Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Грац, Вакуумное взаимодействие конических особенностей, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 2, 243–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8940>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:27:37

© 2016 г.

Ю. В. Грац*

ВАКУУМНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОНИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

В рамках $(\text{tr } \ln)$ -формализма рассматривается задача о вакуумном взаимодействии конических особенностей в D -мерном ($D \geq 3$) пространстве-времени. Показано, что регуляризованная методом размерной регуляризации энергия взаимодействия не содержит ни ультрафиолетовых расходимостей, ни расходимостей, связанных с неинтегрируемым характером вакуумного среднего оператора тензора энергии-импульса. В случае четырех пространственно-временных измерений результат совпадает с полученными ранее в рамках локального подхода.

Ключевые слова: эффект Казимира, конические особенности, размерная регуляризация.

DOI: 10.4213/tmf8940

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Казимира последние два десятилетия привлекает к себе все большее внимание. Являясь прямым доказательством существования связи между квантованными полями и макроскопическими внешними условиями, он представляет интерес как с точки зрения фундаментальной, так и с точки зрения прикладной физики. Меняя спектр вакуумных флуктуаций, внешние условия порождают зависящую от классических параметров конечную добавку к энергии вакуума, что проявляется в виде действующей на макроскопические тела силы. Эффект Казимира оказывает заметное влияние на ход процессов самых разных пространственно-временных масштабов, и сейчас о нем говорят не только специалисты в области квантовой теории поля, физики конденсированного состояния, атомной физики, нанотехнологии, но и гравитации и космологии (см., например, [1]).

Одной из задач последнего типа является задача о вакуумном взаимодействии космических струн.

---

*Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: grats@phys.msu.ru

Космические струны представляют собой одномерные протяженные замкнутые или бесконечные топологические дефекты, которые могли образоваться при космологических фазовых переходах [2]. Наблюдения анизотропии космического микроволнового излучения исключают космические струны из числа основных источников образования первичных флуктуаций плотности во Вселенной. Тем не менее они по-прежнему рассматриваются как возможная причина ряда наблюдаемых эффектов (обзор возможных наблюдательных проявлений космических струн можно найти в работе [3]). Это стимулирует поиск путей их обнаружения и, как следствие, изучение особенностей поведения классической и квантованной материи в конических пространствах.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением пространства-времени системы параллельных космических струн. Замечательной особенностью прямолинейной струны является ее так называемая гравитационная стерильность, которая проявляется, в частности, в отсутствии гравитационного взаимодействия между параллельными струнами. Однако глобальное отличие конических пространств от пространства Минковского приводит к изменению спектра вакуумных флуктуаций квантованных полей и, как следствие, появлению силы притяжения между струнами.

В нашей предыдущей работе [4] мы рассмотрели вакуумное взаимодействие космических струн в рамках локального однопетлевого подхода, при котором объектом исследования является вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса. Было показано, что в низшем порядке теории возмущений вклады в $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}^{\text{ren}}$ от разных струн входят аддитивно, а зависящий от расстояния между струнами казимировский вклад в вакуумное среднее появляется во втором порядке теории возмущений. При этом вычисление полной энергии вакуума сталкивается с дополнительной сложностью. Вакуумная энергия определяется интегрированием $\langle T_{00} \rangle_{\text{vac}}^{\text{ren}}$ по пространству. Однако в случае бесконечно тонкой струны перенормированное вакуумное среднее имеет неинтегрируемую особенность на струне [5]. Поэтому устранение ультрафиолетовых расходимостей не решает проблему полностью. Соответствующий вклад в полную энергию вакуума можно формально представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{div}} = \infty \times \int dx_3,$$

где x_3 – координата вдоль струны. Как было показано в работе [6], это позволяет устранить расходимость перенормировкой затравочного (голого) струнного натяжения.

В работе [4] мы учли это обстоятельство и показали, что если из выражения

$$\mathcal{E}_{\text{vac}} = \int d\mathbf{x} \sqrt{-g} \langle T_{00} \rangle_{\text{vac}}^{\text{ren}}$$

исключить члены, которые не зависят от относительного расстояния между струнами (стандартное правило, которым пользуются при вычислении энергии Казимира), то оставшийся казимировский вклад оказывается конечным.

Отметим, что независимо от нас, в рамках иного подхода и с отличающимся от нашего результатом, задача о казимировском взаимодействии двух параллельных струн была рассмотрена в работе [7].

В настоящей работе задача о вакуумном взаимодействии конических особенностей в $D \geq 3$ измерениях рассматривается в рамках (tr ln) -подхода, так называемого глобального подхода, при котором исходят из выражения для полной энергии вакуума, которое определяется эффективным действием.

Когда работа была закончена, появилась статья [8], которая содержит некоторые из приведенных ниже результатов и в которой, в частности, исправлена допущенная в работе [7] погрешность, после чего результат совпал с полученным в [4], а также при $D = 4$ с результатом настоящей работы (17). Однако авторы [8] ограничиваются рассмотрением четырехмерного пространства-времени. Кроме того, отсутствует обсуждение ряда принципиальных вопросов, которые связаны с применением выбранного метода исследования.

В работе используется система единиц $G = \hbar = c = 1$ и метрика D -мерного пространства-времени с сигнатурой $(+, -, -, \dots)$.

2. МУЛЬТИКОНИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим D -мерное пространство-время, которое представляет собой прямое произведение трехмерного локально-плоского ультрарелятивистского пространства-времени с N коническими особенностями и $(D - 3)$ -мерного евклидова пространства. Его метрика может быть представлена в виде

$$ds^2 = dt^2 - e^{-\sigma(\mathbf{x})}(dx_1^2 + dx_2^2) - \sum' dx^2, \quad \sigma(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^N \sigma_a(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\sigma_a(\mathbf{x}) = 8\mu_a \ln |\mathbf{x} - \mathbf{d}_a|,$$

где $\mathbf{d}_a = (d_{a1}, d_{a2})$ – радиус-вектор a -й особенности, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – точки в плоскости (x_1, x_2) , $|\mathbf{x} - \mathbf{d}_a| = [(x_1 - d_{a1})^2 + (x_2 - d_{a2})^2]^{1/2}$ – координатное расстояние до a -й особенности. Параметр μ_a – величина, которая определяет связанный с a -й особенностью дефицит угла $\delta\varphi_a = 8\pi\mu_a$. (В четырех измерениях μ_a – это безразмерная масса на единицу длины струны.) В метрике (1) и всюду ниже символ $\sum'$ (далее также $\prod'$) обозначает сумму (произведение) стоящих за ним величин по индексам, соответствующим координатам $(D - 3)$ -мерного евклидова пространства. Будем называть его пространством дополнительных измерений.

Возможность введения конформных координат на двумерном сечении рассматриваемого пространства обеспечивается тем, что двумерная риманова поверхность локально конформна евклидовой плоскости. При работе в рамках теории поля важно, что в случае конического пространства конформные координаты покрывают поверхность (x_1, x_2) глобально. В случае одной особенности это возможно при $\mu < 1/4$, а при двух и более особенностях, если $\sum \mu_a < 1/2$ [9]. Всюду ниже мы будем считать последнее неравенство выполненным.

Число членов в сумме $\sum'$ может быть любым равным или большим нуля. В первом случае мы имеем дело с пространством-временем N точечных масс в трехмерной теории [9]. При $N = 1$ некоторые классические и квантовые процессы на этом пространстве рассматривались в работах [10], при $N \geq 1$ – в [4], [11].

Если $D = 4$, то метрика (1) соответствует четырехмерному пространству-времени системы параллельных космических струн [12], эффекты поляризации вакуума на котором исследовались в работах [4], [7], [8].

В связи с возросшим интересом к многомерным теориям делались попытки обобщения и исследования пространства прямолинейной струны на случай наличия дополнительных измерений. Так в работе [13] была получена метрика вложенной в брану модели $RS2$ космической струны. Эффект поляризации вакуума на этом пространстве-времени был рассмотрен в [14]. В работах [15] было рассмотрено шестимерное пространство-время космической струны с двумя дополнительными измерениями и показано, что порождаемое глобальной струной гравитационное поле могло бы привести к компактификации от шести к четырем измерениям и способствовать решению проблемы иерархии взаимодействий.

В работе [4] наше предложение рассмотреть пространство с метрикой (1) диктовалось тем, что при локальном подходе это позволяло решить одновременно две разные задачи. Регуляризованные и взятые в пределе совпадающих точек евклидова функция Грина и ее производные при $D = 4$ давали выражение для $\langle \phi^2 \rangle_{\text{vac}}^{\text{reg}}$ и $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}^{\text{reg}}$ квантованного скалярного безмассового поля в пространстве-времени системы параллельных космических струн, а при $D = 3$ – для регуляризованной собственной энергии классической заряженной частицы, которая локализована в некоторой точке пространственного сечения того же пространства-времени. Однако относительно недавно пространство с метрикой (1) при $N = 1$ и $D > 4$ было предложено рассматривать как модель пространства, представляющего собой прямое произведение конической 3-браны (пространство-время одной прямолинейной струны) на $(D - 4)$ -мерное плоское пространство дополнительных измерений [16]. Ниже мы рассмотрим эффекты поляризации вакуума в рамках мультиструнного обобщения этой модели.

Особенностями пространства-времени (1) являются отсутствие в метрике каких-либо размерных параметров и высокая степень симметрии. При $N = 1$ первое обстоятельство позволяет заранее сказать, что в случае безмассового поля вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса может зависеть только от расстояния до особенности, и, следовательно, в D измерениях $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}^{\text{ren}} \sim r^{-D}$. Вторая особенность позволяет разделить переменные в полевом уравнении и построить аналитическое выражение для соответствующей функции Грина [16]. В случае двух и более особенностей последнее не представляется возможным и заставляет использовать методы теории возмущений.

3. ВАКУУМНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУН В (TRLN)-ФОРМАЛИЗМЕ

Ограничимся случаем безмассового скалярного поля с минимальной связью. Это соответствует выбору действия в виде

$$S = -\frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} \phi(x) \mathcal{K}(x, \partial) \phi(x),$$

где $\mathcal{K}(x, \partial) = \square$ – оператор поля, $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ – оператор Лапласа–Бельтрами.

Определенная через эффективное действие энергия вакуума записывается в виде

$$\mathcal{E}_{\text{vac}} = -\frac{i}{2T} \ln \det \mathcal{K}, \quad T = \int dt. \quad (2)$$

Чтобы разложить детерминант по степеням отклонения метрики от плоской, представим оператор $\mathcal{K}(x, \partial)$ в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(x, \partial) &= \partial^2 + \delta\mathcal{K}(x, \partial), \\ \delta\mathcal{K}(x, \partial) &= \square - \partial^2, \quad \partial^2 = \partial_t^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \sum' \partial^2.\end{aligned}\quad (3)$$

При этом соответствующий метрике (1) оператор $\delta\mathcal{K}(x, \partial)$ имеет вид

$$\delta\mathcal{K}(x, \partial) = -\mathcal{V}(\mathbf{x})(\partial_1^2 + \partial_2^2), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) = (e^{\sigma(\mathbf{x})} - 1). \quad (4)$$

Рассматривая $\delta\mathcal{K}$ как возмущение, запишем

$$\begin{aligned}\ln \det \mathcal{K} &= \ln \det[\partial^2 + \delta\mathcal{K}] = \ln \det \partial^2 + \ln \det[1 + \partial^{-2} \delta\mathcal{K}] = \\ &= -\text{tr} \ln \partial^{-2} + \text{tr} \ln[1 + \partial^{-2} \delta\mathcal{K}] = \\ &= -\text{tr} \ln \partial^{-2} + \text{tr} \partial^{-2} \delta\mathcal{K} - \frac{1}{2} \text{tr} \partial^{-2} \delta\mathcal{K} \partial^{-2} \delta\mathcal{K} + \dots\end{aligned}\quad (5)$$

При этом под следом оператора $\mathcal{M}$ понимается

$$\text{tr} \mathcal{M} = \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{M}(x, x). \quad (6)$$

Здесь возникает сразу несколько вопросов.

Во-первых, полученное выражение является хорошо определенным, если входящие в него операторы относятся к классу операторов со следом (см., например, [17]). В нашем случае это не так. Будучи формально записанным в выбранном базисе (ниже мы воспользуемся базисом Фурье), след представляет собой выражение, которое расходится, и для дальнейшей работы с ним необходима промежуточная регуляризация. В качестве таковой мы выберем размерную регуляризацию.

Но такой выбор порождает другую проблему. Как показал Хокинг [18], в случае искривленного пространства не существует естественного рецепта, по каким из измерений проводить аналитическое продолжение. Результат может зависеть от этого выбора и отличаться от результата, полученного другими методами. Предложенный в работе [18] способ заключался в том, чтобы построить прямое произведение рассматриваемого четырехмерного пространства-времени на $(D - 4)$ -мерное плоское пространство, по измерениям которого и проводить аналитическое продолжение. Показано, что полученный таким образом результат будет совпадать с результатом, полученным методом обобщенной дзета-функции.

В рассматриваемом случае предложенный в [18] способ соответствует продолжению по размерности пространства дополнительных измерений.

Во-вторых, в обычной для эффекта Казимира постановке задачи критерием для выделения из энергии вакуума казимировского вклада является зависимость от расстояния между “стенками”. Доказано, что в случае тел конечных размеров в вакууме, которые разнесены на конечное расстояние, выделенный таким образом вклад в расходящееся в целом выражение для вакуумной энергии оказывается конечным (см., например, [1]). В рассматриваемом случае это соответствовало бы ситуации, когда вклады от разных струн в функцию $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ входят аддитивно и их носители не перекрываются. В плоском пространстве это позволило бы сразу отбросить первые

два члена в (5), которые в этом случае не зависели бы от относительного расстояния, и ограничиться третьим слагаемым.

В нашем случае вклады от разных струн в оператор возмущения (4) входят мультипликативно и их носителями является вся плоскость $(x_1 x_2)$. Поэтому при вычислениях по теории возмущений мы получаем выражение, которое зависит от расстояния между особенностями в любом порядке по $\delta\mathcal{K}$.

Причина, по которой первые два члена в правой части (5) должны быть отброшены, заключается в том, что они содержат одну функцию Грина ∂^{-2} , т. е. соответствуют диаграммам типа “головастик”. В рамках метода размерной регуляризации такие выражения в случае безмассового поля принято считать равными нулю.

Во втором порядке теории возмущений ограничимся случаем двух особенностей. При этом входящую в оператор возмущения (4) функцию $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ удобно представить следующим образом:

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{V}_a(\mathbf{x}) = e^{\sigma_a(\mathbf{x})} - 1 = \sigma_a(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\mu_a^2). \quad (7)$$

Поскольку $\mathcal{V}_a(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\mu_a)$, то при вычислении в первом порядке по $\mu_1 \mu_2$ мы должны в (7) отбросить $\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_2$ как член более высокого порядка малости по μ и оставить в (5) только выражение, в которое входят $\mathcal{V}_a$ с разными индексами. Вклады вида $\text{tr } \partial^{-2} \delta\mathcal{K}_a \partial^{-2} \delta\mathcal{K}_a$ не зависят от относительного расстояния.

В результате для казимировского вклада в полную энергию вакуума (2) мы окончательно получаем

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}} = \frac{i}{2T} \text{tr}(\partial^{-2} \delta\mathcal{K}_1 \partial^{-2} \delta\mathcal{K}_2), \quad \delta\mathcal{K}_a = -\sigma_a(\partial_1^2 + \partial_2^2). \quad (8)$$

При этом с той же точностью при вычислении следа в подынтегральном выражении в (6) $\sqrt{-g}$ следует заменить на единицу.

Это позволяет воспользоваться стандартным базисом Фурье. В этом базисе

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}} = \frac{i}{2T} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\delta\mathcal{K}_1(k, i(p+k)) \delta\mathcal{K}_2(-k, ip)}{p^2(p+k)^2}, \quad (9)$$

где

$$\delta\mathcal{K}_a(k, ip) = \int d^D x e^{ikx} [\delta\mathcal{K}_a(x, \partial)]|_{\partial \rightarrow -ip}. \quad (10)$$

Предполагается, что дифференциальный оператор $\delta\mathcal{K}(x, \partial)$ надо преобразовать к виду, при котором операторы дифференцирования стоят справа от функций координат, осуществить в нем замену $\partial_j \rightarrow -ip_j$, после чего выполнить преобразование Фурье полученной функции, рассматривая p_j как параметры.

В нашем случае

$$\delta\mathcal{K}_a(k, ip) = \sigma_a(k)(p_1^2 + p_2^2), \quad (11)$$

и мы получаем

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}} = \frac{i}{2T} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p_1^2 + p_2^2)^2}{p^2(p+k)^2} \sigma_1(k) \sigma_2(-k), \quad (12)$$

где

$$\sigma_a(k) = (2\pi)^{D-2} \frac{16\pi\mu_a}{k^2} e^{ikd_a} \delta(k_0) \prod' \delta(k), \quad \mathbf{k} = (k_1, k_2). \quad (13)$$

Подстановка (13) в (12) дает

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}} = 128i\pi^2\mu_1\mu_2 V_{D-3} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{d}}}{(\mathbf{k})^4} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{(p_1^2 + p_2^2)^2}{p^2(p+\mathbf{k})^2}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2. \quad (14)$$

Здесь

$$V_0 = 1, \quad D = 3, \\ V_{D-3} = \int \prod' dx, \quad D > 3.$$

Интеграл по $d^D p$ в (14) расходится.

Как и в работе [4], воспользуемся методом размерной регуляризации. Поворот Вика

$$p^0 = ip_E^0, \quad d^D p = id^D p_E, \quad p^2 = -p_E^2,$$

и замена D на $D - 2\varepsilon$ приводит интеграл по $d^D p$ к виду

$$i\lambda^{2\varepsilon} \int \frac{d^{D-2\varepsilon} p_E}{(2\pi)^{D-2\varepsilon}} \frac{(p_1^2 + p_2^2)^2}{p_E^2(p+\mathbf{k})_E^2} = \\ = i \frac{\lambda^{2\varepsilon}}{(4\pi)^{D/2-\varepsilon}} \frac{2(D-2\varepsilon)}{D-2-2\varepsilon} \frac{\Gamma^2(D/2-\varepsilon)}{\Gamma(D+2-2\varepsilon)} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2} + \varepsilon\right) (\mathbf{k}^2)^{D/2-\varepsilon}.$$

Параметр λ вводится для сохранения размерности регуляризуемого выражения.

При этом $\mathcal{E}_{\text{Cas}}$ (14) заменяется регуляризованным выражением $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^\varepsilon$:

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}}^\varepsilon = -16\mu_1\mu_2 V_{D-3} \frac{\lambda^{2\varepsilon}}{(4\pi)^{D/2-2-\varepsilon}} \frac{D-2\varepsilon}{D-2-2\varepsilon} \frac{\Gamma^2(D/2-\varepsilon)}{\Gamma(D+2-2\varepsilon)} \times \\ \times \Gamma\left(2 - \frac{D}{2} + \varepsilon\right) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{d}} (\mathbf{k}^2)^{D/2-2-\varepsilon}. \quad (15)$$

При четном D стоящее перед интегралом по $d\mathbf{k}$ в (15) выражение имеет простой полюс и при снятии регуляризации расходимость в $\mathcal{E}_{\text{Cas}}^\varepsilon$ могла бы возникнуть из-за этого полюса, из-за интеграла по $d\mathbf{k}$ или по той и другой причине одновременно.

В действительности оставшийся в (15) двукратный интеграл хорошо определен [19],

$$\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{d}} (\mathbf{k}^2)^{D/2-2-\varepsilon} = \frac{2^{D-4-2\varepsilon}}{\pi} \frac{\Gamma(D/2-1-\varepsilon)}{\Gamma(2-D/2+\varepsilon)} \frac{1}{(\mathbf{d}^2)^{D/2-1-\varepsilon}}, \quad (16)$$

и имеющийся в (15) при четных D простой полюс компенсируется простым нулем выражения (16).

Таким образом, при снятии регуляризации, связанной с ультрафиолетовым поведением, расходящейся части в энергии взаимодействия не возникает и мы получаем

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{\text{ren}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_{\text{Cas}}^\varepsilon = -V_{D-3} \frac{32\mu_1\mu_2}{\pi^{D/2-1}} \frac{D}{(D-2)^2} \frac{\Gamma^3(D/2)}{\Gamma(D+2)} \frac{1}{(\mathbf{d}^2)^{D/2-1}}. \quad (17)$$

Исключенной оказывается и расходимость, которая соответствует неинтегрируемому характеру $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}^{\text{ren}}$.

При $D = 4$ выражение (17) дает рассчитанную на единицу длины энергию парного взаимодействия в системе параллельных космических струн,

$$\mathcal{E}_{\text{Cas}}^{\text{ren}} = -\frac{4}{15\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{d^2} \int dx_3, \quad (18)$$

что совпадает с результатом, полученным в рамках локального подхода в работе [4].

При $D = 3$ выражение (17) соответствует энергии взаимодействия конических особенностей в $3D$ -теории, а при $D \geq 5$ оно дает возможность рассмотреть вакуумное взаимодействие в рамках мультиконического обобщения предложенной в работах [16] модели.

Энергия взаимодействия убывает тем быстрее, чем больше число дополнительных измерений, а сила взаимодействия является силой притяжения при всех $D \geq 3$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках глобального (tr ln)-подхода получено выражение для энергии вакуумного взаимодействия многомерных (в смысле определения, данного в работах [16]) космических струн. При $D = 4$ результат совпадает с полученным ранее в рамках локального подхода. Показано, что при использовании метода размерной регуляризации казимировская часть вакуумной энергии не содержит ни ультрафиолетовых расходимостей, ни расходимости, связанной с неинтегрируемой особенностью перенормированного вакуумного среднего оператора тензора энергии-импульса.

Отсутствие расходимостей в энергии взаимодействия нельзя считать заранее ожидаемым результатом. Действительно, отсутствие ультрафиолетовых расходимостей в энергии Казимира доказано в случае двух разнесенных на конечное расстояние тел в вакууме. Рассматриваемая задача этому условию не удовлетворяет. Также до конца не ясно, как в терминах перенормировок устраняются расходимости второго типа.

Использование теории возмущений порождает вопросы, связанные с областью применимости полученных результатов. Этот недостаток отчасти компенсируется возможностью рассмотрения двух и более конических особенностей и тем, что не требуется наложения ограничений на дефициты углов и взаимное расположение особенностей, кроме сформулированных выше.

Благодарности. Автор выражает благодарность своим коллегам А. В. Борисову и И. П. Волобуеву за полезные обсуждения и сделанные замечания.

Список литературы

- [1] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, International Series of Monographs on Physics, **145**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.
- [2] A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [3] E. J. Copeland, L. Pogosian, T. Vachaspati, *Class. Quantum Grav.*, **28**:20 (2011), 204009, arXiv: 1105.0207.
- [4] Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, А. А. Лаврентьев, *ЯФ*, **58**:3 (1995), 570–576.

- [5] T. M. Helliwell, D. A. Konkowski, *Phys. Rev. D*, **34**:6 (1986), 1918–1920; V. P. Frolov, E. M. Serebriany, *Phys. Rev. D*, **35**:12 (1987), 3779–3782; B. Linet, *Phys. Rev. D*, **35**:2 (1987), 536–539; J. S. Dowker, *Phys. Rev. D*, **36**:10, 3095–3101; 3742–3746; W. A. Hiscock, *Phys. Lett. B*, **188**:3 (1987), 317–320.
- [6] D. V. Fursaev, *Class. Quantum Grav.*, **11**:6 (1994), 1431–1443, arXiv: hep-th/9309050.
- [7] M. Bordag, *Ann. Phys. (Berlin)*, **502**:2–3 (1990), 93–100.
- [8] J. M. Muñoz-Castañeda, M. Bordag, *Phys. Rev. D*, **89**:6 (2014), 065034, 16 pp., arXiv: 1402.6592.
- [9] S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft, *Ann. of Phys.*, **152**:1 (1984), 220–235; J. R. Gott, *Gen. Relat. Grav.*, **16**:3 (1984), 243–247; S. Giddings, J. Abbott, K. Kuchnar, *Gen. Relat. Grav.*, **16** (1984), 751–775; R. Jackiw, *Nucl. Phys. B*, **252** (1985), 343–356.
- [10] T. Souradeep, V. Sahni, *Phys. Rev. D*, **46**:4 (1992), 1616–1633, arXiv: hep-ph/9208219; M. E. X. Guimarães, B. Linet, *Class. Quantum Grav.*, **10**:8 (1993), 1665–1680; V. P. Frolov, A. A. Shoom, A. Zelnikov, *Phys. Rev. D*, **88**:2 (2013), 024032, 9 pp.
- [11] Yu. V. Grats, A. Garcia, *Class. Quantum Grav.*, **13**:2 (1996), 189–197; Ю. В. Грац, А. А. Россихин, *ТМФ*, **123**:1 (2000), 150–162.
- [12] P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.*, **4** (1987), L75–L77.
- [13] S. C. Davis, *Phys. Lett. B*, **499**:1–2 (2001), 179–185, arXiv: hep-ph/0010255.
- [14] Yu. V. Grats, A. A. Rossikhin, *Modern Phys. Lett. A*, **17**:18 (2002), 1207–1214.
- [15] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, *Phys. Lett. B*, **470**:1–4 (1999), 52–58, arXiv: hep-th/9910132; R. Gregory, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:12 (2000), 2564–2567, arXiv: hep-th/9911015.
- [16] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello, *JHEP*, **09** (2008), 005, 32 pp.; J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello, *Internat. J. Modern Phys. A*, **24**:8–9 (2009), 1481–1488, arXiv: 0808.3736; E. R. Bezerra de Mello, *Class. Quantum Grav.*, **27**:9 (2010), 095017, 25 pp., arXiv: 0907.4139; E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian, H. H. Harutyunyan, *Phys. Rev. D*, **91**:6 (2015), 064034, 19 pp., arXiv: 1411.1258.
- [17] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 3: *Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.
- [18] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **55**:2 (1977), 133–148.
- [19] Е. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, М., 1959.

Поступила в редакцию 24.03.2015,
после доработки 6.05.2015