = \int_{-\infty}^z [1 - h'(z) + e^{h(z)} h'(z)] dt = z - h(z) + e^{h(z)} - \lambda. \quad (12)$$

Подстановка соотношений (11) и (12) в (10) дает

$$h(z) = \frac{a}{2\lambda + a} z + \frac{\lambda(2+a)}{2\lambda + a} [e^{h(z)} - 1] h'(z) - \frac{2\lambda}{2\lambda + a} [e^{h(z)} - h(z) - 1]. \quad (13)$$

Используя разложение $e^{h(z)}$ в окрестности точки $z = 0$,

$$e^{h(z)} = 1 + h(z) + \frac{1}{2} h^2(z) + \dots,$$

получаем, что уравнение (13) можно аппроксимировать дифференциальным уравнением Абеля второго рода

$$h(z) h'(z) = \frac{1}{2+a} h^2(z) - \frac{2\lambda + a}{\lambda(2+a)} h(z) - \frac{a}{\lambda(2+a)} z. \quad (14)$$

С помощью подстановок

$$u = e^{-z/(2+a)}, \quad w(u) = \frac{\lambda}{2\lambda + a} e^{-z/(2+a)} h(z) \quad (15)$$

приведем уравнение (14) к более простому виду:

$$w(u) w'(u) - w(u) = -\kappa u \ln u, \quad \text{где} \quad \kappa = \frac{a(2+a)\lambda}{(2\lambda + a)^2}. \quad (16)$$

В окрестности $z = 0$ имеем $u \approx 1$ и $\ln u \approx u - 1$, поэтому уравнение (16) можно записать как

$$w(u) w'(u) - w(u) = -\kappa(u - 1). \quad (17)$$

Решение этого уравнения имеет вид [21]

$$\ln(u - 1) + \int \frac{\tau d\tau}{\tau^2 - \tau + \kappa} = C, \quad (18)$$

где $\tau = w(u)/(u - 1)$.

Можно непосредственно вычислить, что $\kappa > 1/4$, если $\lambda > \lambda_c$. Вычисление интеграла в выражении (18) дает

$$\ln \sqrt{w^2(u) - w(u)(u - 1) + \kappa(u - 1)^2} - \frac{1}{\sqrt{4\kappa - 1}} \arctg \frac{1 - 2w(u)/(u - 1)}{\sqrt{4\kappa - 1}} = C. \quad (19)$$

Положив $u = 1$, с учетом соотношений (6), (9), (10) и (15) получаем, что

$$C = \ln \frac{\lambda^2(2+a)}{(2\lambda + a)^2} S + \frac{1}{\sqrt{4\kappa - 1}} \frac{\pi}{2}.$$

При $\lambda \downarrow \lambda_c$ (при $\kappa \downarrow 1/4$) с использованием асимптотического выражения

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (20)$$

равенство (19) приводится к виду

$$\ln \left[\frac{u-1}{2} - w(u) \right] - \frac{\pi}{\sqrt{4\kappa-1}} + \frac{1}{1-2w(u)/(u-1)} = \ln \frac{\lambda^2(2+a)}{(2\lambda+a)^2} S. \quad (21)$$

В точке $\lambda = \lambda_c$ (при $\kappa = 1/4$) после подстановки

$$w(u) = \frac{1}{2}(u-1)[1 - \varphi(u)] \quad (22)$$

решение уравнения (17) задается выражением

$$\ln[(u-1)\varphi(u)] + \frac{1}{\varphi(u)} = \ln C_1. \quad (23)$$

Комбинируя соотношения (21)–(23), в конечном итоге получаем

$$S = C_1 \frac{(2\lambda+a)^2}{\lambda^2(2+a)} \exp \left[-\frac{\pi}{\sqrt{4\kappa-1}} \right].$$

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Обратное Z-преобразование функции $g(z)$ дает

$$q_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi i}^{\pi i} g(z) e^{-kz} dz.$$

Используя уравнение (11) и интегрируя по частям, получим

$$q_k = \frac{k}{2\pi i} \int_{-\pi i}^{\pi i} [e^{h(z)} - h(z)] e^{-kz} dz. \quad (24)$$

Подстановка величин (15) в уравнение (24) приводит к ответу

$$q_k = \frac{(2+a)k}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \left[e^{(2\lambda+a)/\lambda \cdot w(u)/u} - \frac{2\lambda+a}{\lambda} \frac{w(u)}{u} \right] u^{(2+a)k-1} du,$$

в котором контур Γ_1 начинается в точке $e^{-\pi i/(2+a)}$ и проходит против часовой стрелки вдоль единичной окружности до точки $e^{\pi i/(2+a)}$. Для вычисления q_k при $k \gg 1$ заметим, что основной вклад в интеграл приходит из окрестности точки $u = 1$, являющейся точкой сингулярности функции w . Производя замену переменной интегрирования $u = 1 + t$, получим

$$q_k \approx \frac{(2+a)k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[1 + \frac{(2\lambda+a)^2}{2\lambda^2} w^2(1+t) \right] e^{(2+a)kt} dt, \quad (25)$$

где Γ – некоторый контур интегрирования справа от начала координат. Теперь можно продолжить Γ до $\pm i\infty$ и произвести оценку интеграла при пороговом значении, снизу и сверху от него.

1. При $\lambda = \lambda_c$, решая уравнение (23), получим

$$\varphi(1+t) = -\frac{1}{W(-Ct)}, \quad (26)$$

где $W(z)$ – W-функция Ламберта, задаваемая уравнением $W(z)e^{W(z)} = z$ с условием $W(0-0) = -\infty$. Подставив формулы (22) и (26) в выражение (25), имеем

$$q_k \approx \frac{(2+a)k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ 1 + \frac{(2\lambda_c + a)^2 t^2}{8\lambda_c^2} \left[1 + \frac{2}{W(-Ct)} \right] \right\} e^{(2+a)kt} dt. \quad (27)$$

Поскольку $W(-Ct) \approx \ln(Ct)$ при $t \rightarrow 0$, а точка $t = 0$ есть точка ветвления функции $\ln(Ct)$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} q_k &\approx \frac{(2+a)k}{2\pi i} \int_{-\epsilon}^0 \frac{(2\lambda_c + a)^2 t^2}{8\lambda_c^2} e^{(2+a)kt} \left(\frac{2}{\ln|Ct| - \pi i} - \frac{2}{\ln|Ct| + \pi i} \right) dt \approx \\ &\approx \frac{(2+a)(2\lambda_c + a)^2 k}{4\lambda_c^2} \int_{-\epsilon}^0 \frac{t^2 e^{(2+a)kt}}{\ln^2|t|} dt. \end{aligned}$$

Подстановка $v = -(2+a)kt$ приводит к

$$q_k \approx \frac{(2\lambda_c + a)^2}{4\lambda_c^2(2+a)^2} \frac{1}{k^2 \ln^2 k} \int_0^{+\infty} v^2 e^{-v} dv = \frac{(2\lambda_c + a)^2}{2\lambda_c^2(2+a)^2} \frac{1}{k^2 \ln^2 k}.$$

2. При $\lambda < \lambda_c$ вычисление интеграла в уравнении (18) дает

$$C(u-1) = \left[\frac{1}{2} + \omega - \frac{w(u)}{u-1} \right]^{-1/4\omega-1/2} \left[\frac{1}{2} - \omega - \frac{w(u)}{u-1} \right]^{1/4\omega-1/2}, \quad (28)$$

где $\tau = w(u)/(u-1)$ и $\omega = \sqrt{1/4 - \kappa}$. Поэтому при $u \rightarrow 1$ имеем

$$w(u) \approx (u-1) \left[\frac{1}{2} - \omega + C(u-1)^\Lambda \right], \quad \Lambda = \frac{4\omega}{1-2\omega}. \quad (29)$$

Подставив эти соотношения в выражение (25) и вычислив скачок функции $(u-1)^\Lambda$ на разрезе, получим

$$\begin{aligned} q_k &\approx \frac{(2+a)k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ 1 + \frac{(2\lambda + a)^2 t^2}{2\lambda^2} \left[\left(\frac{1}{2} - \omega \right)^2 + Ct^\Lambda \right] \right\} e^{(2+a)kt} dt \approx \\ &\approx \frac{(2+a)k}{2\pi i} \int_{-\epsilon}^0 \frac{(2\lambda + a)^2 t^2}{2\lambda^2} e^{(2+a)kt} C e^{\Lambda \ln|t|} [e^{-i\Lambda\pi} - e^{i\Lambda\pi}] dt \approx \\ &\approx -\frac{(2+a)(2\lambda + a)^2 k C \sin \Lambda\pi}{2\lambda^2 \pi} \int_{-\epsilon}^0 t^2 e^{(2+a)kt} |t|^\Lambda dt. \end{aligned}$$

Подставляя $v = -(2+a)kt$, имеем

$$q_k \approx -\frac{(2\lambda + a)^2 C \sin \Lambda\pi}{2\lambda^2(2+a)^{2+\Lambda}\pi} \frac{\Gamma(3+\Lambda)}{k^{2+\Lambda}} = C_1 \frac{1}{k^{2+\Lambda}}.$$

3. В случае $\lambda > \lambda_c$ уравнение (18) можно записать в более простом виде:

$$C(u-1) = \left[\left(\frac{w(u)}{u-1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \eta^2 \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\eta} \left[\frac{\pi}{2} + \arctg \left[\frac{1}{\eta} \left(\frac{w(u)}{u-1} - \frac{1}{2} \right) \right] \right] \right\}, \quad (30)$$

где $\eta = \sqrt{\kappa - 1/4}$. Применяя асимптотику (20), при $\eta \ll 1$ можно переписать это уравнение как

$$C(u-1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{w(u)}{u-1} \right)^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\eta} \left[\pi + \eta \left(\frac{1}{2} - \frac{w(u)}{u-1} \right)^{-1} \right] \right\}.$$

После подстановки $u = 1 + t$ получаем

$$w(1+t) = \frac{t}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{W(Cte^{\pi/2\eta})} \right\}. \quad (31)$$

Подставив это равенство в формулу (25), имеем

$$q_k \approx \frac{(2+a)k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ 1 + \frac{(2\lambda+a)^2 t^2}{8\lambda^2} \left[1 + \frac{2}{W(Cte^{\pi/2\eta})} \right] \right\} e^{(2+a)kt} dt.$$

В этом выражении только член, содержащий W -функцию Ламберта, сингулярен и приводит к ненулевому вкладу, тем самым

$$q_k \approx \frac{(2+a)(2\lambda+a)^2 k}{8\lambda^2 \pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^2 e^{(2+a)kt}}{W(Cte^{\pi/2\eta})} dt.$$

После замены переменной интегрирования $z = W(Cte^{\pi/2\eta})$ получим

$$q_k \approx \frac{(2+a)(2\lambda+a)^2 k}{8C^3 \lambda^2 \pi i} e^{-3\pi/2\eta} \int_{\Gamma} z(z+1) \exp[C^{-1}(2+a)e^{-\pi/2\eta} k z e^z + 3z] dz.$$

Интегрируя в этом выражении по частям, получаем ответ:

$$\begin{aligned} q_k &\approx \frac{(2\lambda+a)^2}{8C^2 \lambda^2 \pi i} e^{-\pi/\eta} \int_{\Gamma} z e^{2z} dz \exp[C^{-1}(2+a)e^{-\pi/2\eta} k z e^z] \approx \\ &\approx -\frac{(2\lambda+a)^2}{8C^2 \lambda^2 \pi i} e^{-\pi/\eta} \int_{\Gamma} (2z+1) \exp[C^{-1}(2+a)e^{-\pi/2\eta} k z e^z + 2z] dz. \end{aligned}$$

С применением метода седловой точки [22] при $z = -1$ приходим к окончательному выражению

$$q_k \approx \frac{(2\lambda+a)^2}{4C^{3/2}(2+a)^{1/2}(2\pi)^{1/2}\lambda^2} k^{-1/2} \exp \left[-C^{-1}(2+a)e^{-\pi/2\eta-1} k - \frac{3\pi}{4\eta} - \frac{3}{2} \right].$$

Теорема доказана.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Чтобы привести модель к достаточно простому виду, допускающему аналитическое решение, мы предположили, что число новых связей, добавляемых на каждом шаге, задается распределением Пуассона. Здесь мы ослабим это предположение и рассмотрим дискретные распределения общего вида. Более точно, будем на каждом шаге добавлять новый узел и с вероятностями τ_k будем добавлять k новых связей, связывающих новый узел со старыми в соответствии с преимущественным правилом соединения, как описано в разделе 2. Оказывается, что при этом большинство результатов настоящей работы остаются справедливыми с некоторыми модификациями. Например, как и в случае перколяционного порога, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что существует $t_0 > 0$ такое, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \tau_k$ сходится при $|t| < t_0$. Тогда кривая перколяционного перехода в данной модели задается уравнением*

$$\sigma^2 = \frac{16\mu^4 + 32a\mu^3 + 24a^2\mu^2 + 8a^3\mu + a^4}{(16a^2 + 32a)\mu^2 + (16a^3 + 32a^2)\mu + 4a^4 + 8a^3}, \quad (32)$$

где

$$\mu = \sum_k k \tau_k, \quad \sigma^2 = \sum_k k^2 \tau_k - \mu^2$$

суть математическое ожидание и дисперсия распределения τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5 аналогично доказательству теоремы 1 и опускается для краткости изложения.

В случае распределения Пуассона $\mu = \sigma^2 = \lambda$, и выражение (32) сводится к (8).

Заметим, что уравнение (32) применимо также и в других моделях, например в моделях, исследованных в работах [18]–[20], [23]. Так, в работе [23] исследован случай $\tau_0 = 1 - \delta$ и $\tau_2 = \delta$ без введения преимущественного присоединения. Применяя соотношение (32) и производя предельный переход $a \rightarrow \infty$, получим критическое значение $\delta_c = 1/2 - \sqrt{3}/4$, находящееся в соответствии с результатами работы [23].

Список литературы

- [1] A. L. Barabási, R. Alber, *Science*, **286**:5439 (1999), 509–512, arXiv: cond-mat/9910332.
- [2] M. E. J. Newman, A. L. Barabasi, D. J. Watts, *The Structure and Dynamics of Networks*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2006.
- [3] L. F. Costa, O. N. Oliveira, Jr, G. Travieso, F. A. Rodrigues, P. R. Villas Boas, L. Antigueira, M. P. Viana, L. E. Correa Rocha, *Adv. Phys.*, **60**:3 (2011), 329–412, arXiv: 0711.3199.
- [4] A. L. Barabási, R. Albert, H. Jeong, *Physica A*, **272**:1 (1999), 173–187, arXiv: cond-mat/9907068.
- [5] P. L. Krapivsky, S. Redner, F. Leyvraz, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:21 (2000), 4629–4632, arXiv: cond-mat/0005139.
- [6] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, *Phys. Rev. E*, **63**:2 (2001), 025101, 4 pp., arXiv: cond-mat/0009065.
- [7] A. Barrat, M. Barthélemy, A. Vespignani, *Phys. Rev. Lett.*, **92**:22 (2004), 228701, 4 pp., arXiv: cond-mat/0401057.

- [8] R. Albert, A. L. Barabási, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:24 (2000), 5234–5237, arXiv:cond-mat/0005085.
- [9] R. Albert, A. L. Barabási, *Rev. Modern Phys.*, **74**:1 (2002), 47–97, arXiv:cond-mat/0106096.
- [10] R. Cohen, K. Erez, D. Ben-Avraham, S. Havlin, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:21 (2000), 4626–4628, arXiv:cond-mat/0007048.
- [11] D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, D. J. Watts, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:25 (2000), 5468–5471, arXiv:cond-mat/0007300.
- [12] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes, *Rev. Modern Phys.*, **80**:4 (2008), 1275–1335, arXiv:0705.0010.
- [13] Чжун-Хао Сюй, Я. Хигучи, Чунь-Хуа Ху, *ТМФ*, **172**:1 (2012), 28–39.
- [14] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math.*, **6** (1959), 290–297.
- [15] P. Erdős, A. Rényi, *Pub. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. Ser. A*, **5** (1960), 17–61.
- [16] D. S. Callaway, J. E. Hopcroft, J. M. Kleinberg, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, *Phys. Rev. E*, **64**:4 (2001), 041902, 7 pp., arXiv:cond-mat/0104546.
- [17] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, A. N. Samukhin, *Phys. Rev. E*, **64**:6 (2001), 066110, 11 pp., arXiv:cond-mat/0106141.
- [18] J. Kim, P. L. Krapivsky, B. Kahng, S. Redner, *Phys. Rev. E*, **66**:5 (2002), 055101, 4 pp., arXiv:cond-mat/0203167.
- [19] S. Coulomb, M. Bauer, *Eur. Phys. J. B*, **35**:3 (2003), 377–389, arXiv:cond-mat/0212371.
- [20] P. L. Krapivsky, B. Derrida, *Physica A*, **340**:4 (2004), 714–724, arXiv:cond-mat/0408161.
- [21] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматлит, М., 2001.
- [22] G. Polya, G. Latta, *Complex Variables*, John Wiley and Sons, New York–London–Sydney, 1974.
- [23] D. Lancaster, *J. Phys. A*, **35**:5 (2002), 1179–1194.

Поступила в редакцию 19.03.2015,
после доработки 27.04.2015